
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libri XI-XIII

Zanichelli Bologna, 1935.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 - Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE
COLLEZIONE DIRETTA DA FEDERIGO ENRIQUES

PROMOSSA

DALL'ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE

N. 11.

GLI ELEMENTI D'EUCLIDE E LA CRITICA ANTICA E MODERNA

EDITI DA

FEDERIGO ENRIQUES

COL CONCORSO DI DIVERSI COLLABORATORI

LIBRI XI-XIII



BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

**L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI**

LIBRO UNDICESIMO

PER CURA DI

AMEDEO AGOSTINI

Con questo volume, che porta il N. 11 e fa seguito ai Num. 1, 8, 10 della medesima collezione, resta terminata la pubblicazione degli ELEMENTI d' EUCLIDE da noi intrapresa. Nonostante difetti e manchevolezze, io spero che l'opera possa riuscire sufficientemente allo scopo per cui fu disegnata, offrendo agli studiosi — e in particolare ai docenti delle scuole medie — in primo luogo una veduta storica riassuntiva dello sviluppo della geometria elementare attraverso i secoli, ed in secondo luogo un istrumento sicuro per educarli alla comprensione e alla critica dei testi.

Di qualunque successo che la pubblicazione possa avere e dei pregi che possano esserle riconosciuti, io debbo dar merito agli autori che hanno curato i singoli libri, e che pure hanno voluto accogliere uno spirito comune; mentre tocca a me la responsabilità dei difetti che non siamo riusciti ad evitare.

Ma oltre che agli autori dei singoli libri, mi piace esprimere la più viva gratitudine ad altri che in altro modo hanno collaborato con noi alla miglior riuscita dell'opera.

Nomino anzitutto la dott. Maria Teresa Zapelloni, oggi Maspero, che con gran cura e diligenza ha riveduto in generale la traduzione del testo greco, ed ha portato utili consigli a tutti i diversi volumi, e l'ing. Attilio Frajese, che — avendo approfondito lo studio della teoria dell'eguaglianza

dei triedri e poi delle dottrine d'Archimede sulle misure del cerchio e dei corpi rotondi — ha portato alla interpretazione e al commento dei libri XI e XII il più prezioso concorso.

Infine è doveroso per me di segnalare le indicazioni e i suggerimenti che i collaboratori di quest'opera hanno ricevuto dal collega Giovanni Vacca, il quale, con larga generosità, ha messo a disposizione di tutti i tesori della sua immensa erudizione.

Roma, Marzo 1936 XIII.

F. ENRIQUES

SVILUPPO STORICO DELLA GEOMETRIA SOLIDA

1. PLATONE (nella « Repubblica », 528 *b* e segg.) si duole del poco sviluppo che hanno avuto, ai suoi tempi, gli studi sulla stereometria:

« Sarebbe stato corretto dopo la seconda dimensione passare alla terza, cioè a quella dei corpi che hanno profondità. . . . Ma, o Socrate, pare che questa disciplina non sia stata ancora sviluppata . . . ».

E più oltre (528 *d*) dice che gli studi su tale argomento si trovano « in uno stato ridicolo, tantochè — in attesa che lo Stato ne promuova il progresso — val meglio saltare senz'altro dalla geometria piana all'astronomia ».

Questi apprezzamenti non debbono prendersi troppo alla lettera. È certo che già all'epoca di PLATONE i geometri greci avevano dovuto occuparsi della geometria solida: sia in rapporto all'Ottica e alla Prospettiva, di cui trattarono ANASSAGORA e il pittore AGATARCO; sia in rapporto alla ricerca dei volumi, poichè DEMOCRITO, e poi — in modo rigoroso — EUDOSSO, ebbero a determinare il volume della piramide, del cono e del cilindro; sia — finalmente — in rapporto al problema delico, di cui ARCHITA di Taranto ha dato la soluzione per mezzo di due superficie del 2° ordine che vengono intersecate con un toro. Le cognizioni elementari su piani e rette perpendicolari, che sono adoperate in tali soluzioni, mostrano appunto, che i principii della geometria solida avevano pur formato oggetto della riflessione dei geometri. Ma probabilmente questi studi non erano stati spinti innanzi in una maniera comparabile a ciò che avviene per le analoghe questioni della geometria piana, e l'insieme delle proprietà delle figure

solide era ben lungi dall'essere trattato in un ordine logico soddisfacente, come accade appunto per le figure piane.

Comunque si deve ritenere che lo studio della geometria solida abbia fatto progressi, dopo PLATONE, sia per gli scopi dell'astronomia, sia in relazione alla teoria delle coniche e allo studio dei poliedri regolari, per opera di MENECSMO e di ARISTEO.

EUCLIDE doveva dunque trovare innanzi a sè, non dico un corpo di dottrina perfezionato a somiglianza di quello che gli era offerto dai cultori della geometria piana, ma almeno un insieme di nozioni abbracciante i fatti fondamentali.

Egli stesso ha tentato di ordinare quest'insieme in una teoria razionale, la quale — pur restando notevolmente inferiore alla geometria piana — costituisce tuttavia un trattato di scienza non spregevole. Infatti, nonostante i difetti della costruzione logica e della redazione, questi libri euclidei contengono sostanzialmente tutto ciò che occorre per uno sviluppo completo della geometria solida, e perciò rimarranno durante lunghi secoli, e — si può dire — fino alla fine del secolo XVIII, il testo geometrico modello della stereometria.

2. Il libro XI ha inizio con 28 termini (definizioni) e contiene 39 proposizioni. Le proposizioni 1, 2, 3, sono dei tentativi di dimostrazione delle proprietà caratteristiche del piano, cui seguono (prop. 4-19) le dimostrazioni di proprietà e la risoluzione di problemi sul parallelismo e sulla perpendicolarità di rette e piani. Le proposizioni 20-23, 26, 35 riguardano proprietà e problemi degli angoloidi, mentre tutte le altre proposizioni sono dedicate ai parallelepipedi e, in particolare, ai parallelepipedi simili.

Il XII libro contiene i risultati di EUDOSSO ed è caratterizzato dall'uso del metodo di esaurimento che viene applicato nelle proposizioni 2, 3, 4, 10, 11, 12, 16, 17, 18. Dopo avere stabilito (prop. 1, 2) che i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri, servendosi delle proposizioni 3-6, viene dimostrato (prop. 7) il teorema di DEMOCRITO-EUDOSSO sul volume della piramide (eguale a un terzo del prisma d'egual base ed altezza). Nelle proposizioni 8 e 9 si confrontano tra loro le piramidi per giungere, nella 10^a, a trovare il volume del cono e quindi (11-15) a confrontare coni e

cilindri qualunque. Le proposizioni 16 e 17 sono dei lemmi per poter dimostrare nell'ultima proposizione del libro (18^a) che le sfere stanno fra loro come i cubi dei rispettivi diametri.

Il libro XIII non sarebbe che un riassunto dell'opera di ARISTEO ⁽¹⁾ ed ha lo scopo di risolvere il problema dell'iscrizione in una sfera dei cinque poliedri regolari. La risoluzione delle questioni è data nelle prop. 13-17 cui sono premesse proposizioni sulla sezione aurea di un segmento (prop. 1-6), sulle relazioni tra i lati del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari inscritti nello stesso cerchio (prop. 7-10) e sulla natura come irrazionalità del lato del pentagono regolare (prop. 11). Nella 18^a ed ultima proposizione del libro viene dato il rapporto tra i lati dei poliedri regolari inscritti nella stessa sfera.

Lo schema con cui in questi libri, come nei precedenti, viene esposto ogni teorema o problema, è uniforme. All'enunciato (*protasi*) fanno seguito, quando occorra, le condizioni da imporsi ai dati, quindi viene ripetuto l'enunciato sulla figura (*ectesi*). Vengono poscia costruite tutte le linee e tutti i piani occorrenti per la dimostrazione, la quale è sempre chiusa con la enunciazione della protasi o della ectesi. Ogni proposizione termina colle parole ὅπερ ἔδει δεῖξαι (come dovevasi dimostrare), se si tratta di un teorema, o colle parole ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (come dovevasi fare), se si tratta di un problema.

3. Abbiamo accennato che i libri solidi sono i più difettosi tra i libri del grande alessandrino. Non sarà male indicare qui, per potere meglio seguire lo sviluppo posteriore della geometria solida, le principali manchevolezze, che sono state segnalate dai critici, specie dal punto di vista logico.

Come vedremo, la critica veramente fattiva ha inizio cogli appunti mossi alle definizioni 9 e 10 sulla similitudine e sull'eguaglianza delle figure poliedriche, dove l'A. ha verosimilmente una intuizione giusta dei fatti e con somma abilità riesce ad evitare enunciati propriamente erronei, sebbene tuttavia non pervenga a

(1) P. TANNERY, *Géométrie grecque*, Paris 1887, p. 159.

tradurre i fatti medesimi in termini logici, analizzando precisamente ciò che essi importano e dimostrando che sono contenuti come conseguenze nelle definizioni assunte.

Difetto generale del libro XI è quello di mancare di non poche cognizioni, come — ad esempio — il parallelismo di retta e piano, che pur dovevano essere sicuramente note ai matematici greci di quell'epoca. Alcuni studiosi ⁽¹⁾ spiegano la cosa ritenendo che EUCLIDE abbia compilato il suo libro coll'intento di radunare non tutte le proprietà note, ma soltanto quelle che stanno a base dei confronti di volume cui si riferisce il libro XII, o che servono per lo studio dei poliedri regolari cui è dedicato il libro XIII.

Alcune manchevolezze del libro XI dipendono dal difetto di altre definizioni, come quella ambigua che viene data del piano; è ovvio che su tale base non potessero avere successo i tentativi che l'A. svolge nelle prime proposizioni per dimostrare la proprietà fondamentale che il piano contiene la retta che ne congiunga due punti arbitrari.

Questi difetti della parte introduttoria della geometria solida, e qualche altro minore su cui non c'indugeremo, non tolgono alla precisione logica della stereometria propriamente detta, che viene esposta nel libro XII, seguendo lo schema rigoroso del metodo di esaurimento di EUDOSSO. Qualcuna delle dimostrazioni che qui s'incontrano appare ancora un modello d'eleganza: ciò si può dire della dimostrazione del teorema che la piramide è un terzo del prisma di egual base ed altezza, la quale merita ancora di essere richiamata accanto alle dimostrazioni moderne, e forse — in taluni ordini di scuole — potrebbe essere preferita a queste.

Dal punto di vista dell'ordine, un lettore moderno può dispiacersi di trovare proposizioni di geometria piana (proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri) intercalate in un libro che è, per resto, tutto dedicato alla solida. Ma qui, come in altre parti dell'opera, l'ordine delle dimostrazioni euclidee risponde, non già all'oggetto preso in esame, bensì alla concatenazione logica delle proposizioni, e quindi al metodo adoperato per dimostrarle.

⁽¹⁾ Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, 1914, p. 235.

4. La teoria della misura dei solidi elementari non è completa negli Elementi euclidei, giacchè rimane una lacuna concernente le superficie laterali del cilindro e del cono circolare, e poi il volume e la superficie della sfera. Questa lacuna è stata colmata da ARCHIMEDE (circa 287-212 a. C.) nei libri « *Su la sfera e il cilindro* » (1).

Da un altro punto di vista appare una manchevolezza dell'EUCLIDE: l'assenza di ogni proposizione relativa alla geometria sopra la sfera, cioè alle figure tracciate su di essa. Non è da credere che tali nozioni fossero affatto ignote ai geometri greci; sembra piuttosto che essi le ritenessero pertinenti ad un ramo della scienza che uscirebbe dal campo degli Elementi, costituendo una introduzione alla Astronomia col nome di *σφαιρική* (Sferica).

Si hanno infatti notizie di una *Sferica* compilata da autore pre-euclideo non bene individuato, e di una *Sferica* dovuta ad AUTOLICO da Pitane (circa 300 a. C.), ma nulla si sa sul loro contenuto e sulla loro estensione. Ci sono invece giunte le Sferiche compilate da TEODOSIO (II sec. a. C.) e da MENELAO (I sec. d. C.). La sferica di TEODOSIO contiene un numero limitato di proprietà della sfera, mentre in quella di MENELAO troviamo trattati per la prima volta i triangoli sferici, e dimostrate le proprietà di questi analoghe a quelle dei triangoli piani, coi sei casi di uguaglianza.

Alcuni passi di PROCLO permettono di inferire (2) che APOLLONIO di Perga (circa 265-170 a. C.) non ritenne che EUCLIDE avesse raggiunto la massima perfezione nell'ordinamento logico degli *Elementi* e ne tentò una nuova redazione seguendo una via che, dopo tanti secoli, fu percorsa dai moderni ricostruttori logici della Geometria elementare. Pur non alterando sostanzialmente l'ordine delle proposizioni euclidee, APOLLONIO premetteva ad esse un preambolo sulle definizioni degli enti geometrici e sui postulati da ammettere, in modo che le nozioni volgari ed intuitive tro-

(1) *Oeuvres complètes d'Archimède*, trad. P. VER ECKE, Paris 1921, p. 3, 126.

(2) P. TANNERY, *Quelques fragments d'Apollonius de Perge*, *Mém. scient.*, I, Paris 1912, p. 124-138.

vassero la loro rispondenza nell'esattezza logica dei concetti matematici.

APOLLONIO scrisse anche sul confronto tra il dodecaedro e l'icosaedro: un libretto che si è perduto, ma che ispirò IPSICLE (II s. a. C.) a compilare quei complementi sui poliedri che la quasi totalità degli editori fece seguire, come libro XIV, ai libri genuini di EUCLIDE.

5. Nel periodo argenteo della scuola alessandrina sono scarsi i contributi all'incremento della geometria solida. Ricorderemo una collezione di definizioni di varia origine, alle volte preferibili logicamente a quelle euclidee, altre volte inesatte, dovuta ad ERONE (I o II sec. d. C.), il quale nell'opera *μετρικά* ⁽¹⁾ raccolse le regole pel calcolo dei volumi dei solidi elementari, compresi i poliedri regolari.

Alcune proprietà, forse note anche anteriormente, e che dall'inizio del secolo scorso non mancano in ogni trattazione razionale della geometria solida, sono riferite da PAPPO (III sec. d. C.) nel IV libro delle sue *Collezioni matematiche*. Esse sono:

1) il cosiddetto *teorema delle tre perpendicolari*;

2) l'angolo che la retta forma con un piano è il minimo angolo che la retta forma colle rette del piano passanti pel punto di intersezione;

3) due rette di un piano ugualmente inclinate sulla proiezione di una retta incidente il piano, formano con questa angoli uguali.

Con questi risultati ⁽²⁾ si può asserire che, per il contenuto delle conoscenze, i Greci ci hanno tramandato la geometria dello spazio completa, e dovranno trascorrere numerosi secoli prima che i principi fondamentali su cui è costruita ricevano un assetto logico rigo-

(1) *Opera*, III, IV, V, Leipzig 1908, 1912, 1914.

(2) Sono da ricordare anche gli anonimi compilatori delle varie parti in cui può dividersi il contenuto di quel libro, che molti editori danno come XV libro degli *Elementi*, contenente complementi di non grande importanza alla teoria dei poliedri.

roso e prima che lo schema di proposizioni euclideo venga alterato, riordinato e completato; giacchè non ne alterarono profondamente l'ordine e non aggiunsero nulla di sostanziale i numerosi scolii e le varianti alle dimostrazioni, dovuti ad anonimi autori greci e bizantini della decadenza, che ci sono pervenuti attraverso le varie trascrizioni e che sono stati sapientemente raccolti dall'HEIBERG nell'edizione critica dell'EUCLIDE.

Gli Arabi, che tanto incremento diedero ad altri rami delle matematiche, poco di nuovo portarono alla geometria solida; citeremo solo lo studio di ABU'L WAFÀ (940-998) sulla determinazione dei vertici dei poliedri regolari inscritti in una sfera e il contributo di NASIR EDDÏN alla geometria della sfera (cfr. nota alla XI, 26).

La divulgazione in Occidente dell'EUCLIDE si può fare incominciare con LEONARDO FIBONACCI il quale nella *Practica geometriae* (1220) ⁽¹⁾ riportò l'enunciato delle proposizioni euclidee, intercalate alle nozioni e ai problemi di geometria pratica. Se è presumibile che FIBONACCI deducesse le proposizioni euclidee dall'arabo, ben presto, però, col risveglio degli studi classici, l'opera fu conosciuta nella lingua originale e tradotta in varie lingue. I numerosi commentatori ed editori di EUCLIDE, che si susseguirono dalla invenzione della stampa alla metà del XVII sec., lasciarono inalterata la compagine euclidea aggiungendo talvolta accanto ad antichi scolii, osservazioni originali o corollari non sempre privi di interesse.

6. Una notevole modificazione al XII libro è segnata dagli *Elementa geometriae planae ac solidae* (Antverpiae, 1654) di ANDREA TACQUET (1612-1660). Il concetto di limite, che già con LUCA VALERIO (1553-1618) incomincia apertamente ad introdursi nelle matematiche, viene da TACQUET applicato alla stereometria.

Infatti, oltre a semplificare alcune dimostrazioni dell'XI libro, onde ridurre la prolissità delle dimostrazioni del XII, che *discentibus*

(1) LEONARDO PISANO, *Practica geometriae*, ed. Boncompagni, Roma 1862.

terrori esse solent, TACQUET bandisce il metodo di esaurimento e ammette il principio:

Le grandezze inscritte o circoscritte ad una figura, ossia minori o maggiori della figura, si dice che *tendono* alla figura quando possono differire da essa di una quantità minore di qualunque quantità data, per quanto piccola.

Con ciò il TACQUET, dimostrato che piramidi di ugual altezza stanno tra loro come le basi (XII, 5) ricorrendo al metodo degli scaloidi inscritti e circoscritti che rammenta procedimenti archimedei, può tralasciare alcune proposizioni euclidee e giungere sollecitamente alla dimostrazione dei teoremi di DEMOCRITO-EUDOSSO sul volume della piramide e del cono.

Il principio introdotto dal TACQUET nel suo libro, che ebbe anche edizioni italiane, non trovò molti seguaci o miglioratori, come li trovarono i procedimenti instaurati da BONAVENTURA CAVALIERI (1598? - 1647) un decennio prima di TACQUET. Nella *Geometria Indivisibilium* (Bologna, 1635), CAVALIERI dà (dopo MAUROLICO) una definizione generale della similitudine per figure anche non limitate da linee rette e da piani e, stabilito che due solidi simili stanno tra loro come i cubi di linee omologhe che appartengano a sezioni omologhe dei solidi, ne deduce tutti i rapporti tra i solidi elementari col metodo degli indivisibili; e questi rapporti deduce poi nuovamente col noto principio che porta il suo nome e che si trova tuttora usato in qualche testo scolastico:

Le due figure solide sono comprese tra piani paralleli e se le sezioni fatte con piani paralleli ai precedenti stanno in un rapporto costante, i due solidi stanno nello stesso rapporto.

