
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

**Alcune proprietà dei fasci di omografie negli
spazi lineari ad n-dimensioni**

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (IV) VI (1890), pp. 63-70.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques" promosso dal

*Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 - Area Archivi e Biblioteche*

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 20 luglio 1890.

Estratto dal vol. VI, 2° Semestre, fasc. 2.

ALCUNE PROPRIETÀ

DEI FASCI DI OMOGRAFIE NEGLI SPAZI LINEARI

AD n DIMENSIONI

N O T A

DI

FEDERIGO ENRIQUES

Scuola di Magistero
per la Matematica

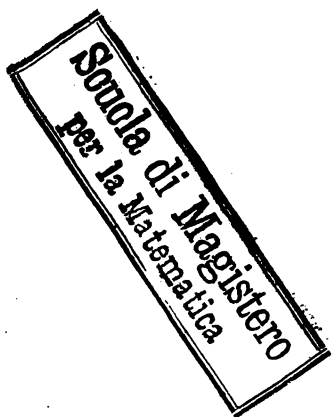


R O M A

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1890



Matematica. — *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari, ad n dimensioni.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Corrispondente DE PAOLIS.

« Espongo in questa Nota alcune proprietà dei fasci di omografie tra due spazi lineari ad n dimensioni F_n, F'_n .

« Indico con F_r, F'_r gli spazi lineari a r dimensioni rispettivamente immersi in F_n, F'_n , e con Φ_r, Φ'_r gli spazi ad essi duali, generati quindi da F_{n-1}, F'_{n-1} .

« 1. Date due omografie π_1, π_2 , tra F_n, F'_n , che ad un punto 0 di F_n facciano corrispondere i punti 1, 2 di F'_n , l'omografia (12) in F'_n ha in generale un gruppo di σ spazi di punti uniti *semplici*, indipendenti,

$$F'_{h_1-1}, F'_{h_2-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1} \quad (h_1 + h_2 + \dots + h_\sigma = n + 1),$$

o di σ spazi di punti uniti *moltiplici* $F'_{h_{11}-1}, F'_{h_{21}-1}, \dots, F'_{h_{\sigma 1}-1}$, nei quali sono contenuti rispettivamente uno nell'altro gli spazi

$$F'_{h_{12}-1}, \dots, F'_{h_{1\rho_1}-1}; F'_{h_{22}-1}, \dots, F'_{h_{2\rho_2}-1}; \dots; F'_{h_{\sigma 2}-1}, \dots, F'_{h_{\sigma\rho_\sigma}-1},$$

con

$$h_{11} + h_{12} + \dots + h_{1\rho_1} + h_{21} + h_{22} + \dots + h_{2\rho_2} + \dots + h_{\sigma 1} + h_{\sigma 2} + \dots + h_{\sigma\rho_\sigma} = n + 1 \quad (1),$$

(1) Predella, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.* Annali di mat. Serie 2.^a, Tomo XVII, Fasc. 2.

a questi punti uniti della (12) corrisponde in π_1^{-1} (o in π_2^{-1}) un analogo gruppo di spazi F_{h_1-1} , F_{h_2-1} , ..., $F_{h_\sigma-1}$, semplici o multipli, ai punti dei quali spazi corrispondono i medesimi punti di F'_n in tutte le omografie del fascio determinato da π_1 , π_2 .

« I due gruppi di punti suddetti in F_n , F'_n , si diranno rispettivamente il 1° e il 2° gruppo di punti base del fascio: diremo F_r base, gli F_r cui corrisponde uno stesso F'_r (base) in tutte le omografie del fascio.

« È evidente che :

« È individuato un fascio di omografie subordinato del dato fascio, tra due F_r base corrispondenti, rispettivamente del 1° e del 2° gruppo.

« 2. Possiamo costruire come segue un fascio di omografie tre F_n , F'_n individuato da due omografie non degeneri π_1 , π_2 . Omettiamo il caso $n=1$ trattato dal Segre (1), e ci riferiamo alla proprietà che le omografie d'un fascio trasformano un punto non base di F_n nei punti di una retta di F'_n .