7. I contributi di TACQUET e di CAVALIERI riguardano più il metodo di dimostrazione che il riordinamento logico e critico della geometria spaziale. Per trovare i primi attacchi all'edificio logico costruito dai Greci occorre giungere all'edizione dell'EUCLIDE di ROBERT SIMSON (1687-1768) ⁽¹⁾. Tra le osservazioni del SIMSON

(¹) *Euclidis elementorum libri etc.*, Glasgow 1756.

la più notevole è quella sulle definizioni 9 e 10 di figure solide simili ed uguali, definizioni che però restano giuste qualora si limitino a solidi possedenti solo angoli triedri. SIMSON modifica la 9^a definizione, sopprime la 10^a e aggiunge all'Euclide tre proposizioni per dimostrare l'uguaglianza dei diedri nei triedri aventi uguali le facce (e il verso), e dei solidi aventi solo triedri e racchiusi da ugual numero di figure piane uguali e similmente poste.

Frattanto, in Italia, ANTONIO LECCHI (1702-1776) bandisce le prime proposizioni dell'XI libro e, in un trattato ispirato al libro del TACQUET (¹), assume come assiomi le proprietà caratteristiche del piano: una retta avente un punto comune col piano o ha solo quel punto comune col piano o giace tutta nel piano; per una retta passano infiniti piani; ogni triangolo sta in un piano.

Mentre in Inghilterra e in Italia si avevano i primi accenni ad una ricostruzione logica dell'EUCLIDE, in Francia si facevano valere più fortemente le esigenze dell'insegnamento tecnico: A. CL. CLAIRAUT nel 1741 pubblicava quegli *Éléments de géométrie* che costituiscono il primo trattato di geometria intuitiva. Nella prefazione di tale opera, scritta per la istruzione della marchesa DU CHÂTELET, si legge: « Ce géomètre (EUCLIDE) avoit à convaincre des sophistes obstinés, qui se faisoient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes; il falloit donc qu'alors la Géométrie eut, comme la Logique, le secours des raisonnemens en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et à dégoûter les Lecteurs ».

Nel libro di CLAIRAUT non si trova alcuna definizione di piano e non si trova cenno delle sue proprietà caratteristiche, che vengono quindi sottintese come nozioni note e primitive. Ad esempio del suo modo di spiegare rapido ed intuitivo, ricordiamo come l'A. trovi che il volume della piramide è un terzo di quello del prisma

(¹) *Elementa geometriæ theoreticæ ac practicæ*, II, Milano 1754. Ebbe anche un'edizione tedesca a Colonia nel 1788.

d'egual base ed altezza: egli ricorre per ciò alla decomposizione del cubo in 6 piramidi proiettanti le sue facce dal centro. L'eguaglianza delle piramidi d'egual base ed altezza è qui presupposta, giustificandosi col principio di CAVALIERI.

8. Verso la fine del XVIII secolo lo spirito innovatore e riordinatore della geometria va ormai prendendo piede e a ciò contribuiscono anche le idee esposte da D'ALEMBERT nell'« Enciclopedia », ove caldeggia, tra l'altro, una completa separazione tra la geometria piana e la geometria solida. Tra gli autori che maggiormente contribuiscono a sviluppare il corpo delle dottrine geometriche sono da noverare LOUIS BERTRAND (1731-1812) e A. M. LEGENDRE (1752-1833).

L. BERTRAND assume nel suo trattato ⁽¹⁾ la definizione leibniziana del piano, e pur tentando ancora di dimostrare l'assioma fondamentale che ogni retta avente a comune col piano due punti giace tutta su di esso, aumenta il numero delle nozioni della geometria dello spazio: introducendo, tra l'altro, le proprietà delle oblique; definendo il diedro e l'angoloide non come modi di essere dei piani e delle rette, ma come porzioni di spazio; enunciando e dimostrando, per la prima volta in un trattato, i sei criteri d'eguaglianza dei triedri; introducendo la considerazione delle piramidi regolari e i primi elementi della geometria della sfera. È notevole poi che la similitudine vien definita riducendosi all'omotetia, come già aveva fatto MAUROLICO: Due corpi sono simili se sono simili le sezioni omologhe fatte con piani passanti per uno stesso punto (centre de description). In base a tale definizione il BERTRAND dimostra che due poliedri simili hanno un ugual numero di facce uguali e gli angoloidi omologhi congruenti, e la proprietà reciproca.

Il libro del LEGENDRE ⁽²⁾ riporta, in parte, i miglioramenti dovuti al BERTRAND, semplifica varie dimostrazioni introducendo il teorema

(1) L. BERTRAND, *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, Ginevra 1778.

(2) A. L. LEGENDRE, *Éléments de géométrie* Paris 1794.

delle tre perpendicolari (teorema che si trova già enunciato, ma non sfruttato, in un trattato di M. CAMUS ⁽¹⁾) e introduce, forse per la prima volta, la nozione di minima distanza tra due rette sghembe. Ma il maggior contributo di LEGENDRE è dato dalla considerazione della uguaglianza inversa ⁽²⁾ e dall'aver preparato il terreno a CAUCHY per la dimostrazione del noto teorema sull'uguaglianza dei poliedri convessi.

Mentre il libro del BERTRAND ebbe scarsa divulgazione, quello del LEGENDRE ebbe grande diffusione e influì grandemente a cambiare le opinioni sull'insegnamento geometrico, già scosse dall'esempio di CLAIRAUT, come contribuì ad allontanarlo dall'antica purezza, perchè non sempre LEGENDRE ha lo stesso rigore di dimostrazione che si riscontra in EUCLIDE e perchè egli ama adoperare il calcolo aritmetico per dimostrare proprietà, che poche argomentazioni sintetiche avrebbero provato in modo più proprio e diretto.

9. Ormai colle opere del BERTRAND e del LEGENDRE erano state aggiunte alla trattazione della geometria solida tutte quelle nozioni che difettavano nella classica opera. Mancava ancora l'assestamento logico generale di tutta la geometria e la distinzione dell'equivalenza dalla uguaglianza intesa come congruenza.

Questo è il compito che è stato assolto dalla critica del secolo decimonono, intorno a cui lo studioso può essere sufficientemente informato dalle « Questioni riguardanti le matematiche elementari » raccolte e coordinate da F. ENRIQUES. Le note che accompagnano le proposizioni del nostro testo varranno a ricordare più precisamente alcuni dei progressi che ne conseguono nelle esposizioni moderne degli elementi della geometria solida.

⁽¹⁾ M. CAMUS, *Cours de mathématique*, II, Paris 1750, p. 318.

⁽²⁾ Per la prima volta messa in luce da SEGNER (1741): cfr. A. FRAJESE « La teoria dell'eguaglianza dei triedri nel suo sviluppo storico » in *Periodico di Mat.*, 1934.

Termini.

1.

Solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e altezza.

È la definizione diventata tradizionale nella scienza greca e che si riscontra in parecchi passi di PLATONE (Sofista 235 D; Leggi 817 E), ARISTOTELE e TEONE DI SMIRNE (pag. III, 19, ed. HILLER).

Più precisamente ARISTOTELE dà come definizione di corpo « ciò che ha tre dimensioni » (Topica VI, 5, 142 b. 24; De caelo, I, I, 268 b. 6), distinguendo sei dimensioni, divisibili in tre coppie di dimensioni opposte « alto e basso, avanti e indietro, destra e sinistra »; riconosce però come queste dimensioni siano permutabili tra loro, per la relatività, a due a due e quindi riducibili a tre (Fisica VI, I, 208 b, 13 e segg.). In altra parte però ARISTOTELE addita la sola terza dimensione, l'altezza, a caratterizzare il corpo solido, in modo che l'uso di tale termine presuppone la cognizione delle altre dimensioni; infatti egli dice (Metafisica 1020 a, 13, 11): « lunghezza è la linea, larghezza la superficie e altezza il corpo ».

ERONE poi (def. 13) riproduce tanto la definizione euclidea quanto la aristotelica.

2.

Termine del solido è la superficie.

Qui la superficie è definita attraverso il solido: così fa anche ARISTOTELE in Met. 1060 b, 15, ove dice che « le superficie sono le divisioni dei corpi ». Ma in un altro punto (Met. 1066 b, 23) lo stesso ARISTOTELE chiama solido « ciò che è limitato da superficie ».

Invece ERONE definisce (def. 13): « Ogni solido è limitato da superficie ed è generato da una superficie che si muove a partire da una certa posizione in una determinata direzione », generalizzando in tal modo a tutti i solidi la generazione, mediante il movimento, dei corpi rotondi.

3.

Una retta è perpendicolare ad un piano quando forma angoli retti con tutte le rette che, intersecandola, stanno nel piano.

Le condizioni qui espresse sono sovrabbondanti: ciò che basta per accertare la perpendicolarità di una retta ad un piano verrà stabilito in XI, 4, proposizione che viene a giustificare questa definizione e alla quale si riattacca la nota definizione del piano attribuita a FOURIER: *si chiama piano la superficie costituita dalla totalità delle rette che, passando per uno stesso punto di una retta dello spazio, sono ad essa perpendicolari.*

4.

Un piano è perpendicolare ad un altro quando le rette condotte sopra uno dei piani, perpendicolari alla loro comune intersezione, sono perpendicolari all'altro piano.

In questa definizione, e nella 6^a, EUCLIDE parla di comune intersezione di due piani senza dire che cosa essa sia: dimostrerà che è una retta solo in XI, 3.

5.

Se da un punto di una retta che interseca un piano si conduce la perpendicolare al piano e dal punto così trovato si traccia la retta che va al punto d'intersezione della

retta data col piano, l'angolo formato dalla retta data e da quella tracciata si dice inclinazione della retta sul piano.

Più brevemente, ora si suole dire che l'inclinazione di una retta sopra un piano è l'angolo che la retta fa colla sua proiezione ortogonale sul piano. Anzi, nei libri di testo moderni, si suole anche dimostrare che tale angolo è minimo rispetto all'angolo che la retta forma con qualunque altra retta che giaccia nel piano e passi pel punto d'intersezione della retta. Questa proprietà che si trova già in PAPPO, fu di nuovo introdotta da L. BERTRAND nel *Développement de la partie élémentaire des mathématiques*, II, Ginevra 1778.

6.

Inclinazione di un piano sopra un piano è l'angolo acuto compreso tra le perpendicolari, condotte in ciascuno dei piani, ad uno stesso punto della comune intersezione.

L'inclinazione di due piani qui definita da EUCLIDE, corrisponde a ciò che oggi si chiama *sezione normale*, o *angolo rettilineo del diedro*. Risulterà dalla prop. 10 che tutte le sezioni normali di un diedro sono eguali.

EUCLIDE non definisce ciò che oggi si chiama angolo diedro (più avanti definirà l'angolo solido, ossia l'angoloide), ma solamente la sua misura.

La definizione del diedro come porzione di spazio è data da L. BERTRAND (*Développement* etc. citato nella nota precedente) che chiama *angle solide simple* la porzione di spazio limitata da due semipiani aventi in comune l'origine. Egli assume come misura del diedro la sua sezione normale e giustifica tale assunzione mostrando che:

1) l'angolo è lo stesso qualunque sia il punto della costola nel quale si fa la sezione;

2) la sezione normale di un diedro somma di due o più diedri è uguale alla somma delle sezioni normali di questi;

3) i diedri stanno tra loro come le rispettive sezioni normali.

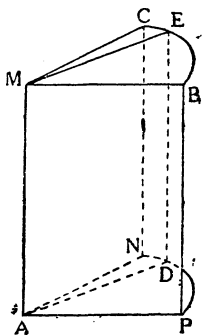
Il BERTRAND è seguito da LEGENDRE (*Elémens de géométrie*, lib. V, prop. 17) il quale giustifica la misura assunta dimostrando che:

1) *l'angolo è lo stesso qualunque sia il punto della intersezione dei due piani in cui si conducono le due perpendicolari;*

2) *se si aumenta o si diminuisce in un certo rapporto l'angolo diedro, anche l'angolo che lo misura aumenta o diminuisce nello stesso rapporto.*

La dimostrazione di LEGENDRE di queste due proprietà è condotta nel seguente modo:

1) Se PAN è una sezione normale del diedro, si prenda un altro punto M della costola e si faccia la sezione normale BMC . Poichè MB e AP sono perpendicolari ad una stessa retta AM , esse sono parallele tra loro. Per la stessa ragione MC è parallela ad AN . Dunque l'angolo BMC è uguale all'angolo PAN .



2) Nel piano PAN si descriva, con centro A e raggio qualunque, l'arco PDN e con raggio uguale e centro M si descriva nel piano BMC l'arco BEC : si tracci poi la retta AD . I due piani PAN , BMC , essendo perpendicolari ad una stessa retta AM , saranno paralleli e perciò le intersezioni AD , ME di questi due

piani col terzo piano MAD sono parallele e l'angolo BME è uguale a \widehat{PAD} .

Se $\widehat{PAD} = \widehat{DAN}$, il diedro ⁽¹⁾ $PAMD$ è evidentemente uguale al diedro $DAMN$, poichè la base PAD si sovrappone esattamente alla sua uguale DAN e lo spigolo è lo stesso. Si vede ugualmente che se l'angolo PAD è contenuto esattamente un numero intero di volte nell'angolo PAN , il diedro $PAMD$ è contenuto altrettante volte nel diedro $PAMN$.

Nel caso che i due angoli siano incommensurabili LEGENDRE si riferisce al metodo usato in una proposizione corrispondente alla VI, 1 di EUCLIDE.

I testi scolastici moderni si limitano spesso a dimostrare solamente la prima parte, tralasciando la seconda e definiscono quindi come *uguali* due diedri aventi sezioni normali uguali.

Della prima proprietà, che si trova già dimostrata negli *Elementi di geometria* (Bologna, 1755) di EUSTACHIO MANFREDI, riporteremo una dimostrazione di ENRIQUES-AMALDI, indipendente dal parallelismo, nella nota alla proposizione XI, 10.

7.

Si dice che un piano è similmente inclinato rispetto ad un secondo, come un terzo piano ad un quarto, quando gli angoli di inclinazione che abbiamo definito sono uguali tra di loro.

8.

Piani paralleli sono quelli che non hanno intersezione.

Notiamo che abbiamo tradotto con « che non hanno intersezione » la parola $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omicron\tau\chi$, termine adottato più tardi a indicare gli asintoti di una curva.

(1) In luogo del vocabolo diedro, oggi usato, LEGENDRE propone ed usa il vocabolo *coin*.

9.

Figure solide sono simili quando sono racchiuse da un ugual numero di piani simili ed uguali.

EUCLIDE usa sempre la parola ἐπίπεδον, indicante propriamente il piano illimitato, anche per indicare una figura piana limitante un solido. Noi tradurremo sempre tale parola con « piano »: riuscirà facile al lettore comprendere se si tratti di un piano, o di una faccia di un solido.

10.

Figure solide sono uguali e simili, se sono racchiuse da un ugual numero di piani simili ed uguali.

Di poco variano le definizioni di ERONE, che sembra introducano soltanto una precisazione riguardante la disposizione delle facce:

Sono figure solide simili quelle racchiuse da piani simili e similmente posti;

Sono figure solide uguali quelle racchiuse da piani ugualmente e similmente posti, uguali per numero e per grandezza.

Trattasi di una precisazione dello stesso genere di quella che vedremo nella XI, 27.

Il concetto della similitudine, e in particolare della uguaglianza, delle figure solide risponde ad un contenuto intuitivo che EUCLIDE ed ERONE hanno cercato di precisare con le loro definizioni di cui fra poco faremo la critica.

Il concetto più generale della similitudine delle figure solide (e in particolare poliedriche) si trova bene spiegato da F. MAUROLICO (*De sphaera liber unus*, 1575, *Geometrica principia*, pag. 5), riducendosi col movimento all'omotetia. In particolare, resta così

precisato anche il significato dell'uguaglianza delle figure solide, la quale conduce a distinguere :

1) l'uguaglianza propria, o *diretta* (congruenza), cioè la sovrapposibilità col movimento ;

2) l'uguaglianza inversa, o *simmetria*, cioè la possibilità di sovrapporre una delle due figure alla simmetrica dell'altra rispetto ad un punto, o ad un piano.

Non risulta da affermazioni esplicite che i Greci abbiano considerato questa seconda specie di uguaglianza, rilevando che le figure differiscono qui soltanto per il verso degli angoli solidi corrispondenti. Tuttavia essi non possono averlo ignorato, e sebbene il giudizio rimanga incerto per quanto riguarda EUCLIDE, su ciò non v'è dubbio per MENELAO, il quale nella *Sferica* sviluppa i criteri d'uguaglianza dei triangoli sferici senza mai ricorrere al movimento ed enunciando sempre l'uguaglianza di lati e di angoli, anzichè di triangoli.

Il rilievo esplicito del verso dei triedri (e quindi la distinzione dell'uguaglianza diretta da quella inversa) si trova tra i moderni in J. A. SEGNER (1741) e poi nel trattato scolastico di LEGENDRE alla fine del sec. XVIII ecc. (cfr. A. FRAJESE, l. c. Period. mat., 1934).

Vediamo ora come sia proceduta la critica dei commentatori in ordine alle definizioni euclidee.

A proposito della definizione 9, SIMSON osserva che nel piano si definisce la similitudine delle figure mediante l'uguaglianza degli angoli e la proporzionalità dei lati racchiudenti angoli uguali, e che dalla sola proporzionalità dei lati, o dalla sola uguaglianza degli angoli, non segue la similitudine delle figure, a meno che non si tratti di triangoli. Analogamente, egli dice, sono figure solide simili quelle formate da angoli solidi uguali e racchiuse da figure piane simili e uguali in numero. In base a tale osservazione, SIMSON dà come 9^a la definizione di angolo solido (term. 11), sopprime (come lo vedremo fra breve) la def. 10^a e porta come 11^a la seguente definizione di solidi simili: *Sono figure solide simili quelle che hanno uguali angoli solidi e che sono contenute da uno stesso numero di piani simili*, ritenendo egli che la lezione comunemente accettata non fosse esente da contaminazioni di inesperti copisti.

il giro completo del poligono si hanno almeno quattro variazioni di segno.

Queste proprietà sono facilmente trasportabili agli angoloidi aventi più di tre spigoli, poichè, se con centro nel vertice di un angoloide si descrive una sfera di raggio qualunque, i punti di intersezione degli spigoli colla sfera determinano su questa i vertici di un poligono sferico. Per mezzo di queste proprietà e del teorema di EULERO sui poliedri (cfr. la nota al principio del libro XIII) è possibile la dimostrazione del teorema sopra riportato.

Col teorema di CAUCHY, dunque, è messo in chiaro che, esclusi i poliedri concavi, due poliedri risultano uguali se sono racchiusi da facce uguali e similmente ordinate.

Molte proposizioni di questo libro e del seguente sono fondate sulle definizioni 9 e 10; quindi si potrebbe obiettare che per la deficienza di queste definizioni, molte dimostrazioni euclidee relative allo spazio non siano rigorose. Si può però rispondere a tale obiezione osservando che EUCLIDE, nei suoi Elementi, dimostra l'uguaglianza, o la similitudine, di figure solide costituite solamente di triedri, e ad EUCLIDE è noto che se due triedri hanno le facce uguali essi sono uguali (cfr. la nota alla XI, 26). Ora, in questa ipotesi, se i poliedri hanno le facce omologhe uguali, risulta che hanno uguali anche gli angoli solidi (triedri) omologhi e quindi sono evidentemente uguali, perchè sovrapponibili, o per lo meno perchè l'uno è il simmetrico dell'altro. Le definizioni 9 e 10 si possono ritenere perciò valide qualora si tratti di solidi, come i prismi e le piramidi, aventi solo angoli triedri, ovvero tutti angoli triedri meno uno, che sono i solidi generalmente considerati da EUCLIDE. Cadono così le recriminazioni di inesattezza lanciate da SIMSON ad EUCLIDE ed ai suoi commentatori.

11.

Angolo solido di più di due rette intersecantisi in un punto e non poste in uno stesso piano è l'inclinazione di tutte le rette.

Altrimenti: *Angolo solido* è ciò che è racchiuso da più di due angoli piani non giacenti nello stesso piano e aventi lo stesso vertice.

L'HEIBERG ritiene che la prima definizione, che si allontana dal modo di dire di EUCLIDE, sia stata desunta da Elementi più antichi, mentre la seconda ripeterebbe i concetti esposti da PLATONE nel *Timeo*.

Uno scoliasta avverte che la definizione euclidea è incompleta, poichè non rientrerebbero in essa l'angolo solido determinato da un quarto di sfera, che è racchiuso da due superficie piane e da una superficie curva, e neppure l'angolo solido determinato, al vertice, da una superficie conica. E invero le osservazioni dello scoliasta sono state precedute da tentativi di dare una definizione più ampia di angolo solido e tale da includere i casi ora citati. Infatti APOLLONIO considera l'angolo solido come ciò che *in un punto di una superficie, o solido, è contenuto sotto una linea spezzata, o superficie*. ERONE invece dice che *in generale un angolo solido è ciò che è contenuto da una superficie che ha, rispetto ad un punto, la sua concavità in una stessa direzione*.

È certo però che qui EUCLIDE intende parlare solamente dell'*angoloide formato da piani e convesso*, il solo che considererà in seguito.

Questo angoloide riesce bene definito come parte dello spazio (interferenza di diedri) secondo BERTRAND (cfr. nota alla def. 6), ovvero come un insieme di raggi della stella (VERONESE).

Uno studioso moderno si sorprenderà che EUCLIDE non faccia seguito alla def. 11, definendo l'uguaglianza degli angoloidi. Tuttavia si può affermare che questo concetto non manca all'autore degli Elementi, che nella prop. 26 conclude anzi all'uguaglianza di due triedri dimostrando semplicemente l'uguaglianza delle loro facce. Per chi tenga presente l'analogia col concetto primitivo della uguaglianza (o meglio similitudine) degli angoli, siccome appartenenti a

triangoli simili, è lecito ritenere che EUCLIDE riducesse mentalmente il confronto degli angoloidi a quello delle piramidi, ottenute staccando sugli spigoli di essi dei segmenti proporzionali, ovvero uguali; e così che l'uguaglianza (o somiglianza) degli angoloidi dipenda per lui essenzialmente dalla def. 9. A conferma di questa interpretazione si può citare, in primo luogo la prop. 23, e poi le 26 e 35 di questo libro.

La prop. 23 offre la costruzione del triedro, dati i tre angoli che ne costituiscono le facce, e subordinatamente alle disuguaglianze che ne assicurano l'esistenza. L'univocità della costruzione (che conduce a due tetraedri simmetrici, aventi tutti gli elementi uguali, costruiti sopra la stessa base) mette bene in evidenza come il triedro (a parte la questione del verso che l'autore non si ferma ad osservare) sia bene determinato dalle facce, e quindi giustifica — si può dire — il criterio fondamentale dell'uguaglianza dei triedri desunto dalla uguaglianza delle facce a cui l'autore si riconduce nella prop. 26. Nella prop. 35 EUCLIDE dimostra poi che gli spigoli di due triedri con facce uguali sono ugualmente inclinati sopra le facce opposte. Non si vede invece esplicitamente rilevata l'uguaglianza dei diedri, che tuttavia seguirebbe facilmente di qua (LEGENDRE).

12.

Piramide è la figura solida racchiusa da piani che, da un piano, concorrono ad un punto.

Tra le varie definizioni di piramide che si sono date, ricorderemo quella di ERONE: *La piramide è la figura che si ottiene unendo insieme per un vertice dei triangoli posti sopra una base triangolare, quadrilatera, o poligonale, cioè rettilinea.* Alla quale si riattacca la definizione seguente dovuta a CLAIRAUT:

Piramide è il solido che si ha quando più triangoli partono da uno stesso punto e terminano ai differenti lati di uno stesso poligono.

La definizione di piramide si suole ora far dipendere (cfr. per es. ENRIQUES e AMALDI) dal concetto di angoloide, considerando la piramide come l'insieme dei punti dell'angoloide che giacciono dalla stessa parte del vertice rispetto ad un piano che ne seghi tutti i lati, non passando pel vertice.

13.

Prisma è una figura solida racchiusa da piani dei quali due opposti sono uguali, simili e paralleli, e i rimanenti sono parallelogrammi.

ERONE enuncia la seguente definizione:

Prismi sono quelle figure che si hanno congiungendo una base rettilinea ad un'area rettilinea mediante rette.

È però evidente che tale definizione dà luogo a solidi che non sono nè prismi, nè piramidi, poichè i solidi così definiti da ERONE si ottengono — dati in piani diversi due poligoni di un numero qualunque di lati — congiungendo i vertici dell'uno con quelli dell'altro in modo da avere delle facce triangolari. Non si ha poi nessuno dei solidi definiti da EUCLIDE in queste due ultime definizioni, nemmeno considerando, come fa ERONE, il caso in cui uno dei poligoni si riduca ad un segmento e si congiungano gli estremi di questo coi vertici del poligono.

In ERONE si trova però definito come *prisma parallelogrammo* quel prisma che ha sei facce a due a due opposte e parallele, definizione che invano si cercherebbe in EUCLIDE, benchè in molte proposizioni dei libri solidi faccia uso dei parallelepipedi e ne dimostri le proprietà: tale definizione mancante è aggiunta da qualche commentatore.

Il CAMPANO si limita a dare la definizione del prisma a base triangolare che, come LEONARDO PISANO, chiama *corpus serratile*. Gli altri prismi sono chiamati dal CAMPANO *colonne laterate*, mentre i coni sono chiamati *piramidi rotonde*, e i cilindri, *colonne rotonde*.

14.

Sfera è la figura che si genera allorchè si fa rotare un semicerchio intorno al diametro, fino a che ritorni nella stessa posizione dalla quale fu mosso.

Invece di una definizione, qui si ha piuttosto una descrizione del modo di generare una sfera. Ciò è osservato da uno scoliasta, il quale riferisce che una vera definizione si trova nella *Sphaerica* di TEODOSIO. Effettivamente però essa si ha già in ARISTOTELE, il quale considera la sfera come quella superficie i cui punti sono ugualmente distanti dal centro (*De caelo*, II, 14, 297). ERONE poi, prendendo come modello la definizione euclidea del cerchio (lib. I, term. 15), dà la seguente definizione (def. 77): *La sfera è una figura solida limitata da una superficie tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto, posto dentro la figura, sono uguali tra loro.*

15.

Asse della sfera è la retta fissa intorno alla quale ruota il semicerchio.

EUCLIDE, dalla definizione di sfera che egli assume, è portato a distinguere l'asse di rotazione dai diametri (term. 17). Che ogni diametro possa essere asse della sfera è osservato esplicitamente da ERONE (def. 79).

16.

Centro della sfera è quello stesso del semicerchio.

17.

Diametro della sfera è una retta qualunque condotta pel centro e terminata da ambo le parti dalla superficie della sfera.

18.

Cono è la figura che si genera allorchè, tenendo fisso in un triangolo rettangolo uno dei lati che racchiudono l'angolo retto, si fa rotare il triangolo intorno ad esso, fino a che non ritorni nella stessa posizione dalla quale fu mosso. E se la retta fissa è uguale all'altra ortogonale che ruota, il cono è rettangolo, se è minore è ottusangolo, se è maggiore è acutangolo.

Nella prima parte, EUCLIDE dà il modo di generare il cono circolare retto. La definizione generale di cono circolare (obliquo) è data da APOLLONIO di Perga (*Coniche*, libro I, def. 1 e 2) come segue:

1) *Se da un certo punto si conduce ad una circonferenza di un cerchio, non posto nello stesso piano con questo punto, una retta prolungata da una parte e dall'altra, e se, il punto restando fisso, la retta ruota intorno alla circonferenza, riprendendo la posizione da cui ha incominciato il movimento, io chiamo superficie conica quella descritta dalla retta e che è composta di due superficie opposte rispetto al punto, dal quale ciascuna retta esce verso l'infinito, la retta descrivente essendo essa stessa prolungata verso l'infinito. Vertice di questa superficie è il punto fisso e il suo asse è la retta condotta pel punto al centro del cerchio.*

2) *Chiamo cono la figura limitata dal cerchio e dalla superficie conica compresa tra il vertice e la circonferenza del cer-*

chio; vertice del cono, il punto che è il vertice stesso della sua superficie; asse del cono, la retta condotta dal vertice al centro del cerchio; base, il cerchio.

La seconda parte della definizione euclidea contiene una classificazione dei coni che rispecchia il modo di concepire le coniche prima di APOLLONIO. Queste venivano considerate come sezioni del cono retto con un piano perpendicolare ad una generatrice del cono: in tale modo l'ellisse veniva fornita dalla *sezione di cono acutangolo*, l'iperbole dalla *sezione di cono ottusangolo*, la parabola dalla *sezione di cono rettangolo* (perifrasi alle quali APOLLONIO sostituirà le espressioni ancora in uso).

APOLLONIO introduce la distinzione, che abbiamo conservato, dei coni in coni retti ed obliqui (*scaleni*) e considera le coniche come sezioni di uno stesso cono.

19.

Asse del cono è la retta fissa intorno alla quale ruota il triangolo.

20.

Base è il cerchio descritto dalla retta che ruota intorno [all'asse].

21.

Cilindro è la figura che si genera allorchè, tenendo fisso uno qualunque dei lati comprendenti un angolo retto di un parallelogrammo rettangolo, si fa rotare il parallelogrammo intorno ad esso fino a che non ritorni nella stessa posizione dalla quale fu mosso.

22.

Asse del cilindro è la retta fissa intorno alla quale ruota il parallelogrammo.

23.

Basi sono i cerchi descritti dai due lati opposti che ruotano.

24.

Coni e cilindri simili sono quelli dei quali gli assi e i diametri delle basi sono proporzionali.

COMMANDINO estende questa definizione ai coni e cilindri circolari obliqui, o retti, chiamandoli simili quando le sezioni ottenute coi piani passanti per gli assi perpendicolari alle basi sono figure aventi i lati corrispondenti che formano angoli uguali cogli assi e che stanno tra loro come gli assi.

25.

Cubo è la figura solida racchiusa da sei quadrati uguali.

26.

Ottaedro è la figura solida racchiusa da otto triangoli uguali ed equilateri.

27.

Icosaedro è la figura solida racchiusa da venti triangoli uguali ed equilateri.

28.

Dodecaedro è la figura solida racchiusa da dodici pentagoni uguali, equilateri ed equiangoli.

Queste definizioni suppongono le costruzioni effettive dei poliedri regolari, date nel libro XIII.

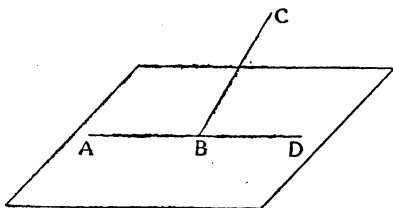
Proposizioni

1.

Di una linea retta, se una parte giace in un piano, l'altra non può essere elevata sullo stesso piano.

Se è possibile, una parte AB della retta ABC sia nel piano di riferimento, l'altra parte BC sia elevata.

Esisterà allora nel piano di riferimento una retta continuante per diritto la retta AB : sia la BD . Dunque le due rette ABC , ABD hanno come parte comune AB : ma



ciò è impossibile, poichè, descritto il cerchio di centro B e raggio uguale ad AB , i diametri $[ABC, ABD]$ intercettano archi di cerchio diversi.

Quindi di una linea retta una parte non può giacere in un piano e un'altra essere elevata sullo stesso piano,

c. d. d.

Questa proposizione (come le due seguenti) è resa necessaria dalla deficienza della definizione di piano assunta da EUCLIDE.

Infatti, dire che il piano è (lib. I, term. 7) quella superficie che giace ugualmente rispetto alle sue rette, comunque si possa interpretare, non definisce completamente il piano, poichè non ne mette in evidenza le proprietà elementari ed intrinseche. Tale deficienza è riconosciuta da EUCLIDE stesso, il quale, avendo davanti a sé altre superficie (coni e cilindri circolari) che giacciono ugualmente rispetto alle loro generatrici, doveva esser condotto a mostrare pel piano le proprietà fondamentali:

1) *una retta che abbia a comune con un piano due punti giace tutta nel piano,*

2) *tre punti non in linea retta determinano uno ed un sol piano* (oggetto della proposizione seguente).

La prima proposizione costituisce per noi il postulato che si aggiunge al presupposto dell'unicità della retta (illimitata) per due punti. La cosa sembra apparire diversamente ad EUCLIDE, il quale ammette tacitamente (come ha sempre fatto nei libri planimetrici) che due punti d'un piano possano essere congiunti da una retta giacente interamente nel piano stesso e prolungabile egualmente in questo piano (la prolungabilità si deduce d'altronde dalla costruzione della perpendicolare secondo la prop. I, 14, secondo CLAVIO, seguito da GUIDO GRANDI). EUCLIDE vuole però in qualche modo rispondere al dubbio che concerne la questione dell'unicità del prolungamento d'una retta passante per due punti.

Che non possano esservi due rette terminate dagli stessi estremi resta escluso dal postulato, che due rette non possono racchiudere uno spazio. Perciò EUCLIDE si chiede soltanto se sia possibile che una retta (terminata) d'un piano possa ammettere due prolungamenti: uno giacente nel piano stesso, l'altro fuori di esso (l'unicità del prolungamento entro il piano risultando dal postulato sull'uguaglianza degli angoli retti).

Tuttavia il ragionamento suppone che i due prolungamenti della medesima retta giacciono sempre in un piano, ciò che costituirebbe un illecito appello alla proposizione che segue: la considerazione del cerchio che viene costruito entro questo piano riconduce insomma la dimostrazione a quella che abbiamo detto fondarsi sul postulato dell'uguaglianza degli angoli retti.

SIMSON, attenendosi alla definizione eroniana del piano (cfr. nota in I, term. 7), modifica la dimostrazione euclidea nel seguente modo: si faccia passare un piano per la retta AD e lo si faccia rotare fino a passare per il punto C . Poichè i punti B, C sono in questo piano, la linea retta BC è in esso. Quindi le due rette ABC, ABD sono nello stesso piano ed hanno in comune il segmento AB : ciò è impossibile.

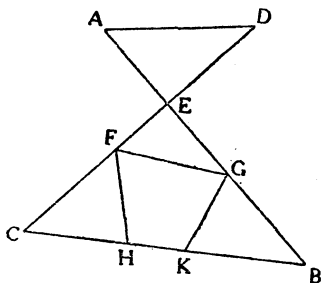
L. BERTRAND elimina questa proposizione euclidea tentando di dimostrare che due punti di un piano individuano una sola retta e che una retta che ha a comune con un piano due punti giace tutta sul piano.

Rinviando, per un esame critico-storico del concetto di piano all'articolo di U. AMALDI nelle citate *Questioni*, noteremo soltanto che la proprietà, che è oggetto di questa proposizione, può dimostrarsi rigorosamente sia partendo dalla definizione: *il piano è il luogo dei punti equidistanti da due punti dati* (BOLYAI e LOBACEFSKI), sia assumendo come definizione del piano la sua generazione proiettiva coll'aggiunta della parallela alla retta proiettata (VERONESE).

2.

Se due rette si intersecano, esse sono in un piano e ogni triangolo [di cui esse costituiscono due lati] è nel piano.

Le due rette AB, CD si intersechino nel punto E . Dico che le AB, CD sono in un piano e che ogni triangolo è nel piano.



Si prendano infatti sopra le EC , EB i punti qualunque F , G e si conducano le CB , AD e le secanti FH , GK .

Dico dapprima che il triangolo ECB è in un piano; infatti se una parte, o FHC , o GBK , del triangolo ECB è nel piano di riferimento e il rimanente in un altro, anche parte di una delle rette EC , EB è nel piano di riferimento, e parte nell'altro.

Se poi la parte $FCBG$ del triangolo ECB è nel piano di riferimento e il rimanente in un altro, anche parte di ambedue le rette EC , EB è nel piano di riferimento e parte in un altro; ma ciò si è mostrato assurdo (XI, I), quindi il triangolo ECB è in un piano. Nel piano in cui è il triangolo ECB , vi è anche ciascuna delle EC , EB ; e poichè vi è ciascuna delle EC , EB , in esso vi sono anche le AB , CD (XI, I).

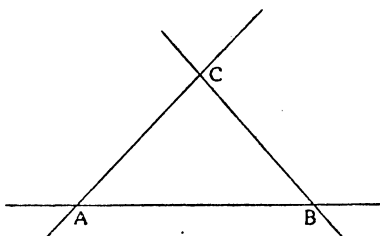
Quindi le rette AB , CD sono in un piano ed ogni triangolo è nello stesso piano, c. d. d.

EUCLIDE vuol dimostrare in questa proposizione l'esistenza e l'unicità del piano determinato da tre punti non in linea retta, o da una retta e da un punto esterno; ma in realtà non dimostra niente, perchè questa stessa proprietà viene supposta valida almeno nel piccolo, ed estesa. Il ragionamento, se non venga meglio spiegato, appare così debole, che si stenta a credere che possa appartenere veramente ad EUCLIDE.