« Se al punto 0 di F_n corrispondono in π_1 , π_2 , i punti 1, 2, di F'_n , preso un punto 0_i di F_n cui corrispondano in π_1 , π_2 , i punti, 1_i , 2_i , ed un altro punto $0'$ della retta 00_i cui corrispondano i punti $1'$, $2'$ sulle rette 11_i , 22_i , avremo tre casi :

a) Le rette 11_i , 22_i non s'incontrano; allora possiamo costruire la omografia π_x del fascio nella quale a 0 corrisponde un punto x preso ad arbitrio sulla retta 12, costruendo la retta che passa per x ed incontra le $1_i 2_i$, $1' 2'$, e facendo corrispondere a 0_i , $0'$, ... i punti x_i , x'_i , ... in cui essa si appoggia alle rette $1_i 2_i$, $1' 2'$

b) Le rette 11_i , 22_i , s'incontrano; allora per costruire la π_x basta condurre alla conica che tocca le rette 12, $1' 2'$, $1_i 2_i$, 11_i , 22_i , la tangente che passa per x , ed è distinta dalla 12, e quindi far corrispondere a 0_i , $0'$, ... i punti x_i , x'_i , ... in cui la detta tangente incontra le rette $1_i 2_i$, $1' 2'$, ...

c) Le rette 11_i , 22_i coincidono colla 12; allora 0_i è un punto d'una retta base e quindi la costruzione si riduce a quella di un fascio d'omografie tra due rette.

« Da questa costruzione geometrica deduciamo :

« I punti d'una retta non base di F_n sono trasformati dalle omografie di un fascio nelle generatrici di un sistema d'un iperboloide, o nelle tangenti d'una conica; la retta è trasformata dalle omografie del fascio nelle generatrici dell'altro sistema dell'iperboloide, o nelle tangenti della conica stessa: se la conica determinata da una retta si spezza in due punti, le trasformate della retta generano un fascio di raggi col centro in uno dei punti, e le rette corrispondenti

(1) Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux. Crelle, vol. C.

ai punti della retta data generano il fascio di raggi che col 1° compone la conica, col centro nell'altro punto; il centro del 1° fascio è un punto base del 2° gruppo corrispondente ad un punto base del 1° gruppo, che appartiene alla data retta.

« L'ultima parte del teorema enunciato risulta dal fatto che se la conica considerata si spezza, le punteggiate $11_i 1'...$, $22_i 2'...$, sono prospettive.

« 3. Il caso in cui l'omografia (12) individuata da π_1, π_2 in F'_n ha spazi di punti uniti multipli (il fascio ha punti base multipli), si può considerare come caso limite di quello in cui essa abbia σ spazi (indipendenti) di punti uniti semplici

$$F_{h_1-1} \dots F_{h_\sigma-1}, \quad (h_1 + \dots + h_\sigma = n + 1)$$

quando alcuni di questi vengano a sovrapporsi fra loro (1): ci riferiremo dunque al caso in cui la (12) abbia spazi fondamentali semplici. Allora è noto (2) che le rette 12 incontrano i sostegni delle forme fondamentali Φ di F_{n-1} dell'omografia

$$F_{n-h_1} \equiv [F_{h_2-1} \dots F_{h_\sigma-1}] \dots F_{n-h_\sigma} \equiv [F_{h_1-1} \dots F_{h_{\sigma-1}-1}],$$

in σ punti che danno con 1, 2 rapporti anarmonici costanti; e segue dalla costruzione esposta del fascio che facendo corrispondere questi σ punti al punto 0 di F_n si ottengono *tutte e sole le* σ omografie degeneri del fascio. Vediamo dunque che tutte le ∞^n rette di F'_n corrispondenti nel fascio ai punti di F_n sono le ∞^n rette che si appoggiano ad $F_{n-h_1} \dots F_{n-h_\sigma}$ in σ punti di cui i $\sigma - 3$ rapporti anarmonici indipendenti hanno valori costanti. Queste rette si riducono ad ∞^{n-1} solamente nel caso in cui si abbiano due spazi di punti base in ciascun gruppo ($\sigma = 2$), ed allora una di tali rette è data da tutti i punti di una retta di F_n che si appoggia pure ai due spazi di punti base. Il sistema di queste ∞^n rette diremo che costituisce il *complesso C*, complesso che è intimamente collegato col fascio di omografie, e per $n = 3$ è (nel caso generale) un complesso tetraedrale (3). La caratteristica dell'omografia (12) (4) la diremo pure *caratteristica del fascio* e del *complesso C*; il 2° gruppo base del fascio lo diremo *gruppo fondamentale* del complesso C. Si ha quindi: Gli invarianti assoluti indipendenti d'un complesso C di data caratteristica sono i $\sigma - 3$ rapporti anarmonici indipendenti delle σ intersezioni d'una sua retta coi sostegni delle forme Φ di F_{n-1} del gruppo fondamentale.

(1) Predella l. c.

(2) Predella, l. c.

(3) Reye, *Geometrie der Lage*.

(4) Predella, l. c.