SIMSON modifica l'enunciato nel seguente modo: *Due rette che si intersecano sono in un piano, e tre rette che si intersecano a due a due, e non passano per un punto, sono in un piano.*

La dimostrazione di SIMSON, seguita anche da L. BERTRAND e da LEGENDRE, si fonda sul movimento. Eccola: Siano AB , AC due rette che s'intersecano in A . Si consideri un piano per AB

e lo si faccia ruotare intorno ad AB fino a che non passi per C . Allora la retta AC è tutta sul piano. Vi è quindi anche la BC .



Da questa proposizione si ha che un piano è univocamente determinato da:

- 1) - *due rette intersecantisi;*
- 2) - *una retta e un punto fuori di essa;*
- 3) - *tre rette intersecantisi a due a due e non passanti per uno stesso punto;*
- 4) - *tre punti non in linea retta.*

Un piano resta determinato anche da due rette parallele, poichè, condotta una retta secante le due rette parallele, il piano di una di queste e della secante contiene anche l'altra parallela; la dimostrazione di ciò sarà l'oggetto della proposizione settima di questo libro.

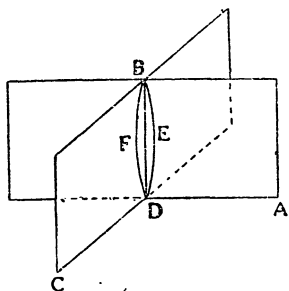
3.

Se due piani si intersecano, la comune intersezione è una retta.

Poichè i due piani AB , BC si intersecano, la comune intersezione sia la linea DB ; dico che la linea DB è retta.

Se ciò non è, si conduca da D a B nel piano AB , la retta DEB e nel piano BC la retta DFB ; gli estremi delle

due rette DEB , DFB sono gli stessi e manifestamente



racchiudono uno spazio: ciò è assurdo (I., n. com. 9).

Perciò le DEB , DFB non sono rette.

Similmente dimostreremo che, all'infuori della DB , nessun'altra retta condotta da D a B può essere la comune intersezione dei piani AB , BC .

Quindi se due piani si intersecano, la comune intersezione è una retta, c. d. d.

SIMSON osserva giustamente che la parte della dimostrazione che segue le parole « ciò è assurdo » è superflua, poichè dall'assurdità si può concludere subito che la BD non può essere che una ed una sola retta.

LEGENDRE dimostra la proposizione notando che se tra i punti comuni ai piani se ne trovassero tre non in linea retta, i due piani che si considerano, passando ciascuno per questi tre punti, formerebbero un solo ed unico piano (XI, 2), e ciò è contrario all'ipotesi che i due piani siano distinti.

Uno scoliasta enuncia la seguente proprietà come inversa della proposizione che stiamo esaminando: *Se la intersezione di figure secantisi è una retta, le figure sono piani*, proprietà che è vera solo se si considerano superficie effettivamente intersecantisi, e non tangenti tra loro, e la cui intersezione sia sempre una ed una sola retta.

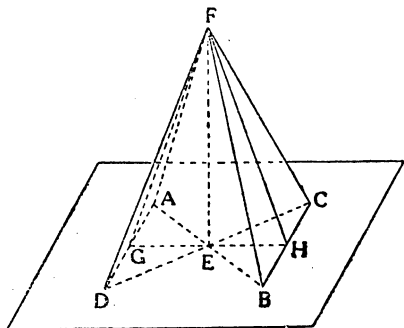
Nei moderni libri di testo, ispirati alla critica dei principi (cfr. *Geometria elem.* di ENRIQUES e AMALDI), la proposizione di EUCLIDE è sostituita dalla seguente: *Due piani aventi in comune un punto hanno in comune una retta*, la cui dimostrazione, a quanto riferisce l' HEATH, sembra dovuta allo STAUDT.

4.

Se una retta è perpendicolare, nel punto comune, a due rette intersecantisi, essa è perpendicolare anche al piano di queste.

Poichè la retta EF è perpendicolare in E alle due rette AB , CD intersecantisi nel punto E , dico che la EF è anche perpendicolare al piano delle AB , CD .

Si prendano le AE , EB , CE , ED uguali fra loro; per E si tracci una retta qualunque GEH e si conducano le



AD , CB , e da un qualunque punto F si conducano le FA , FG , FD , FC , FH , FB .

Poichè le due rette AE , ED sono uguali alle rette CE , EB e racchiudono angoli uguali (I, 15), la base AD è

uguale alla base CB e il triangolo AED è uguale al triangolo CEB (I, 4).

L'angolo DAE è quindi uguale all'angolo EBC , e anche l'angolo AEG è uguale a \widehat{BEH} (I, 15).

Pertanto i due triangoli AGE , BEH hanno due angoli e il lato, posto tra gli angoli uguali, uguali, cioè AE uguale ad EB ; quindi i lati rimanenti saranno uguali ai lati rimanenti (I, 26).

Dunque GE è uguale a EH , e AG a BH .

Poichè AE è uguale ad EB ed EF è comune e perpendicolare, la base FA è uguale alla base FB (I, 4); per la stessa ragione FC è uguale a FD . Ma AD è uguale a CB e FA è uguale a FB , quindi i lati AD , FA sono rispettivamente uguali ai lati CB , FB ; e si è già dimostrato che la base FD è uguale alla base FC , quindi l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC (I, 8).

Ma sopra si è dimostrato che AG è uguale a BH e parimenti che FA è uguale a FB ; ed è dimostrato che l'angolo FAG è uguale a \widehat{FBH} , quindi la base FG è uguale alla base FH .

Si è poi dimostrato anche che GE è uguale a EH e FE è comune, e la base FG è uguale alla base FH , quindi l'angolo GEF è uguale all'angolo HEF (I, 8). Ciascuno degli angoli GEF , HEF è quindi retto (I, term. 10). Dunque la retta FE è perpendicolare alla retta qualunque GH condotta per E .

Nello stesso modo si dimostrerà che FE forma angoli retti con tutte le rette che la intersecano e stanno nel piano di riferimento.

Una retta è perpendicolare ad un piano quando forma angoli retti con tutte le rette che la intersecano e che stanno nel piano stesso (XI, term. 3), quindi la FE è perpendicolare al piano di riferimento. Ma il piano di riferimento è quello delle rette AB, CD ; la retta FE è dunque perpendicolare al piano delle rette AB, CD .

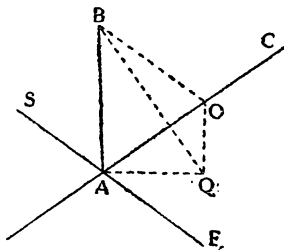
Quindi se una retta è perpendicolare nella comune intersezione a due rette intersecantisi, essa è perpendicolare anche al piano di queste, c. d. d.

Questa proposizione legittima la definizione di retta perpendicolare ad un piano (XI, term. 3).

Nell'attuale assetto logico della geometria, si suole definire, seguendo L. BERTRAND, la perpendicolare ad un piano dopo avere dimostrata la proprietà contenuta nell'enunciato euclideo.

La dimostrazione di EUCLIDE è assai lunga e in vari tempi si è cercato di darne delle più brevi. La seguente dimostrazione di GIOVANNI CIERMANS († 1648) merita di essere riferita, benchè errata, perchè trovò posto in un libro di testo assai divulgato in Italia intorno al 1700, cioè negli *Elementa geometriae* del gesuita ANDREA TACQUET (1612-1660).

La AB , perpendicolare alle AC, AF , non sia perpendicolare



al piano FAC : lo sia invece la BQ . Si conduca la QO perpendicolare alla AQ . Dal triangolo rettangolo BAO si ha

$$\overline{BO}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AO}^2,$$

e poichè si suppone BQ perpendicolare al piano, è pure rettangolo il triangolo BQA , quindi è

$$\overline{BA}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{AQ}^2,$$

inoltre, dal triangolo rettangolo AQO , si ha

$$\overline{AO}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{QO}^2.$$

Dunque, sostituendo nella prima relazione, si ottiene

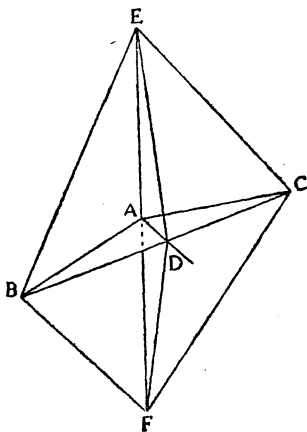
$$\overline{BO}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{QO}^2 + 2\overline{AQ}^2,$$

ossia il quadrato di BO è maggiore della somma dei quadrati di BQ e QO : l'angolo BQO non è quindi retto.

Appare subito che con questa dimostrazione non si prova affatto la proposizione euclidea, cioè non si mostra — come vuole EUCLIDE — che la condizione affinchè una retta soddisfi alla definizione di perpendicolarità rispetto ad un piano, è che essa sia perpendicolare a due sole rette uscenti dal suo piede e giacenti nel piano.

Poichè si conclude che l'angolo BQA non può essere retto si può riguardare questa dimostrazione solamente come una lunga ed oziosa dimostrazione dell'unicità della perpendicolare calata da un punto sopra un piano.

I libri di testo moderni, invece della dimostrazione euclidea, riportano generalmente la dimostrazione dovuta, secondo HEATH,



a CAUCHY: talvolta la dimostrazione di LEGENDRE.

La dimostrazione di CAUCHY procede nel seguente modo:

Sia EF perpendicolare alle AB, AC . Condotta nel piano delle AB, AC una retta AD uscente da A , diciamo che la EF è perpendicolare alla AD .

Presi sulla AB e sulla AC i punti qualunque B, C , la congiungente BC intersechi in D la retta AD condotta dianzi.

Si faccia $AE = AF$ e si conducano le EB, ED, EC, FB, FD, FC .

I triangoli rettangoli EAB, FAB sono uguali avendo uguali i cateti: quindi è $EB = FB$.

Per la stessa ragione i triangoli EAC, FAC sono uguali: quindi $EC = FC$.

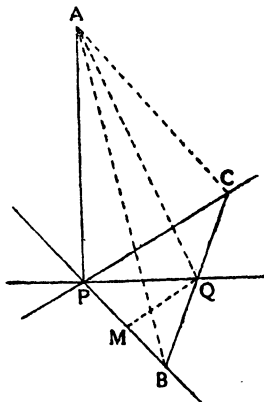
I triangoli EBC, FBC sono uguali avendo uguali i lati: quindi $\widehat{EBC} = \widehat{FBC}$.

I triangoli EBD, FBD hanno due lati e l'angolo compreso uguali, dunque sono uguali: allora è $ED = FD$.

I triangoli EAD, FAD sono uguali avendo uguali i lati: si ha allora $\widehat{EAD} = \widehat{FAD}$, ma questi angoli sono adiacenti e quindi retti. La AD è dunque perpendicolare alla EF .

Ecco ora la dimostrazione di LEGENDRE (*Éléments*, liv. V, prop. 4), più complessa della precedente:

Per un punto Q qualunque della PQ si conduca la retta BC tale che $BQ = CQ$ e si conducano le rette AB, AQ, AC .



Poichè BC è diviso in due parti uguali dal punto Q , dal triangolo BPC si ha

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2(\overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2).$$

Il triangolo ABC dà ugualmente

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2(\overline{AQ}^2 + \overline{QC}^2).$$

Sottraendo la prima uguaglianza dalla seconda, e osservando che dai triangoli APC , APB , rettangoli in P , si ha

$$\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2, \quad \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2,$$

si ricava

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2.$$

Dunque il triangolo APQ è rettangolo in P , ossia la AP è perpendicolare anche alla PQ .

Per costruire la BC bisecata da Q , basterà, fissato Q , condurre QM parallelo a PC e prendere $MB = PM$.

Da questa proposizione si ha facilmente che la perpendicolare condotta da un punto e limitata da un piano è minore di qualunque obliqua e che essa dà la più breve distanza di un punto dal piano; quindi si possono enunciare le proposizioni:

1. *le oblique ugualmente distanti dal piede della perpendicolare sono uguali;*
2. *di due oblique non ugualmente distanti dal piede della perpendicolare, quella che è più distante è la più lunga;*
3. *il teorema delle tre perpendicolari.*

Queste proposizioni non si trovano in EUCLIDE, ma appaiono in PAPPO. Nell'epoca moderna furono introdotte nella trattazione della Geometria elementare per semplificare alcune dimostrazioni, e, precisamente, le prime due nel trattato di L. BERTRAND, e tutte e tre in quello di LEGENDRE.

Il teorema detto « delle tre perpendicolari » si enuncia (vedi fig. precedente) nel seguente modo :

La retta AP sia perpendicolare ad un piano e BC sia una retta qualunque di detto piano; se da P si conduce la PQ perpendicolare a BC , la AQ (essendo A un punto qualunque di AP) è perpendicolare a BC .

La dimostrazione che ne dà LEGENDRE (*Éléments*, V, 6) si stacca dalla consueta dimostrazione che si ritrova nei testi moderni e merita di essere riferita ⁽¹⁾:

Si prenda $QB = QC$ e si conducano le AB , AQ , AC . Poichè $QB = QC$, risulta $PB = PC$ e quindi le oblique AB e AC sono uguali. La AQ ha quindi due dei suoi punti, A e Q , ugualmente distanti dalle estremità del segmento BC , quindi AQ è perpendicolare, nel punto di mezzo, a BC .

Come *corollario* si ha che la BC , risultando perpendicolare alle rette AQ , PQ , risulta perpendicolare al piano APQ .

Il teorema delle tre perpendicolari può servire, oltre che in altre questioni, a semplificare le seguenti:

a) Se due rette sono perpendicolari allo stesso piano, esse sono parallele (XI, 6);

b) Ogni retta parallela ad una perpendicolare ad un piano è essa pure perpendicolare al piano (XI, 8);

c) Condurre da un punto la perpendicolare ad un piano (XI, 11);

d) La congiungente il vertice di una piramide (avente la base circoscritta ad una circonferenza) col punto di contatto di un lato risulta perpendicolare a tale lato.

Dal teorema delle tre perpendicolari LEGENDRE è portato, in uno scolio al teorema, alla considerazione della *minima distanza di due rette sghembe* ⁽²⁾. Notiamo come riesca strano che tale nozione (che già si può dedurre evidentemente dalle figure che accompagnano questa proposizione euclidea, e le XI, 6 e 8) abbia tanto ritardato a comparire nelle trattazioni geometriche, non avendosi notizia che sia stata introdotta da altri geometri anteriori a LEGENDRE.

⁽¹⁾ Cfr. A. NATUCCI, *Period. di mat.*, Ser. IV, Vol. 13 (1933) pag. 307.

⁽²⁾ Cfr. A. NATUCCI, *Period. di mat.*, Ser. IV, Vol. 13 (1933) pag. 47.

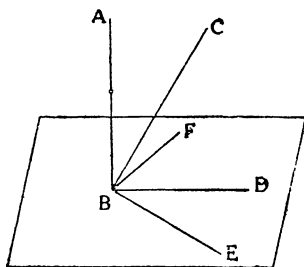
5.

Se una retta è perpendicolare a tre rette in un punto ad esse comune, queste tre rette sono in un piano.

Poichè la retta AB è perpendicolare alle tre rette BC , BD , BE nel punto B d'intersezione, dico che le BC , BD , BE sono in un piano.

Non sia vero; e, se è possibile, le BD , BE siano sul piano di riferimento e la BC sia elevata; si conduca allora il piano delle AB , BC ; la comune intersezione dei due piani forma una retta nel piano di riferimento (XI, 3); sia la BF .

Nel piano condotto per le AB , BC vi sono quindi le tre rette BA , BC , BF . La AB è perpendicolare a cia-



scuna delle BD , BE , e quindi è perpendicolare al piano delle BD , BE (XI, 4), ossia è perpendicolare al piano di riferimento e perciò AB forma angoli retti con tutte le rette che la intersecano giacenti nel piano di riferimento (XI, term. 3); ma si interseca con la BF , posta nel piano

di riferimento, quindi l'angolo ABF è retto. Ma abbiamo supposto che anche \widehat{ABC} sia retto, quindi l'angolo ABF è uguale ad \widehat{ABC} : e sono nello stesso piano, e ciò è impossibile. La retta BC non è quindi in un piano elevato, perciò le tre rette BC , BD , BE sono in un piano.

Quindi se una retta è perpendicolare nella comune intersezione a tre rette che si intersecano, le tre rette sono in un piano,

c. d. d.

Segue da questa dimostrazione che se si fa rotare un angolo retto intorno ad uno dei suoi lati, l'altro lato descrive un piano.

EUCLIDE, mentre dà (XI, 11, 12) la costruzione della perpendicolare per un punto ad un piano e ne dimostra l'unicità (XI, 13), non accenna alla costruzione del piano perpendicolare ad una retta e tanto meno alla sua unicità.

Se il punto da cui si deve condurre il piano perpendicolare alla retta AB è il punto B della retta stessa, basta condurre nei piani ABE , ABD le perpendicolari BE , BD alla AB : il piano EBD è il piano richiesto. Esso è unico, poichè se esistesse un secondo piano EBC perpendicolare ad AB e passante per B , tale piano incontrerebbe il piano ABD secondo la retta BF che risulterebbe (XI, 4), come BD , perpendicolare ad AB . Si avrebbero allora, nello stesso piano ABD , due rette perpendicolari alla AB nello stesso punto, e ciò è impossibile.

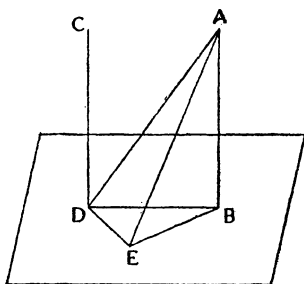
Si voglia ora condurre dal punto esterno E il piano perpendicolare ad AB . Nel piano ABE si conduca la BE perpendicolare ad AB e quindi da B un'altra retta BD perpendicolare ad AB . Il piano EBD è il piano richiesto. Riducendosi all'assurdo si dimostra facilmente l'unicità di tale piano, supponendo l'esistenza di un secondo piano perpendicolare per E che intersechi AB in un punto diverso da B , o che, intersecando la AB in B , non passi per BD .

6.

Se due rette sono perpendicolari ad uno stesso piano esse sono parallele.

Poichè le due rette AB , CD sono perpendicolari al piano di riferimento, dico che la AB è parallela alla CD .

Le rette intersechino il piano di riferimento nei punti B , D ; si conduca la retta BD e si tracci nel piano di rife-



rimento la DE perpendicolare alla BD . Si prenda AB uguale a DE e si conducano le BE , AE , AD .

Poichè la AB è perpendicolare al piano di riferimento, essa forma angoli retti con tutte le rette che la intersecano e che sono nel piano di riferimento (XI, term. 3). Ma ciascuna delle rette BD , BE , che stanno nel piano di riferimento, intersecano la AB , quindi ciascuno degli angoli ABD , ABE è retto. E poichè AB è uguale a DE , e BD è comune, i due lati AB , BD sono uguali ai due ED , DB

e comprendono angoli retti; quindi la base AD è uguale alla base BE (I, 4).

Poichè AB è uguale a DE e AD a BE , e AE è comune, l'angolo ABE è uguale all'angolo EDA (I, 8); ma ABE è retto, quindi anche \widehat{EDA} è retto.

Allora ED è perpendicolare a DA , ma è anche perpendicolare a ciascuna delle BD , DC , dunque ED è perpendicolare alle tre rette BD , DA , DC condotte pel punto D in un piano (XI, 5), nel quale, essendovil e DB , DA , vi è anche AB , poichè ogni triangolo giace in un piano (XI, 2).

Dunque le rette AB , BD , DC , sono in un piano e ciascuno degli angoli ABD , BDC è retto: la AB è quindi parallela alla CD (I, 28).

Dunque se due rette sono perpendicolari ad uno stesso piano, esse sono parallele, c. d. d.

Ricorrendo al teorema delle tre perpendicolari (vedi nota alla XI, 4) questa proposizione si dimostra più semplicemente nel seguente modo: Condotta la DE perpendicolare alla BD , essa risulta perpendicolare in D al piano ABD ; la DC , come perpendicolare al piano dato, risulta perpendicolare alla DE , quindi giace nel piano ABD perpendicolare in D alla DE . Allora AB e CD risultano parallele perchè giacenti in uno stesso piano e perpendicolari alla retta BD del piano stesso.

LEGENDRE dimostra prima la XI, 8 ricorrendo al teorema delle tre perpendicolari e da essa deduce questa proposizione (v. nota a XI, 8).

7.

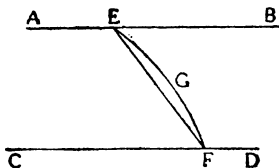
Se due rette sono parallele e su ciascuna di esse si prende un punto qualunque, la retta congiungente i punti è nello stesso piano delle parallele.

Siano le AB , CD due rette parallele e su ciascuna di esse si prendano i punti qualunque E , F ; dico che la congiungente i punti E , F è nello stesso piano delle parallele.

Non sia vero, e se è possibile sia elevata come EGF e si conduca un piano per EGF .

L'intersezione col piano di riferimento forma una retta (XI, 3): sia EF .

Le due rette EGF , EF racchiudono allora uno spazio, ciò che è impossibile.



Dunque la retta congiungente E con F non è nel piano più elevato, quindi la retta congiungente E con F è nel piano delle parallele AB , CD .

Dunque se due rette sono parallele e su ciascuna di esse si prende un punto qualunque, la retta congiungente i punti è nello stesso piano delle parallele, c. d. d.

Questa proposizione, che è stata criticata da SIMSON, vuol porgere un complemento alla Prop. 2. Qui si assume che due rette parallele stiano su un piano, conformemente alla Def. I, 23, e si fa vedere che questo è unico (HEATH).

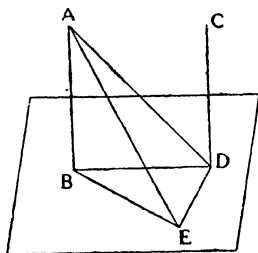
L'unicità è dedotta con le stesse considerazioni della Prop. 3, che nel pensiero di EUCLIDE appare completata da questa.

8.

Se due rette sono parallele ed una di esse è perpendicolare ad un piano, anche la rimanente è perpendicolare allo stesso piano.

Siano AB , CD le due rette parallele, e una di esse, la AB , sia perpendicolare al piano di riferimento; dico che anche la CD è perpendicolare allo stesso piano.

Le AB , CD s'intersechino col piano di riferimento nei



punti B , D e si conduca la BD . Allora le AB , CD , BD sono in un piano (XI, 7).

Si conduca nel piano di riferimento la DE perpendicolare alla BD e si prenda AB uguale a DE , quindi si conducano le BE , AE , AD .

Poichè AB è perpendicolare al piano di riferimento, è perpendicolare anche a tutte le rette che la intersecano e che stanno nel piano di riferimento (XI, term. 3).

Quindi ciascuno degli angoli ABD , ABE è retto; inoltre gli angoli CDB , ABD sono insieme uguali a due retti poichè la DB interseca le rette parallele AB , CD (I, 29). Ma \widehat{ABD} è retto, quindi \widehat{CDB} è pure retto e CD è perpendicolare alla BD .

Poichè AB è uguale a DE e BD è comune, i due lati AB, BD sono uguali ai due lati ED, BD e l'angolo ABD è uguale ad \widehat{EDB} (e ciascuno è retto), quindi la base AD è uguale alla base BE .

Essendo AB uguale a DE , BE uguale ad AD , i due lati AB, BE sono rispettivamente uguali ai due lati ED, DA e AE è la base comune, quindi l'angolo ABE è uguale ad \widehat{EDA} . Ma \widehat{ABE} è retto, perciò \widehat{EDA} è pure retto: quindi ED è perpendicolare ad AD ; ma è perpendicolare anche a DB , dunque ED è perpendicolare al piano delle rette BD, DA (XI, 4): allora ED è perpendicolare anche a tutte le rette che la intersecano e che stanno nel piano BDA .

Ma la DC è posta nel piano delle BD, DA , poichè le AB, BD sono nel piano delle rette BD, DA (XI, 2), e nello stesso piano nel quale sono le AB, BD , vi è anche la DC . Quindi la ED è perpendicolare alla DC e perciò anche la DC è perpendicolare alla DE .

Ma CD è anche perpendicolare alla BD .

Dunque la CD è perpendicolare alle due rette DE, DB nello stesso punto D di intersezione, quindi è perpendicolare anche al piano delle DE, DB (XI, 4).

Ma il piano delle DE, DB è quello di riferimento, quindi la CD è perpendicolare al piano di riferimento.

Dunque se due rette sono parallele ed una di esse è perpendicolare ad un piano, anche la rimanente è perpendicolare allo stesso piano, c. d. d.

SIMSON ritiene che la giustificazione del fatto che «la DC è posta nel piano delle BD, DA » deve essere corrotta od interpolata e che, ricorrendo alla proposizione precedente, deve essere sostituita dalla seguente «poichè tutte e tre sono nel piano delle parallele AB, CD ». L'HEATH cerca di mostrare che la lezione tramandataci è genuina, affermando che nella proposizione precedente non vi è parola del piano determinato da due trasversali come BD, AD ; tuttavia a noi sembra che effettivamente vi sia nel testo un giro assai vizioso, non essendovi sfruttata immediatamente, come si attenderebbe, la proprietà che EUCLIDE ci ha dimostrato nella proposizione precedente.

Questa proposizione, inversa della XI, 6, si può dimostrare facilmente con una riduzione all'assurdo ricorrendo all'unicità della perpendicolare (XI, 13), che, nella moderna sistemazione logica della geometria, si suole anteporre alle dimostrazioni delle proprietà in questione.

La proposizione si può dimostrare anche direttamente, come fa LEGENDRE (*Éléments*, V, 7), ricorrendo al teorema delle tre perpendicolari: Condotto il piano per le AB, CD , sia BD la sua intersezione col piano dato. Si conduca nel piano dato la DE perpendicolare a BD ; essa risulterà perpendicolare al piano $ABCD$, quindi \widehat{CDE} è retto; ma anche \widehat{CDB} è retto, poichè AB è perpendicolare a BD e CD è parallela ad AB . Dunque CD è perpendicolare al piano essendo perpendicolare a due rette di esso.

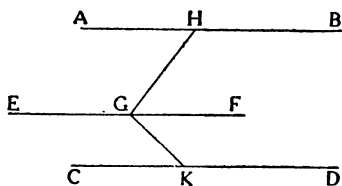
LEGENDRE dimostra poi, come reciproca, la XI, 6 col seguente ragionamento: Se le AB, CD , perpendicolari allo stesso piano, non fossero parallele, potremmo condurre per D la parallela ad AB . Tale parallela sarebbe perpendicolare al piano, ma allora si avrebbero due perpendicolari ad un piano per lo stesso punto e quindi l'assurdo.

9.

Le parallele ad una stessa retta, anche se non sono in uno stesso piano con questa, sono parallele tra loro.

Ciascuna delle AB, CD sia parallela alla EF , e

ambedue non giacenti nello stesso piano con questa: dico



che la AB è parallela alla CD .

Si prenda sopra la EF un punto G qualunque e da esso si conduca nel piano delle EF , AB la perpendicolare GH alla EF e nel piano delle EF , CD la perpendicolare GK alla EF .

Poichè la EF è perpendicolare tanto alla GH che alla GK , la EF è perpendicolare al piano delle GH , GK (XI, 4).

Ma EF è parallela ad AB , quindi anche AB è perpendicolare al piano delle GH , GK (XI, 8); per la stessa ragione anche CD è perpendicolare al piano delle GH , GK ; quindi ciascuna delle AB , CD è perpendicolare al piano delle GH , GK .

Se due rette sono perpendicolari allo stesso piano, le rette sono parallele (XI, 6); dunque la AB è parallela alla CD ,
c. d. d.

La stessa proprietà — nel caso che le rette siano in uno stesso piano — è dimostrata in I, 30.

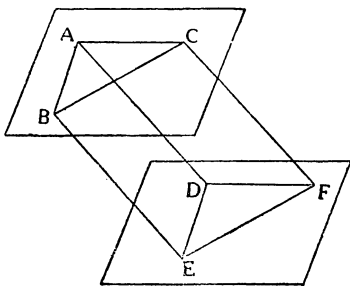
LEGENDRE (V, 7, cor. 2) dimostra la proprietà conducendo il piano perpendicolare alla EF cui saranno perpendicolari AB , CD (XI, 8). Le AB , CD sono quindi (XI, 6) parallele tra loro.

10.

Due rette per un punto parallele a due rette che si intersecano e non giacciono con queste nello stesso piano, formano angoli uguali.

Le rette AB , BC , che si intersecano, siano parallele rispettivamente alle rette DE , EF , che pure si intersecano, e non sono nello stesso piano delle prime: dico che l'angolo ABC è uguale a \widehat{DEF} .

Si prendano le BA , BC , ED , EF uguali tra loro e si conducano le AD , CF , BE , AC , DF .



Poichè la BA è uguale e parallela alla DE , anche la AD è uguale e parallela alla BE (I, 33); così anche la CF è uguale e parallela alla BE . Ma le rette che sono parallele a un'altra retta, anche se non sono sullo stesso piano con questa, sono parallele (XI, 9), quindi la AD è parallela ed uguale alla CF : allora la congiungente AC è uguale e parallela alla congiungente DF (I, 33).

E poichè i due lati AB , BC sono uguali ai due lati DE , EF e la base AC è uguale alla base DF , l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF (I, 8).

Dunque se due rette che si intersecano sono parallele a due rette che si intersecano e non sono nello stesso piano con queste, esse formano angoli uguali,

c. d. d.

La proposizione euclidea — della quale troveremo una prima applicazione solo in XII, 3 — è equivalente alla proposizione, che la sostituisce in alcuni testi moderni: *sezioni ugualmente inclinate di un diedro sono uguali*.

In generale la dimostrazione della proprietà delle sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali viene fondata sulla proprietà degli angoli a lati paralleli, e perciò sul V° postulato (vedi nota alla XI, 4). Una dimostrazione indipendente da questo postulato è data da ENRIQUES e AMALDI (*Geometria elementare*, II^a parte, 1903, cfr. edizione 1924, pag. 22, 25. Cfr. « *Questioni* » 3^a ed. (1924) Vol. I pag. 141). Si premette la dimostrazione del caso particolare:

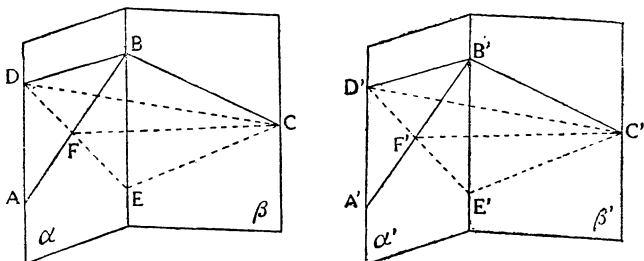
Se in due diedri (o nello stesso diedro) sono uguali due sezioni ugualmente inclinate, sono pure uguali due qualsivogliano sezioni ugualmente inclinate aventi rispettivamente un lato comune con le due prime.

Siano \widehat{ABC} , $\widehat{A'B'C'}$ due sezioni ugualmente inclinate dei diedri $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$: si conducano i raggi BD e $B'D'$ in modo che risultino uguali gli angoli \widehat{DBE} e $\widehat{D'B'E'}$. Diciamo che le sezioni \widehat{DBC} e $\widehat{D'B'C'}$ dei diedri sono uguali.

Preso sullo spigolo di $\alpha\beta$ il punto E in modo che BA sia interno all'angolo \widehat{DBE} , si prendano $DB = D'B'$, $BE = B'E'$, $BC = B'C'$ e si traccino le DE , $D'E'$, EC , $E'C'$, DC , $D'C'$, CF , $C'F'$.

I triangoli DEB , $D'E'B'$ risultano uguali per avere uguali due lati e l'angolo compreso. Quindi è $DE = D'E'$ e $\widehat{DEB} = \widehat{D'E'B'}$.

I triangoli FBE , $F'B'E'$ risultano uguali per avere uguali due angoli e il lato comune, quindi è $FE = F'E'$, $BF = B'F'$.



I triangoli CBE , $C'B'E'$ sono pure uguali avendo due lati e l'angolo compreso uguali; quindi è $CE = C'E'$.

I triangoli FBC , $F'B'C'$ risultano anch'essi uguali avendo uguali due lati e l'angolo compreso; sarà quindi $FC = F'C'$.

Allora, per avere uguali i tre lati, sono uguali anche i triangoli FEC , $F'E'C'$, da cui si ha $\widehat{FEC} = \widehat{F'E'C'}$.

Ne segue che sono pure uguali i triangoli DEC , $D'E'C'$ e che quindi è $DC = D'C'$.

I triangoli DBC , $D'B'C'$ hanno perciò uguali i tre lati, dunque sono uguali e quindi sono veramente uguali le due sezioni \widehat{DBC} , $\widehat{D'B'C'}$ ugualmente inclinate dei due diedri.

Premesso ciò è facile dimostrare che:

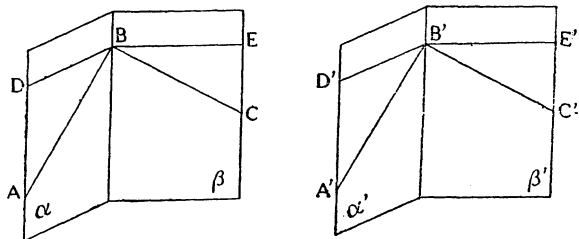
Sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali sono uguali; e reciprocamente: due diedri aventi due sezioni ugualmente inclinate uguali, sono uguali.

Accanto alle sezioni ugualmente inclinate uguali \widehat{ABC} , $\widehat{A'B'C'}$ dei diedri $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\alpha'\beta'}$, si considerino le sezioni normali \widehat{DBE} , $\widehat{D'B'E'}$. Se i due diedri sono uguali, si ha $\widehat{DBE} = \widehat{D'B'E'}$, quindi per il lemma precedente è $\widehat{ABE} = \widehat{A'B'E'}$. Applicando di nuovo il lemma alle coppie di sezioni \widehat{ABE} , $\widehat{A'B'E'}$ e \widehat{ABC} , $\widehat{A'B'C'}$ si ha $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, c. v. d.

Se invece supponiamo $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, sempre applicando il lemma precedente, si ha successivamente

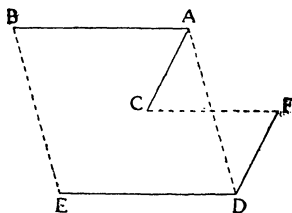
$$\widehat{ABE} = \widehat{A'B'E'}, \quad \widehat{DBE} = \widehat{D'B'E'},$$

cioè i due diedri sono uguali.



Ne segue immediatamente la dimostrazione della proposizione euclidea, poichè gli angoli coi lati paralleli risultano uguali in quanto sono sezioni ugualmente inclinate del diedro formato dai piani che passano per le coppie di rette parallele.

Il CLAVIO dà una dimostrazione nel caso che le quattro rette siano nello stesso piano ed osserva poi che la dimostrazione euclidea vale solo se la AD non interseca nessuna delle congiun-



genti BE, FC : se invece la AD interseca una di queste congiungenti, come accade nella figura, la dimostrazione non si può ripetere e il teorema non è vero: infatti in tale caso gli angoli sarebbero supplementari.

Un antico scolio, riportato anche dal COMMANDINO, inverte questa proposizione nel modo seguente: *se due angoli uguali, con-*

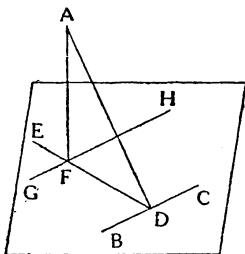
tenuti da rette che non sono sullo stesso piano, hanno un lato parallelo ad un lato, anche gli altri lati sono paralleli.

11.

Da un dato punto elevato sopra un piano, condurre una linea retta perpendicolare a questo.

Sia A il punto dato e il piano dato sia quello di riferimento; bisogna dal punto A condurre una linea retta perpendicolare al piano di riferimento.

Si conduca allora comunque nel piano di riferimento la retta BC e dal punto A si mandi la AD perpendicolare alla BC (I, 12). Se AD è perpendicolare anche al piano



di riferimento, il proposto è già fatto. Non sia ciò; si conduca allora dal punto D , nel piano di riferimento la perpendicolare DE alla BC (I, 11), da A si conduca la AF perpendicolare alla DE (I, 12) e dal punto F si conduca la GH parallela alla BC (I, 31).

Poichè la BC è perpendicolare a ciascuna delle DA , DE , la BC è perpendicolare al piano delle ED , DA

(XI, 4). Inoltre la BC è parallela alla GH . Ma se due rette sono parallele e una di esse è perpendicolare ad un piano, anche l'altra è perpendicolare allo stesso piano (XI, 8), quindi anche GH è perpendicolare al piano delle ED, DA .