« 4. Per un punto di F'_n passano ∞^1 rette del complesso C che generano un cono di cui vogliamo determinare l'ordine, supposto $n > 2$.

« Sia dapprima il gruppo fondamentale un $(n+1)$ gono. Se prendiamo un punto P d'una faccia F'_{n-1} dello $(n+1)$ gono fondamentale, si ha in questo F'_{n-1} un cono relativo ad un analogo complesso C_1 in F'_{n-1} d'ordine incognito; se consideriamo un raggio r del complesso C fuori di F'_{n-1} , il piano per esso e per il vertice 0 dello $(n+1)$ gono opposto ad F'_{n-1} , sega le facce dello $(n+1)$ gono per 0 in un fascio di n raggi per 0 di cui i rapporti anarmonici sono uguali a quelli delle intersezioni di r colle dette facce, sicchè si vede che dal cono del complesso C si stacca un fascio piano di raggi fuori di F'_{n-1} , e non si hanno altri raggi del complesso fuori di F'_{n-1} perchè si avrebbe per P un piano fuori di F'_{n-1} e non passante per 0 che segherebbe le facce dello $(n+1)$ gono fondamentale secondo i lati di un $(n+1)$ gono piano ($n > 2$) tale che per un punto di un lato passerebbero due rette fuori di questo lato incontranti i lati in gruppi di punti proiettivi. Dunque l'ordine del cono del complesso C in F'_n , è uguale a quello del cono del complesso C_1 , in F'_{n-1} , aumentato di 1. Ne segue che i coni complessi C per i punti di F'_n sono d'ordine $n-1$. Osservando poi che se il gruppo fondamentale del complesso C, cioè il 2° gruppo base del fascio corrispondente, è costituito di σ spazî semplici indipendenti $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$, ogni punto di F'_n appartiene ad un $F'_{\sigma-1}$ base (poichè per ogni punto passa un $F'_{\sigma-1}$ che si appoggia rispettivamente in σ punti ad $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$) (1), ed osservando inoltre che i raggi del complesso C per il punto (appoggiandosi ad $F'_{n-h_1}, \dots, F'_{n-h_\sigma}$) debbono appartenere al detto $F'_{\sigma-1}$ deduciamo che: Il cono complesso C per un punto di F'_n , quando il gruppo fondamentale è costituito di σ spazî di punti base semplici, è un cono d'ordine $\sigma-2$ appartenente ad un $F'_{\sigma-1}$.

« Per un punto dipendente dal gruppo fondamentale che appartenga ad un $F'_{\sigma-r-1}$ determinato da $\sigma-r$ punti fondamentali (appartenenti a diverse forme fondamentali), si staccano dal cono complesso C, r fasci piani.

« Sono raggi del complesso C le rette per un punto fondamentale di F'_{h_i-1} che si appoggiano al sostegno F'_{n-h_i} della forma fondamentale coniugata Ψ'_{h_i-1} .

« 5. Il complesso C di F'_n è rappresentato mediante il fascio di omografie nei punti di F_n ; vediamo che cosa corrispondono agli elementi lineari nei due spazî.

« I punti di un F_r ($r < n-1$) son trasformati dalle omografie del fascio

(1) Lo $F'_{\sigma-1}$ per un punto di F'_n che si appoggia ad $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$, si determina come intersezione delle forme proiettanti dal punto le $F'_{n-h_1}, \dots, F'_{n-h_\sigma}$.

in ∞^r rette di F'_n che generano in generale uno spazio algebrico ∞^{r+1} . I punti $x_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \dots + \lambda_{r+1} x_i^{(r+1)}$ son portati dalle omografie del fascio nei punti $y_i = \sum_k (a_{ik} + \lambda b_{ik}) (\lambda_1 x_k^{(1)} + \dots + \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)})$: risolvendo rispetto a λ si ha

$$\lambda = \frac{y_i - \sum_k a_{ik} (\lambda_1 x_k^{(1)} + \dots + \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)})}{\sum_k b_{ik} (\lambda_1 x_k^{(1)} + \dots + \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)})} \quad (i = 1, \dots, n+1),$$

sicchè uguagliando i 2^i membri si ottengono tutte le y_i legate linearmente p. e. alla y_1 con coefficienti di 2° grado in $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$; segnando quindi questo spazio algebrico ∞^{r+1} con la F_{n-r-1} data da $y_1 = 0, \dots, y_{r+1} = 0$, si ottengono r equazioni omogenee di 2° grado in $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$, sicchè l'intersezione è costituita da 2^r punti. Dunque:

« Agli F_r corrispondono ∞^r rette del complesso C in F'_n generanti in generale spazi algebrici razionali ∞^{r+1} d'ordine 2^r . Ossia:

« I punti d'un F_r sono trasformati in generale dalle omografie del fascio nelle generatrici d'uno spazio algebrico ∞^{r+1} razionale rigato d'ordine 2^r in F'_n .

« Invertendo le relazioni:

$$y_i = \sum_k (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x_k,$$

si trova che un punto di F'_n in generale è trasformato dalle inverse delle omografie d'un fascio nei punti di una linea razionale d'ordine n in F_n , ed un punto d'un F'_r base è trasformato in una linea razionale d'ordine r della F_r base corrispondente (poichè fra due spazi base vi è un fascio subordinato di omografie), dunque:

« Un punto di F'_n è trasformato dalle inverse delle omografie d'un fascio che ha due gruppi base semplici di σ spazi ciascuno, nei punti d'una linea razionale d'ordine $\sigma - 1$ appartenente ad un $F_{\sigma-1}$. E quindi:

« Ai raggi d'un cono complesso C corrispondono i punti d'una linea razionale d'ordine $\sigma - 1$ appartenente ad un $F_{\sigma-1}$.

« Ai raggi del complesso C che si appoggiano ad un F'_r corrispondono i punti di ∞^r linee razionali, d'ordine $\sigma - 1$, appartenenti ciascuna ad una $F_{\sigma-1}$ in F_n .

« Ne segue in particolare che: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le inverse delle omografie di un fascio formino un fascio, è che in F_n , F'_n si abbiano rispettivamente due soli spazi di punti base. Allora il complesso C si riduce ad un sistema ∞^{n-1} di rette, e per ogni punto di F'_n passa uno ad un sol raggio del sistema.

« Poichè i raggi del complesso C per un punto P di F'_n corrispondenti ai punti d'un F_{n-1} sono dati dall'intersezione di F_{n-1} colla linea razionale d'ordine $\sigma - 1$ corrispondente a P in F_n , si ha infine: Agli F_{n-1} corrispondono in generale ∞^{n-1} raggi del complesso C, tali che per un punto di F'_n ne passano $\sigma - 1$.

« 6. Le rette di F_n determinano in generale in un fascio di omografie, iperboloidi in F'_n .

« Ponendo la condizione che le trasformate di una retta in due omografie del fascio s'incontrino, si trova che:

« In generale per ogni punto di F_n vi è un cono ∞^1 d'ordine 2^{n-2} , di rette che determinano coniche nel fascio.

« Si è pure veduto al n. 2 che le rette pei punti base del 1° gruppo e queste sole determinano coniche che si spezzano in due fasci di raggi uno dei quali (quello delle trasformate delle rette) ha il centro in un punto base del 2° gruppo.

« È interessante determinare la condizione perchè tutte le rette di F_n determinino coniche nel fascio (per $n > 2$). Ciò equivale alla condizione che due rette qualunque del complesso C s'incontrino. Allora tutti i raggi del complesso C dovendo incontrare tutti i raggi per un punto base P della forma F'_{h_1-1} , che si appoggiano ad F'_{n-h_1} , si hanno due casi:

a) Per P passa un solo raggio del complesso C; allora la F'_{n-h_1} è un punto, per cui F'_{h_1-1} è un F_{n-1} .

b) Per P passa almeno un fascio di raggi del complesso C; allora dovendo questi essere incontrati da tutti i raggi del complesso, i raggi del complesso non appartenendo tutti al piano del fascio (essendo $n > 2$), appartengono tutti al centro del detto fascio; quindi il complesso C ha tutti i suoi raggi per P; questi sono quindi ∞^{n-1} , ed F_{n-h_1} è un F_{n-1} .

« Chiamando *omologico* un fascio di omografie di cui i gruppi base son costituiti ciascuno di un punto e d'un F_{n-1} , abbiamo dunque:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le rette di F_n determinino coniche in un fascio di omografie è che il fascio sia omologico, ossia che il complesso C si riduca ad una stella di raggi. Le coniche determinate dalle rette di F_n si spezzano in due fasci di raggi coi centri nel punto base isolato, e in un punto base dello F_{n-1} di punti base, del 2° gruppo.

« Si ha poi: Le inverse delle omografie d'un fascio omologico formano un fascio omologico.

« 7. Sieno F_n , F'_n sovrapposti e cerchiamo la condizione perchè le omografie d'un fascio formino un *gruppo*.