La GH è perciò perpendicolare a tutte le rette che la intersecano e stanno nel piano delle ED, DA (XI, term. 3); la AF la interseca ed è nel piano delle ED, DA , quindi la GH è perpendicolare alla FA , così come la FA è perpendicolare alla GH .

La AF è pure perpendicolare alla DE , quindi la AF è perpendicolare a ciascuna delle GH, DE .

Ma se una retta è perpendicolare nel punto di intersezione a due rette che si intersecano, essa è perpendicolare al piano di queste (XI, 4): la FA è quindi perpendicolare al piano delle ED, GH .

Ma il piano delle ED, GH è quello di riferimento, quindi AF è perpendicolare al piano di riferimento.

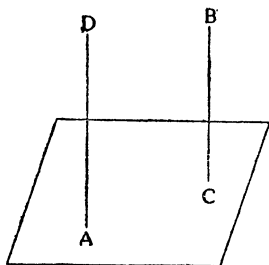
Dunque da un dato punto A , elevato sopra un piano, si è condotta una linea retta AF perpendicolare a questo,
c. d. f.

12

Innalzare da un punto di un piano dato una linea retta perpendicolare al piano.

Il piano dato sia quello di riferimento ed A sia il punto dato di esso: bisogna dunque innalzare dal punto A una linea retta perpendicolare al piano di riferimento.

Si prenda il punto B elevato sul piano e si conduca per B la perpendicolare BC al piano di riferimento (XI, 11) e da A si conduca la AD parallela a BC . Poichè le



AD , CB sono due rette parallele ed una di esse, la BC , è perpendicolare al piano di riferimento, anche l'altra AD è perpendicolare al piano di riferimento.

Dunque si è innalzato una linea retta perpendicolare ad un piano dato in un suo punto dato,

c. d. f.

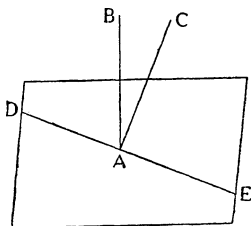
13.

Da uno stesso punto non si possono innalzare, dalla medesima parte, due rette perpendicolari ad uno stesso piano.

Se è possibile, dallo stesso punto A s'innalzino le due rette AB , AC perpendicolari, dalla stessa parte, al piano di riferimento e si conduca il piano delle AB , AC . L'intersezione col piano di riferimento sarà una retta per A : sia la DAE (XI, 3). Le rette AB , AC , DAE sono in un piano, e poichè la CA è perpendicolare al piano di riferimento, essa forma angoli retti con tutte le rette che la in-

tersecano e che s'ono nel piano di riferimento (XI, term. 3): essa interseca la DAE che è nel piano di riferimento, quindi \widehat{CAE} è retto.

Per la stessa ragione anche \widehat{BAE} è retto; perciò \widehat{CAE}



è uguale a \widehat{BAE} e sono nello stesso piano: ciò è impossibile.

Dunque da uno stesso punto non si possono innalzare, dalla medesima parte, due rette perpendicolari ad uno stesso piano,

c. d. d.

Uno scolio, riportato dal COMMANDINO e accolto più tardi dal SIMSON, aggiunge alle parole « è impossibile » la giustificazione: « altrimenti essendo perpendicolari allo stesso piano sarebbero parallele per la 6^a di questo libro, ma si intersecano, quindi l'assurdo ».

CLAVIO dimostra che neanche da un punto esterno si possono condurre due perpendicolari allo stesso piano, poichè se ciò fosse si avrebbe un triangolo con due angoli interni retti, contro la I, 17, od anche, le due perpendicolari sarebbero (per la XI, 6) parallele, mentre hanno un punto in comune.

L'unicità della perpendicolare ad un piano da un punto esterno si poteva, d'altra parte, dedurre facilmente dalla XI, 4.

14.

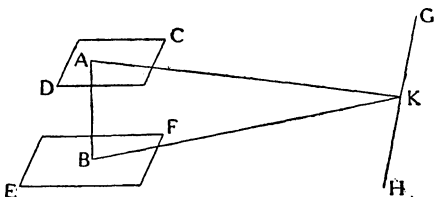
I piani a cui una stessa retta è perpendicolare, sono paralleli.

Poichè la retta AB è perpendicolare a ciascuno dei piani CD , EF , dico che i piani sono paralleli.

Se ciò non è, i piani prolungati concorreranno.

Concorrano: l'intersezione comune formerà allora una retta (XI, 3): sia la GH ; si prenda su GH un punto qualunque K e si conducano le AK , BK .

Poichè la AB è perpendicolare al piano EF , la AB è perpendicolare alla retta BK che sta sul piano EF prolungato: dunque l'angolo ABK è retto (XI, term. 3). Per la stessa ragione anche \widehat{BAK} è retto.



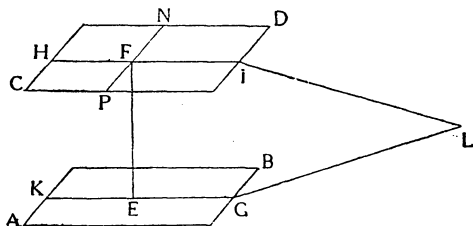
Il triangolo ABK ha quindi due angoli ABK , BAK che, insieme, sono eguali a due retti: ciò è impossibile (I, 17). Quindi i piani CD , EF prolungati non concorrono e allora essi sono paralleli (XI, term. 8).

Dunque i piani perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli,

c. d. d.

Quasi tutti i commentatori (TARTAGLIA, COMMANDINO, CLAVIO, GIORDANO VITALE, ecc.) riportano l'antico scolio che inverte la proposizione euclidea: *se due piani sono paralleli, una retta perpendicolare ad uno di essi è perpendicolare anche all'altro*. Questo viene dimostrato per assurdo: Sia la EF perpendicolare al piano

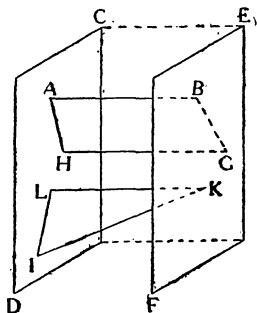
AB ; si intersechino i due piani paralleli col piano $KHIG$ passante per la EF . Se \widehat{IFE} è acuto, le rette HI , KG , prolungate,



s'incontrano in un punto L . Ma le rette KGL , HIL stanno nei piani AB , CD (XI, 1), quindi l'assurdo, perchè i piani sono paralleli. Analogamente si dimostra che EF è perpendicolare anche ad un'altra retta PFN , quindi (XI, 4) la EF è perpendicolare anche al piano CD .

GIORDANO VITALE modifica la dimostrazione euclidea facendola dipendere dal lemma:

Se una linea retta è perpendicolare a due piani, tutte le altre rette che sono perpendicolari ad uno di quei piani, sono ancora perpendicolari all'altro piano; le dette perpendicolari sono tra di loro uguali ed ognuna è la minima di tutte le altre rette interposte fra questi piani e non perpendicolari ad essi.



Sia AB perpendicolare ai due piani CD , EF . Preso un punto G sul piano EF si conduca la GH perpendicolare ad esso. Poichè $\widehat{ABG} = \widehat{HGB}$, le rette AB , GH sono parallele (I, 28). Ma AB

è perpendicolare al piano CD , quindi (XI, 8) anche la GH è perpendicolare al piano CD . Inoltre $HG = AB$, perchè lati opposti di un parallelogrammo (I, 34).

Per dimostrare la seconda parte, si consideri una retta KI non perpendicolare ai due piani e si conduca da K la perpendicolare al piano EF , la quale risulterà perpendicolare anche al piano CD .

Allora l'angolo ILK è retto, quindi (I, 17) è $\widehat{ILK} > \widehat{KIL}$.

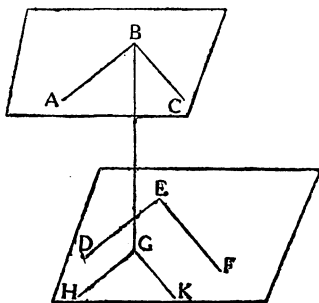
È quindi (I, 19) $LK < IK$, c. d. d.

Stabilito questo lemma, GIORDANO deduce la proposizione euclidea dal fatto che, comunque si continuino i piani, le perpendicolari al piano DC calate dai punti del piano EF sono tutte uguali al segmento AB , e però i piani non hanno intersezione, quindi (XI, term. 8) sono paralleli.

15.

Se due rette intersecantisi sono parallele a due rette intersecantisi e non nello stesso piano con queste, i piani di esse sono paralleli.

Poichè le due rette AB , BC , intersecantisi, sono pa-



rallele alle due rette DE , EF e non sono nello stesso piano, dico che i piani delle AB , BC e DE , EF prolungati non concorrono.

Si mandi dal punto B la BG perpendicolare al piano delle DE , EF (XI, 11), la quale incontra il piano nel punto G . Per G si conduca la GH parallela alla ED e la GK parallela alla EF (I, 31).

La BG , poichè è perpendicolare al piano delle DE , EF , forma angoli retti con tutte le rette che la intersecano e che sono nel piano delle DE , EF (XI, term. 3).

Ciascuna delle rette GH , GK la interseca ed è nel piano delle DE , EF , quindi ciascuno degli angoli BGH , BGK è retto. E poichè la BA è parallela alla GH (XI, 9), gli angoli GBA , BGH , insieme, sono eguali a due retti (I, 29). Ma \widehat{BGH} è retto, quindi anche \widehat{GBA} è retto. La GB è dunque perpendicolare alla BA . Per la stessa ragione GB è perpendicolare anche a BC .

La retta GB è condotta perpendicolare alle due rette BA , BC che si intersecano, quindi la GB è perpendicolare al piano delle BA , BC (XI, 4), e poichè la stessa retta è perpendicolare ai piani, i piani sono paralleli (XI, 14): quindi il piano delle AB , BC è parallelo al piano delle DE , EF .

Dunque se due rette intersecantisi sono parallele a due rette intersecantisi e non sono nello stesso piano, i piani di esse sono paralleli,

c. d. d.

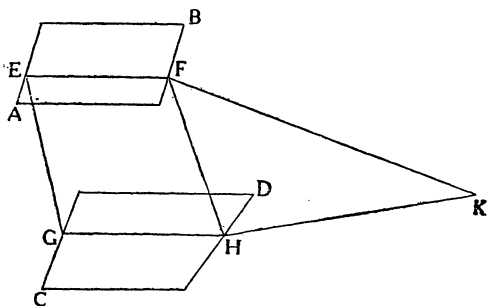
16.

Se due piani paralleli si segano con un piano qualunque, le loro comuni intersezioni sono parallele.

Le comuni intersezioni dei due piani paralleli AB , CD intersecati dal piano $EFGH$, siano EF , GH : dico che la EF è parallela alla GH .

Se ciò non è, le EF , GH , prolungate, si incontreranno dalla parte di E e G , o dalla parte di F e H . Si prolunghino dalla parte di F e H e concorrano in K .

Poichè EFK è nel piano AB , anche tutti i punti della EFK sono nel piano AB (XI, 1). Ma K è uno dei punti della retta EFK , quindi K è nel piano AB . Per la stessa ragione K è anche nel piano CD e perciò i piani



AB , CD , prolungati, concorrono. Ma non concorrono, perchè sono supposti paralleli, quindi le rette EF , GH , prolungate dalla parte di F e H , non concorrono.

Similmente dimostreremo che le rette EF , GH , anche prolungate dalla parte di E e G , non concorrono.

Poichè non concorrono nè dall'una nè dall'altra parte, sono parallele (I, term. 23): quindi EF è parallela a GH .

Dunque se due piani paralleli si segano con un piano qualunque, le loro comuni intersezioni sono parallele,

c. d. d.

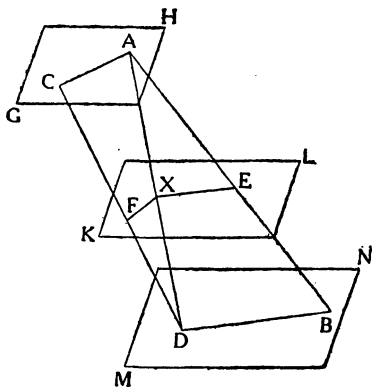
Uno scoliasta ha creduto di potere invertire la proposizione nel seguente modo: *se le comuni intersezioni di piani con un piano sono parallele, anche i piani sono paralleli*, ciò che è evidentemente falso.

CLAVIO aggiunge come scolio una proposizione analoga alla I, 30: *piani paralleli ad uno stesso piano, sono paralleli tra loro*, e GIORDANO VITALE dimostra che: *se due piani che si intersecano sono segati da un altro piano secondo due rette parallele, queste sono parallele alla comune intersezione dei due piani*.

17.

Se due rette sono tagliate da piani paralleli, sono tagliate nello stesso rapporto.

Poichè le rette AB , CD sono incontrate dai piani GH , KL , MN nei punti A , E , B , C , F , D , dico che la retta AE sta alla EB come la CF sta alla FD .



Si conducano le AC , BD , AD ; la AD incontri il piano KL nel punto X e si conducano le EX , FX .

Poichè i due piani KL , MN sono incontrati dal piano EBD , le loro comuni intersezioni EX , BD sono parallele (XI, 16).

Per la stessa ragione, poichè i due piani paralleli GH , KL sono incontrati dal piano $AXFC$, le loro comuni intersezioni CA , FX sono parallele.

E poichè nel triangolo ABD si è condotta la retta EX parallela ad uno dei lati BD , si ha il rapporto AE ad EB come AX a XD (VI, 2).

Di nuovo poichè nel triangolo ADC si è condotta la XF parallela al lato AC , si ha il rapporto AX ad XD come CF ad FD .

Ma si è dimostrato anche che come AX ad XD così AE ad EB e quindi come AE ad EB , così CF ad FD (V, 11).

Dunque due rette tagliate da piani paralleli sono segate nello stesso rapporto,

c. d. d.

Questa proposizione estende il cosiddetto *teorema di Talete*, di cui si è discusso a proposito della prop. VI, 2.

Le nozioni che EUCLIDE dà sui piani paralleli e sulle rette e piani paralleli sono molto limitate e racchiuse nelle proposizioni 14, 15, 16, 17.

Con L. BERTRAND e LEGENDRE si incomincia ad intercalare, tra queste proposizioni euclidee, altre proprietà. Nei testi rispondenti alla moderna sistemazione logica della geometria, si suole dare dapprima la definizione della retta parallela ad un piano o come retta non avente punti a comune col piano o come luogo di punti equidistanti, e si dimostrano, in ordine diverso secondo i testi, le seguenti proprietà:

Se un piano interseca una retta, interseca anche ogni retta parallela alla retta data.

Se per un punto esterno ad un piano si conduce la parallela ad una retta del piano, la retta tracciata è parallela al piano.

Ogni piano passante per una retta parallela ad un piano e secante tale piano, lo sega secondo una retta parallela alla retta data.

Se due piani, che si intersecano, passano per due rette parallele, la loro intersezione risulta parallela a quelle rette; dalla quale discende la XI, 9:

Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.

Si passa quindi a definire i piani paralleli come non aventi punti in comune, o come equidistanti, e si dimostra che:

Se un piano sega due piani paralleli, le intersezioni sono parallele (XI, 16).

Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela all' uno è parallela anche all' altro, o sta su di esso.

Tutte le rette per un punto parallele ad un piano che non passa pel punto stanno in un piano parallelo al dato.

Per un punto che non sta sopra un piano dato, passa un sol piano parallelo al piano dato.

Due piani paralleli ad un terzo sono paralleli tra loro.

Se due piani sono paralleli, ogni piano che interseca l' uno interseca anche l' altro.

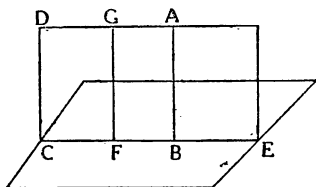
Due piani paralleli intercettano su rette parallele segmenti uguali, coll' aiuto della quale si deduce facilmente la presente proposizione.

18.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, anche tutti i piani per essa sono perpendicolari allo stesso piano.

Se la retta AB è perpendicolare al piano di riferimento, dico che tutti i piani per AB sono perpendicolari al piano di riferimento.

Si conduca per AB il piano DE e la comune intersezione del piano DE e di quello di riferimento sia CE ; si prenda anche su CE un punto qualunque F e da F si conduca, nel piano DE , la perpendicolare FG alla CE .



Poichè la AB è perpendicolare al piano di riferimento, la AB è perpendicolare anche a tutte le rette che la intersecano e che sono sul piano di riferimento (XI, 3), quindi è perpendicolare anche alla CE : l'angolo ABF è perciò retto.

Ma anche GFB è retto, quindi la AB è parallela alla FG (I, 28). Inoltre la AB è perpendicolare al piano di riferimento, quindi anche la FG è perpendicolare al piano di riferimento (XI, 8).

Un piano è perpendicolare ad un piano quando la retta perpendicolare alla comune intersezione dei piani, condotta sopra uno dei piani, è perpendicolare all'altro piano (XI, term. 4); ora si è dimostrato che la FG , condotta nel piano DE , perpendicolare alla comune intersezione CE dei piani, è anche perpendicolare al piano di riferimento: quindi DE è perpendicolare al piano di riferimento.

Similmente dimostreremo anche che tutti i piani per

AB si incontrano perpendicolarmente col piano di riferimento.

Dunque se una retta è perpendicolare ad un piano anche tutti i piani per essa sono perpendicolari allo stesso piano,

c. d. d.

Data la def. 4 di piani perpendicolari, EUCLIDE, per dimostrare la proposizione, deve fare vedere che qualunque perpendicolare GF condotta nel piano DE alla CE risulta perpendicolare al piano di riferimento.

Ora, seguendo L. BERTRAND, si chiamano perpendicolari due piani formanti un diedro retto, e le dimostrazioni di questa proposizione e della seguente sono assai semplificate (cfr. ENRIQUES e AMALDI, *Geometria elementare*).

19.

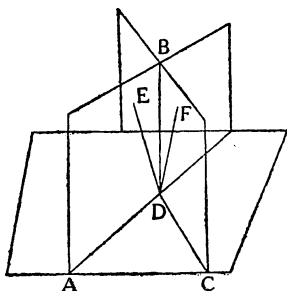
Se due piani, che si intersecano, sono perpendicolari ad un piano, anche la loro comune intersezione è perpendicolare allo stesso piano.

I piani AB , BC siano perpendicolari al piano di riferimento e BD sia la loro comune intersezione: dico che la BD è perpendicolare al piano di riferimento.

Non sia vero; e dal punto D si conduca nel piano AB la DE perpendicolare alla retta AD e nel piano BC la DF perpendicolare a CD .

Poichè il piano AB è perpendicolare al piano di riferimento, e in esso si è condotta la DE perpendicolare alla

comune intersezione AD , la DE è perpendicolare al piano di riferimento.