« Se ad un punto O corrisponde nel fascio la retta p , e P è un punto

di p , l'omografia (OP) moltiplicata per un'altra omografia qualunque del fascio porta 0 in un punto di p , ossia P da un'omografia qualunque del fascio è portato in un punto di p : dunque ogni punto appartiene alla retta corrispondente nel fascio, al fascio appartiene l'identità, i due gruppi base coincidono. Ora la retta p per P incontra in P_1 il sostegno F_{n-h_1} della forma base Φ_{h_1-1} , ed il punto P_1 da un'omografia del fascio deve essere trasformato in un punto di p e di F_{n-h_1} , per cui è un punto base (essendo P indipendente dagli spazi di punti base): ne segue che ogni punto P appartiene ad una retta base; questa condizione è altresì sufficiente.

« Dunque: La condizione necessaria e sufficiente perchè le omografie d'un fascio formino un gruppo è che vi sieno due gruppi base coincidenti in uno costituito di due soli spazi di punti base F_h, F_{n-h} : cioè che il fascio sia individuato dall'identità e da un'involuzione.

« In particolare: La condizione necessaria è sufficiente perchè le omografie d'un fascio omologico in F_n formino un gruppo, è che il fascio sia costituito di tutte le omologie con uno stesso centro e F_{n-1} d'omologia.

« 8. Consideriamo il fascio di omografie subordinato fra due rette base di F_n, F'_n . Ad esso appartengono due omografie degeneri; i loro punti singolari sono i punti base delle due rette; se questi coincidono, le due omografie coincidono in una con un punto singolare doppio, questo caso corrisponde all'esistenza di punti base multipli.

« Un'omografia subordinata degenerare tra due rette base è data da un'omografia degenerare del dato fascio; per tal modo si ottengono le omografie degeneri del fascio.

« Se il fascio ha due $(n+1)$ goni di punti base $(1, 2, \dots, n+1), (1', 2', \dots, (n+1)')$; vi sono nel fascio $n+1$ omografie degeneri di caratteristica n coi rispettivi punti singolari $1, 2, \dots, n+1$.

« Se invece il fascio ha due gruppi di spazi di punti base semplici $F_{h_1-1}, \dots, F_{h_\sigma-1}; F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$, ($h_1 + \dots + h_\sigma = n+1$), consideriamo una retta base che si appoggia in 1, 2, ad F_{h_1-1}, F_{h_2-1} , e la corrispondente che si appoggia ad F'_{h_1-1}, F'_{h_2-1} in $1', 2'$: si ha un fascio di omografie subordinate fra le rette 12, $1'2'$, al quale appartiene un'omografia degenerare in cui il punto 1 è singolare e il punto 2 no; questa è data da un'omografia del dato fascio, degenerare, in cui ad $F_{h_2-1}, \dots, F_{h_\sigma-1}$ corrispondono rispettivamente $F'_{h_2-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$ e non appartengono punti singolari: in essa vi è un F'_{n-h} ($h \geq 1$) sostegno d'una Φ'_{h-1} singolare, contenente $F'_{h_2-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$ e non F'_{h_1-1} (poichè $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$ sono indipendenti), per cui tutti i punti di F_{h_1-1} sono singolari, cioè F_{h_1-1} è lo spazio singolare della detta omografia del fascio: vi son dunque nel fascio σ omo-

grafie degeneri di caratteristiche: $n - h_1 + 1, \dots, n - h_\sigma + 1$, cogli spazi singolari $F_{h_1-1}, \dots, F_{h_\sigma-1}$.

« Finalmente considerando il caso in cui i gruppi base hanno punti base multipli come caso limite del precedente, perveniamo al teorema:

« Un fascio di omografie tra F_n, F'_n di caratteristica:

$$[(h_{11} - 1, \dots, h_{1\rho_1} - 1) \dots (h_{\sigma 1} - 1, \dots, h_{\sigma\rho_\sigma} - 1)]$$

ha ρ_1 omografie degeneri coincidenti di caratteristiche

$$n - h_{11} + 1, \dots, n - h_{1\rho_1} + 1,$$

ρ_2 omografie degeneri coincidenti di caratteristiche

$$n - h_{21} + 1, \dots, n - h_{2\rho_2} + 1,$$

....., ρ_σ omografie degeneri coincidenti di caratteristiche

$$n - h_{\sigma 1} + 1, \dots, n - h_{\sigma\rho_\sigma} + 1;$$

e gli spazi singolari di queste omografie son quelli di punti base del 1° gruppo: fra gli spazi base determinati (1) da due corrispondenti spazi di punti base multipli di F_n, F'_n , sono individuate omografie subordinate degeneri, che hanno per spazi singolari multipli gli spazi di punti base del 1° gruppo».

(1) Predella, l. c.