Similmente dimostriamo che anche DF è perpendicolare al piano di riferimento. Dallo stesso punto D si sono così innalzate, dalla stessa parte, due rette perpendicolari al piano di riferimento: ciò è impossibile (XI, 13).

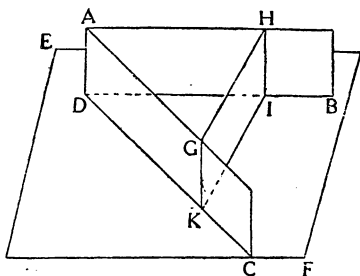
Dal punto D non si può quindi innalzare nessuna retta perpendicolare al piano di riferimento all'infuori della BD comune intersezione dei piani AB , BC .

Dunque se due piani che si intersecano sono perpendicolari ad un piano, anche la loro comune intersezione è perpendicolare allo stesso piano,

c. d. d.

GIORDANO VITALE ha già dimostrato (cfr. nota ad XI, 16) che se due piani sono intersecati da un terzo secondo rette parallele, queste sono parallele alla intersezione dei due piani: ora per dimostrare questa proposizione considera il piano $GKIH$ delle due perpendicolari GK , HI al piano EF tracciate ciascuna su uno dei piani perpendicolari; la AD risulta parallela alle GK , HI e quindi (XI, 8) è perpendicolare al piano EF .

L. BERTRAND, seguito poi da LEGENDRE, premette la proposizione, equivalente alla definizione euclidea dei piani perpendicolari: *se due piani sono perpendicolari, ogni retta condotta in uno*



di essi perpendicolare alla comune intersezione è perpendicolare anche all'altro piano. Da questa proprietà segue subito la proposizione euclidea.

L. BERTRAND mostra anche che ogni piano passante per una retta perpendicolare a un piano è perpendicolare a questo piano.

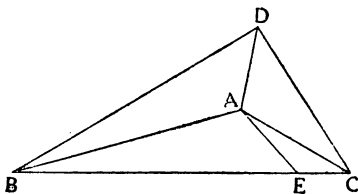
20.

Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, due di questi angoli, presi comunque insieme, superano il rimanente.

L'angolo solido in A comprenda i tre angoli piani BAC , CAD , DAB : dico che due qualunque degli angoli BAC , CAD , DAB , presi comunque insieme, superano il rimanente.

Se gli angoli BAC , CAD , DAB sono uguali tra loro è evidente che due qualunque di essi superano il rima-

nente. Se ciò non è, \widehat{BAC} sia maggiore e si costruisca colla retta AB , e dal suo punto A , nel piano BAC , l'angolo BAE uguale all'angolo DAB ; si ponga AD uguale ad AE e condotta pel punto E la BEC , questa segghi le rette AB, AC nei punti B, C e si conducano le DB, DC .



Poichè la DA è uguale alla AE ed AB è comune, due lati sono uguali a due lati, e l'angolo DAB è uguale all'angolo BAE , quindi la base DB è uguale alla base BE (I, 4). E poichè i due lati BD, BC , insieme, sono maggiori di DC (I, 20) e si è dimostrato che DB è uguale a BE , il lato DC è maggiore della differenza EC .

Quindi, poichè DA è uguale ad AE , AC è comune e la base DC è maggiore della base EC , l'angolo DAC è maggiore dell'angolo EAC (I, 25). Si è poi costruito \widehat{BAE} uguale a \widehat{DAB} , quindi \widehat{DAB} e \widehat{DAC} insieme sono maggiori di \widehat{BAC} .

Nello stesso modo dimostreremo che anche altri due angoli, presi comunque insieme, sono maggiori del rimanente.

Dunque se un angolo solido è formato da tre angoli piani, due di essi, presi comunque insieme, superano il rimanente,
c. d. d.

EUCLIDE ammette come evidente il solo caso in cui gli angoli siano uguali tra loro. Risulta però evidente anche il caso in cui due degli angoli risultino uguali e maggiori del terzo: questa osservazione si trova già in TARTAGLIA, CLAVIO e GIORDANO VITALE, i quali la interpolano nel testo.

Le parole « \widehat{BAC} sia maggiore » sono interpretate dalla maggiore parte dei traduttori nel senso che \widehat{BAC} sia il massimo degli angoli, ma, come osserva giustamente l'HEIBERG, ciò non è necessario e occorre sottintendere « maggiore di \widehat{BAD} », cioè basta che l'angolo \widehat{BAC} , che si considera a sè, sia maggiore di uno dei due angoli che si considerano insieme.

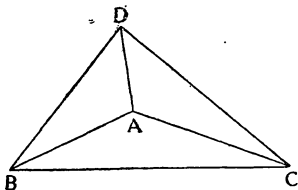
SIMSON prende in esame anche il caso in cui \widehat{BAC} sia uguale ad uno degli angoli rimanenti, nel quale caso la proposizione euclidea risulta evidente, qualunque sia la relazione di grandezza rispetto al terzo angolo.

La proprietà si estende facilmente agli angoloidi qualunque.

21.

Ogni angolo solido è contenuto da angoli piani la cui somma è minore di quattro retti.

Sia l'angolo solido in A racchiuso dagli angoli piani



BAC , CAD , DAB ; dico che \widehat{BAC} , \widehat{CAD} , \widehat{DAB} insieme sono minori di quattro retti.

Si prendano su ciascuna delle AB , AC , AD i punti qualunque B , C , D e si conducano le BC , CD , DB .

Poichè l'angolo solido in B è racchiuso dagli angoli piani CBA , ABD , CBD , la somma di due qualunque di essi è maggiore del rimanente (XI, 20), quindi \widehat{CBA} e \widehat{ABD} insieme sono maggiori di \widehat{CBD} .

Per la stessa ragione \widehat{BCA} e \widehat{ACD} insieme sono maggiori di \widehat{BCD} , così \widehat{CDA} e \widehat{ADB} insieme sono maggiori di \widehat{CDB} .

Quindi i sei angoli \widehat{CBA} , \widehat{ABD} , \widehat{BCA} , \widehat{ACD} , \widehat{CDA} , \widehat{ADB} insieme sono maggiori dei tre \widehat{CBD} , \widehat{BCD} , \widehat{CDB} insieme; ma i tre \widehat{CBD} , \widehat{BCD} , \widehat{CDB} insieme sono uguali a due retti (I, 32), quindi i sei angoli \widehat{CBA} , \widehat{ABD} , \widehat{BCA} , \widehat{ACD} , \widehat{CDA} , \widehat{ADB} insieme sono maggiori di due retti.

E poichè i tre angoli di ciascuno dei triangoli ABC , ACD , ADB sono eguali a due retti, i nove angoli \widehat{CBA} , \widehat{ACB} , \widehat{BAC} , \widehat{ACD} , \widehat{CDA} , \widehat{CAD} , \widehat{ADB} , \widehat{DBA} , \widehat{BAD} dei tre triangoli sono insieme uguali a sei retti, dei quali i sei angoli \widehat{ABC} , \widehat{BCA} , \widehat{ACD} , \widehat{CDA} , \widehat{ADB} , \widehat{DBA} insieme sono maggiori di due retti. I tre angoli rimanenti \widehat{BAC} , \widehat{CAD} , \widehat{DAB} , racchiudenti l'angolo solido, sono quindi insieme minori di quattro retti.

Dunque ogni angolo solido è contenuto da angoli piani la cui somma è minore di quattro retti,

c. d. d.

EUCLIDE enuncia questa proposizione in generale e la dimostra solo pel caso del triedro. Ecco come la dimostrano TARTAGLIA e CLAVIO, seguiti poi da LEGENDRE, pel caso di un angoloide di n facce: Si seghi l'angoloide con un piano non passante pel vertice, nè parallelo ad uno degli spigoli: si otterrà in tal modo

una piramide. Gli angoli degli n triangoli laterali della piramide valgono in tutto $2n$ retti; gli angoli della base sono $2n - 4$ retti; quindi gli angoli dei triangoli superano di 4 retti gli angoli della base. Ma gli angoli alle basi dei triangoli sono maggiori degli angoli della base (XI, 20), cioè sono maggiori di $2n - 4$ retti, quindi gli angoli al vertice della piramide sono minori di quattro retti, c. d. d.

La proprietà si può estendere anche ricorrendo al principio d'induzione, poichè riesce semplice il dimostrarla per l'angoloide a quattro facce (cfr. per es. ENRIQUES e AMALDI).

In queste due ultime proposizioni EUCLIDE dà solo le relazioni di grandezza tra le facce di un triedro. A queste si possono aggiungere le note relazioni tra i diedri:

Un diedro di un triedro aumentato di due retti è maggiore della somma degli altri due;

La somma dei diedri di un triedro è maggiore di due retti e minore di sei retti;

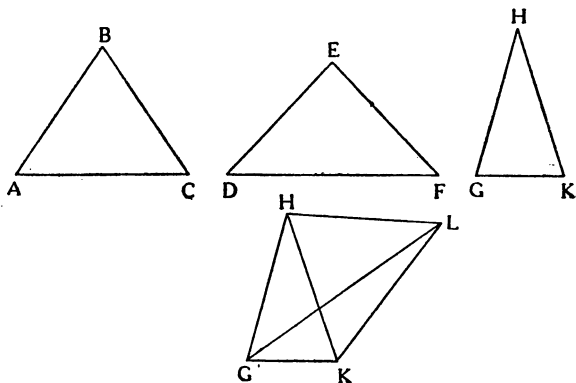
che si deducono ricorrendo al triedro polare (cfr. la nota alla XI, 26).

22.

Se si hanno tre angoli piani, due dei quali, comunque presi insieme, sono maggiori del rimanente e sono racchiusi da lati uguali, è possibile formare un triangolo con le congiungenti i lati uguali.

Siano i tre angoli piani \widehat{ABC} , \widehat{DEF} , \widehat{GHK} due dei quali, comunque presi insieme, sono maggiori del rimanente: così \widehat{ABC} e \widehat{DEF} insieme sono maggiori di \widehat{GHK} , \widehat{DEF} e \widehat{GHK} insieme sono maggiori di \widehat{ABC} , \widehat{GHK} e \widehat{ABC} insieme sono maggiori di \widehat{DEF} ; inoltre i lati AB , BC , DE , EF , GH , HK siano uguali. Si conducano le AC , DF , GK : dico che è possibile costruire un triangolo

con lati uguali alle AC , DF , GK , cioè che la somma di due qualunque delle AC , DF , GK è maggiore della rimanente.



Se gli angoli \widehat{ABC} , \widehat{DEF} , \widehat{GHK} sono uguali, è evidente che le AC , DF , GK risultano uguali (I, 4) e che è possibile costruire un triangolo con lati uguali alle rette AC , DF , GK .

Siano disuguali, e si costruisca con il lato HK e dal punto H l'angolo KHL uguale ad \widehat{ABC} e si ponga HL uguale ad una qualunque delle AB , BC , DE , EF , GH , HK e si conducano le KL , GL .

Poichè i due lati AB , BC sono uguali a KH , HL e l'angolo in B è uguale a \widehat{KHL} , la base AC è uguale alla base KL (I, 4) e poichè \widehat{ABC} e \widehat{GHK} insieme sono maggiori di \widehat{DEF} , e \widehat{ABC} è uguale a \widehat{KHL} , allora \widehat{GHL} è maggiore di \widehat{DEF} .

Ma i lati GH , HL sono uguali a DE , EF e l'angolo

GHL è maggiore dell'angolo DEF , quindi la GL è maggiore della base DF (I, 24).

Ma KL è uguale ad AC , quindi AC e GK insieme sono maggiori di DF .

Similmente dimostreremo che anche AC e DF insieme sono maggiori di GK , e che DF e GK insieme sono maggiori di AC .

È possibile dunque costruire un triangolo con lati uguali alle AC , DF , GK ,

c. d. d.

Come nella proposizione XI 20, anche qui EUCLIDE dà come evidente il caso in cui gli angoli siano tutti uguali tra loro. La proposizione è però evidente anche quando due angoli sono uguali ed il terzo è minore di questi. Resta il caso in cui è $\widehat{ABC} > \widehat{DEF} \geq \widehat{GHK}$; allora è anche $AC > DF \geq GK$; si hanno quindi le disuguaglianze immediate:

$$AC + DF > GK, \quad AC + GK > DF:$$

e resta solamente da dimostrare che $GK + DF > AC$, cioè che la somma dei lati sottesi dai due angoli minori è maggiore del lato sotteso dall'angolo massimo. Questa è in fondo la via seguita in una dimostrazione interpolata che l'HEIBERG ha incontrato in diversi codici e che è riportata da parecchi traduttori (COMMANDINO, CLAVIO, GIORDANO VITALE, SIMSON).

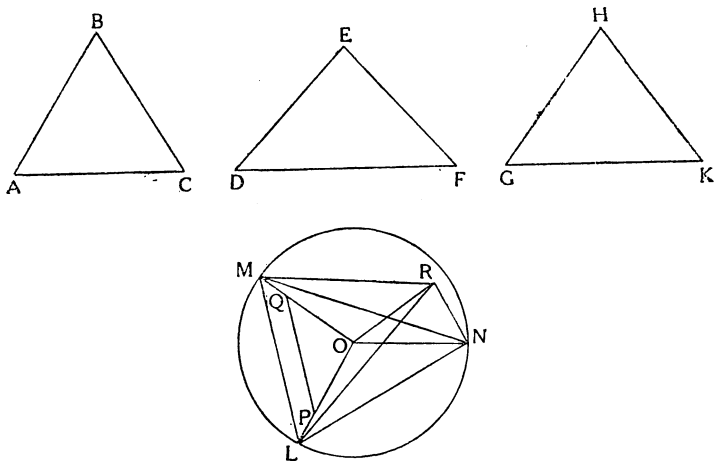
Uno scoliasta enuncia la proposizione, che è l'estensione di quella euclidea: *Se si hanno quanti si vogliono angoli piani racchiusi da lati uguali tali che ciascuno di essi è maggiore della somma dei rimanenti, dico che ciascuna delle rette sottese dagli angoli è minore della somma delle altre e che è possibile costruire con esse un poligono.*

Questa proposizione è riportata dal COMMANDINO dopo XI, 23.

23.

Con tre angoli piani, due dei quali comunque presi insieme sono maggiori del rimanente, costruire un angolo solido; occorre che la somma dei tre angoli sia minore di quattro retti (XI, 21).

Siano dati i tre angoli piani ABC , DEF , GHK , due dei quali, comunque presi insieme, sono maggiori del rimanente, e inoltre la somma dei tre angoli è minore di quattro retti: occorre dunque costruire un angolo solido coi tre angoli uguali agli angoli \widehat{ABC} , \widehat{DEF} , \widehat{GHK} .



Si prendano AB , BC , DE , EF , GH , HK uguali e si conducano le AC , DF , GK : è dunque possibile costruire un triangolo con rette uguali alle AC , DF , GK (XI, 22). Si costruisca LMN in modo che la AC sia uguale alla

LM , la DF a MN e infine la GK alla NL e si circoscriva al triangolo LMN il cerchio LMN (IV, 5). Sia O il centro del cerchio e si conducano le LO , MO , NO : dico che AB è maggiore di LO . Non sia vero: allora è AB uguale o minore di LO .

Sia da prima uguale. Poichè AB è uguale a LO e inoltre AB è uguale anche a BC e OL a OM , i due lati AB , BC sono uguali ciascuno a ciascuno a LO e MO ; la base AC è uguale alla base LM , quindi l'angolo ABC è uguale a \widehat{LOM} (I, 8). Per la stessa ragione anche \widehat{DEF} è uguale a \widehat{MON} e inoltre \widehat{GHK} a \widehat{NOL} . Quindi la somma dei tre angoli ABC , DEF , GHK è uguale alla somma di \widehat{LOM} , \widehat{MON} , \widehat{NOL} . Ma \widehat{LOM} , \widehat{MON} , \widehat{NOL} insieme sono uguali a quattro retti (I, 13), quindi anche gli angoli \widehat{ABC} , \widehat{DEF} , \widehat{GHK} sono uguali a quattro retti. Ma li supponemmo minori di quattro retti, quindi l'assurdo. Quindi AB non è uguale a LO .

Ora dico che AB stesso non può essere minore di LO : se è possibile, sia; e poniamo AB uguale ad OP e BC uguale ad OQ , conduciamo quindi PQ .

Poichè AB è uguale a BC , allora OP è uguale ad OQ , e il rimanente LP è uguale a QM . Dunque LM è parallelo a PQ (VI, 2) e LMO è equiangolo a PQO (I, 29): si ha quindi che OL sta a LM come OP a PQ (VI, 4), da cui permutando: LO sta ad OP come LM a PQ (V, 16). Ma LO è maggiore di OP : quindi anche LM è maggiore di PQ (V, 14). Ponemmo poi LM uguale ad AC , quindi AC è maggiore di PQ . Poichè i due lati AB , BC sono uguali ai due lati PO , OQ e la

base AC è maggiore della base PQ , l'angolo ABC è maggiore dell'angolo POQ (I, 25).

Similmente dimostreremo che anche \widehat{DEF} è maggiore di \widehat{MON} e \widehat{GHK} di \widehat{NOL} . Quindi la somma dei tre angoli ABC , DEF , GHK è maggiore della somma di \widehat{LOM} , \widehat{MON} , \widehat{NOL} insieme. Ma abbiamo supposto \widehat{ABC} , \widehat{DEF} , \widehat{GHK} insieme minori di quattro retti, quindi a maggior ragione \widehat{LOM} , \widehat{MON} , \widehat{NOL} , insieme, sono minori di quattro retti; ma invece sono uguali a quattro retti, quindi si ha l'assurdo. Dunque AB non è minore di LO . Si è già dimostrato che non è uguale, quindi AB è maggiore di LO .

Si innalzi allora dal punto O la OR perpendicolare al piano del cerchio LMN (XI, 12) e l'eccesso del quadrato di AB sopra quello di LO sia uguale a quello di OR ; si traccino poscia le RL , RM , RN .

Poichè OR è perpendicolare al piano del cerchio LMN , la OR è perpendicolare anche a ciascuna delle rette LO , MO , NO . E poichè LO è uguale a OM e OR è perpendicolare comune, la base RL è perciò uguale alla base RM (I, 4).

Per la stessa ragione RN è uguale a RL e a RM ; quindi le tre rette RL , RM , RN sono uguali tra loro. E poichè si è supposto che l'eccesso del quadrato di AB sopra quello di LO sia uguale a quello di OR , il quadrato di AB è allora uguale a quelli di LO e di OR insieme; ma quello di RL è uguale a quelli sopra LO e OR , perchè \widehat{LOR} è retto (I, 47), quindi il quadrato di AB è uguale a quello di RL : dunque AB è uguale a RL .

Ma AB è uguale a ciascuna delle BC, DE, EF, GH, HK , e RL è uguale a ciascuna delle RM, RN , quindi ciascuna delle AB, BC, DE, EF, GH, HK è uguale a ciascuna delle RL, RM, RN .

E poichè i due lati LR, RM sono uguali ai due lati AB, BC e la base LM è uguale alla base AC , l'angolo LRM è uguale all'angolo ABC (I, 8); per la stessa ragione \widehat{MRN} è uguale a \widehat{DEF} e \widehat{NRL} è uguale a \widehat{GHK} .

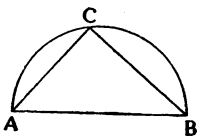
Dunque coi tre angoli piani LRM, NRM, LRN , che sono uguali ai tre angoli dati ABC, DEF, GHK , si è costruito un angolo solido in R racchiuso dagli angoli $\widehat{LRM}, \widehat{MRN}, \widehat{LRN}$,

c. d. d.

COROLLARIO.

Come sia possibile il supporre che l'eccesso del quadrato di AB sopra quello di LO sia uguale a quello di OR , lo dimostreremo così:

Si considerino le rette AB, LO , e AB sia la maggiore: su di essa si descriva il semicerchio ABC e nel semicer-



chio ABC si adatti la retta AC uguale a LO , che non è maggiore del diametro AB (IV, 1), e si conduca la CB .

Poichè l'angolo ACB è nel semicerchio ACB , esso è

retto (III, 31), e quindi il quadrato di AB è uguale a quelli di AC e CB (I, 47), perciò l'eccesso di quello di AB sopra quello di AC è uguale a quello di CB . Ma AC è uguale a LO : quindi l'eccesso del quadrato di AB sopra quello di LO è quello di CB .

Dunque se assumiamo OR uguale a BC l'eccesso del quadrato di AB sopra quello di LO è quello di OR ,

c. d. d.

L'importanza di questa proposizione nel trattato euclideo consiste in ciò: che in essa viene dimostrata l'univocità della costruzione del triedro dati gli angoli che ne costituiscono le facce, subordinatamente alle disuguaglianze cui esse debbono soddisfare. A dir vero, i triedri che si possono costruire in base alle condizioni anzidette sono due, simmetrici rispetto ad un piano: ma essi sono uguali, a parte il verso che EUCLIDE non si ferma ad osservare.

Pertanto la costruzione indicata contiene in sostanza il teorema: *Due triedri aventi rispettivamente uguali le facce sono uguali* (direttamente, o inversamente); e così appare giustificato che EUCLIDE nella prop. 26 concluda appunto all'uguaglianza di due triedri quando ha riconosciuto l'uguaglianza delle loro facce.

Il rapporto tra questa dimostrazione di EUCLIDE e qualcuna delle più recenti dimostrazioni dei criteri d'uguaglianza dei triedri verrà chiarito nella nota alla XI, 26.

La lunghezza della dimostrazione della prop. 23 è data dalla necessità di provare che $AB > LO$, per potere poi assumere $\overline{OR}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{LO}^2$. Ma la dimostrazione euclidea è incompleta, poichè, circoscrivendo il cerchio ad un triangolo, si possono presentare, rispetto alla posizione del centro, tre casi (IV, 5):

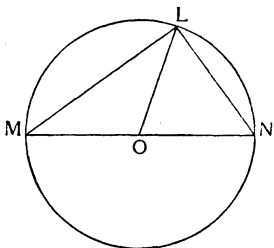
- 1) il centro è interno al triangolo;
- 2) il centro è sopra un lato del triangolo;
- 3) il centro è esterno al triangolo.

In ciò che precede è considerato solo il primo caso, ma in alcuni codici e in quasi tutti i traduttori (escluso però CAMPANO) si trovano esaminati anche gli altri due. Questa parte deve considerarsi interpolata da qualche commentatore, poichè essa segue la chiusura « come dovevasi fare » e perchè non vi è parola della distinzione dei tre casi.

Ecco brevemente la dimostrazione pei casi 2), 3):

2) Supponiamo, se è possibile, $AB = LO$. Allora $DE + EF = MO + OL > MN = DF$, ciò che contraddice alla I, 20.

Se si suppone $AB < LO$, ne verrebbe il risultato maggiormente contraddittorio $DE + EF < DF$.



3) Supponiamo, se è possibile, $AB = LO$. Allora nei triangoli ABC , LOM è $AB = LO$, $BC = OM$, $AC = LM$, quindi $\widehat{ABC} = \widehat{LOM}$. Similmente è $\widehat{GHK} = \widehat{NOL}$. Sommando si ha $\widehat{MON} = \widehat{ABC} + \widehat{GHK}$, ma per ipotesi è $\widehat{ABC} + \widehat{GHK} > \widehat{DEF}$, quindi $\widehat{MON} > \widehat{DEF}$.

Ora il triangolo DEF è uguale al triangolo MON , quindi si ha $\widehat{MON} = \widehat{DEF}$, ma si è dimostrato che è anche maggiore, quindi l'assurdo.

Supponiamo ora, se è possibile, $AB < LO$. Si prenda allora su OM e OL due punti Q , P tali che $OP = OQ = AB$. Poichè LM è parallelo a PQ , si ha

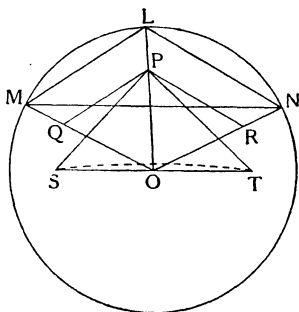
$$LM : PQ = LO : OP,$$

ma è $LO > OP$, quindi anche LM , ossia AC , è maggiore

di PQ . Nei triangoli ABC , POQ è perciò $\widehat{ABC} > \widehat{POQ}$, ossia $\widehat{ABC} > \widehat{LOM}$.

Similmente, prendendo $OR = AB$ sopra ON , si dimostra che $\widehat{GHK} > \widehat{LON}$.

Allora in O si costruiscano gli angoli $\widehat{POS} = \widehat{ABC}$, $\widehat{POT} = \widehat{GHK}$ e preso $OS = OT = OP$, si conducano ST , SP , TP .



Nei triangoli uguali ABC , POS è $AC = PS$, quindi è $LM = PS$. Similmente è $LN = PT$.

Poichè $\widehat{MLN} > \widehat{SPT}$, è $MN > ST$, ossia $DF > ST$. Allora nei triangoli DEF , SOT , aventi due lati uguali, è $DF > ST$, quindi è $\widehat{DEF} > \widehat{SOT}$. Ma per costruzione è

$$\widehat{SOT} = \widehat{ABC} + \widehat{GHK},$$

dunque $\widehat{DEF} > \widehat{ABC} + \widehat{GHK}$, ciò che contraddice le ipotesi.

SIMSON riferisce una dimostrazione diversa considerando tutti e tre i casi.

EUCLIDE ammette in questa dimostrazione che gli angoli intorno ad un punto siano uguali a quattro retti: ciò non è stato mai detto esplicitamente, ma segue immediatamente da I, 13; confronta in proposito I, 15, *coroll.* e la nota relativa. Noteremo infine che la costruzione data nel corollario di questa proposizione è già data in X, 13, *coroll.*

Gli stessi codici che riportano come scolio la generalizzazione della proposizione XI, 22 (cfr. la relativa nota), danno, a comple-

mento della proposizione che stiamo esaminando, gli scolii seguenti riportati dal COMMANDINO:

1) *Se da un punto elevato cadono sopra un piano delle rette uguali, i loro estremi stanno sopra una circonferenza, e la retta che si conduce da quel punto al centro del cerchio è perpendicolare al piano del cerchio; dalla quale segue il corollario:*

Ogni angolo solido racchiuso da triangoli isosceli ha la base inscritta in un cerchio.

2) *Con più angoli piani dati (uno dei quali, comunque preso, sia maggiore della somma dei rimanenti) costruire un angolo solido.*

Questo ultimo scolio enuncia un problema che ammette più soluzioni. Mentre con tre angoli dati si possono costruire solamente due triedri (quello costruito da EUCLIDE ed il suo simmetrico: vedi la nota alla XI, 26), con quattro o più angoli dati è possibile, come ha mostrato il SIMSON, costruire più angoloidi diversi anche disponendo le facce nello stesso ordine. Per costruire un angoloide di n facce occorre dare, oltre alle facce nel loro ordine, anche $n - 3$ diedri consecutivi.

24.

Se un solido è racchiuso da piani paralleli, i piani di esso, opposti tra loro, sono uguali e parallelogrammi.

Il solido $CDHG$ sia racchiuso dai piani paralleli AC , GF , AH , DF , BF , AE : dico che i piani opposti sono uguali tra loro e parallelogrammi.

Poichè i due piani paralleli BG , CE sono segati dal piano AC , le loro intersezioni comuni sono parallele (XI, 14), quindi AB è parallela a DC . Di nuovo, poichè i due piani paralleli BF , AE sono segati dal piano AC , le loro comuni intersezioni sono parallele, quindi BC è parallelo ad AD .

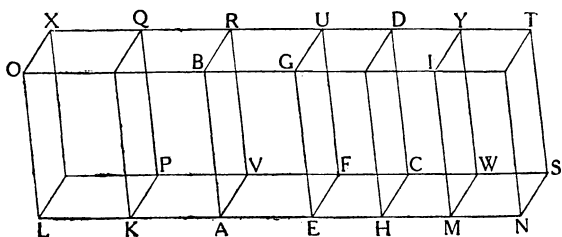
L'enunciato di questa proposizione, come nota l'HEIBERG, non è preciso: si deve intendere un solido compreso da sei piani due a due paralleli. Inoltre, come avverte SIMSON, le facce opposte non sono soltanto uguali (nel senso estensivo di EUCLIDE), ma anche simili: ciò è essenziale per alcune proposizioni che seguono.

25.

Se un solido parallelepipedo è diviso da un piano parallelo a due piani opposti, la base sta alla base, come il solido al solido.

Il solido parallelepipedo $ABCD$ sia diviso dal piano GF parallelo ai piani opposti RA , DH ; dico che la base $AEFV$ è alla base $EHCF$ come il solido $ABFU$ al solido $EGCD$.

Si prolunghi la AH da ambo le parti e si prendano tante rette AK , KL quante si vogliono uguali ad AE e



tante rette HM , MN quante si vogliono uguali ad EH ; si completino quindi i parallelogrammi LP , KV , HW , MS e i solidi LQ , KR , DM , MT .

Poichè le rette LK , KA , AE sono uguali tra loro, i parallelogrammi LP , KV , AF sono pure uguali tra loro; i parallelogrammi KO , KB , AG sono uguali fra loro, come lo sono LX , KQ , AR , poichè sono opposti (XI, 24). Per la stessa ragione i parallelogrammi EC , HW , MS sono uguali tra loro, come sono uguali tra loro HG , HI , IN e anche DH , MY , NT .

Dunque tre piani dei solidi LQ , KR , AU sono uguali a tre piani. Ma quei tre piani sono uguali ai loro tre piani opposti (XI, 24), quindi i tre solidi LQ , KR , AU sono uguali tra loro.

Per la stessa ragione i tre solidi ED , DM , MT sono pure uguali tra loro.

Allora, quante volte la base LF è molteplice della base AF , tante volte il solido LU è molteplice del solido AU . Per la stessa ragione, quante volte la base NF è molteplice della base FH , tante volte il solido NU è molteplice del solido HU . E se la base LF è maggiore della base NF , il solido LU è maggiore del solido NU , e, se è minore, sarà minore.

Ma date quattro grandezze (le due basi AF , FH e i due solidi AU , UH) si sono prese le equimolteplici della base AF e del solido AU (la base LF e il solido LU), della base FH e del solido HU (la base NF e il solido NU) e si è dimostrato che se la base LF supera la base NF , anche il solido LU supera il solido NU e se è uguale, è uguale, e se è minore, è minore.

Quindi la base AF sta alla base FH , come il solido AU al solido UH (V, term. 5), c. d. d.

Questa proposizione si può dimostrare anche per un prisma qualunque. Il CLAVIO infatti dimostra la proprietà pei prismi triangolari e la generalizza ad un prisma qualunque decomponendo le basi in triangoli e quindi il prisma in prismi triangolari.

COMMANDINO aggiunge (*De centro gravitatis solidorum*, prop. XVIII) questo complemento: *In un parallelepipedo segato da un piano parallelo alle basi, il solido sta al solido come l'altezza all'altezza.*

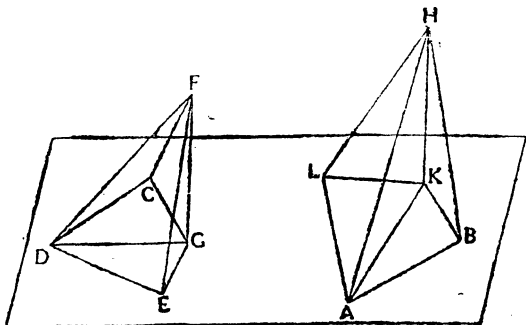
Dall'uguaglianza delle facce (che si deve intendere in senso estensivo) EUCLIDE deduce l'uguaglianza estensiva dei parallelepipedi LQ , KR , AU , ED , DM , MT . Ma per applicare la def. 10 egli avrebbe dovuto dimostrare che le facce sono anche simili, cioè congruenti. Perciò appunto occorre l'avvertenza di SIMSON richiamata nella nota precedente.

EUCLIDE, come già abbiamo notato, non dà la definizione di parallelepipedo.

26.

Sopra una data retta, e in un punto di essa, costruire un angolo solido uguale ad un angolo solido dato.

Sia AB la retta data e A un suo punto dato; sia poi dato l'angolo solido in D racchiuso dagli angoli piani



EDC, EDF, FDC . Occorre dunque costruire sulla AB e nel punto A di essa un angolo solido uguale all'angolo solido in D .

Si prenda sulla DF un punto qualunque F e da F si mandi al piano delle ED, DC (XI, 11) la perpendicolare FG che incontri il piano in G . Si conduca la DG e con la retta AB nel punto di essa A si costruisca l'angolo BAL uguale a \widehat{EDC} e quindi \widehat{BAK} uguale a \widehat{EDG} (I, 23) e si prenda AK uguale a DG . Si innalzi nel punto K la HK perpendicolare al piano BAL (XI, 12) e si prenda KH uguale a FG e si conduca la HA .

Dico che l'angolo solido in A , racchiuso dagli angoli BAL, BAH, HAL , è uguale all'angolo solido in D racchiuso dagli angoli EDC, EDF, FDC .

Prendiamo AB e DE uguali e conduciamo le HB, KB, FE, GE . Poichè FG è perpendicolare al piano di riferimento e forma angoli retti con tutte le rette che la toccano e sono nel piano di riferimento (XI, term. 3), ciascuno degli angoli FGD, FGE è retto. Per la stessa ragione ciascuno degli angoli HKA, HKB è retto. E poichè i due lati KA, AB sono uguali ciascuno ai due lati GD, DE e racchiudono angoli uguali, la base KB è uguale alla base GE (I, 4). Ma anche KH è uguale a GF e racchiudono angoli retti, quindi HB è uguale ad FE (I, 4).

Di nuovo, poichè i due lati AK, KH sono uguali ai due lati DG, GF e racchiudono angoli retti, la base AH è uguale alla base DF (I, 4). Ma anche AB è uguale a DE e i due lati HA, AB sono uguali ai lati DF, DE ,

inoltre la base HB è uguale alla base FE , quindi l'angolo BAH è uguale all'angolo EDF (I, 8).

Per la stessa ragione anche \widehat{HAL} è uguale a \widehat{FDC} .
Ma anche \widehat{BAL} è uguale a \widehat{EDC} ; dunque sulla retta data AB e sul punto di essa A si è costruito un angolo solido uguale a quello dato in D , c. d. f.

Anche qui EUCLIDE enuncia la proposizione in generale e la dimostra pel solo triedro: è evidente però che la costruzione di un angolo solido avente un numero qualunque di facce si riduce a quella dei triedri, poichè basta dividere l'angolo solido in triedri, mediante la suddivisione in triangoli della sezione fatta con un piano che intersechi, non passando pel vertice, tutti gli spigoli.

Nella conclusione EUCLIDE ammette che due triedri aventi rispettivamente uguali le facce sono uguali. Alcuni commentatori notano che ciò può farsi derivare dalla def. 10 di questo libro, alla quale EUCLIDE sembra fare appello con la sua costruzione. Più precisamente ciò risulta dalla costruzione che ci offre nella Prop. 23.

Il SIMSON, seguito da altri editori (cfr. BETTI e BRIOSCHI), intercala fra la 23^a e la 24^a proposizione le seguenti:

Se due angoli solidi sono contenuti da tre angoli piani tra loro rispettivamente uguali, i piani nei quali sono gli angoli uguali saranno fra loro ugualmente inclinati, cioè sono uguali anche i diedri;

Se due angoli solidi sono contenuti da tre angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti (cioè di ugual verso) saranno uguali, cioè sono sovrapponibili;

Le figure solide che sono contenute da figure piane simili ed uguali di numero e di grandezza e similmente poste, e delle quali nessun angolo solido è contenuto da più di tre angoli piani, sono tra loro uguali e simili.

LEGENBRE, a queste proposizioni del SIMSON (la 2^a è un corollario della 1^a), fa seguire la risoluzione del problema:

Dati due dei tre angoli piani che formano un angolo solido e il diedro che questi piani devono formare fra loro, trovare il terzo angolo piano, problema che, riuscendo unica la soluzione quando è dato il verso, dà un criterio per riconoscere l'uguaglianza di due triedri.

La costruzione di EUCLIDE mette in gioco una corrispondenza tra figure in cui gli elementi omologhi sono uguali, corrispondenza che vale in sostanza a definire l'uguaglianza dei solidi di cui si tratta.

EUCLIDE non nota esplicitamente qui che si danno effettivamente due casi secondochè la corrispondenza conserva, o no, i versi degli angoloidi: il primo caso portando alla sovrapponibilità, il secondo, invece, alla simmetria. La frase che si trova nell'enunciato della seguente proposizione (« figure simili e *similmente poste* ») difficilmente può interpretarsi come un accenno a distinzione di verso, giacchè, trattandosi di un problema costruttivo, occorre pur precisare che le facce delle figure simili devono essere disposte *ordinatamente* (nel senso che a questa parola si attribuisce quando si parla di poligoni uguali). E qui è opportuno ricordare che per EUCLIDE l'uguaglianza non ha mai il significato moderno di congruenza, o sovrapponibilità, ma il senso più lato di uguaglianza estensiva (uguaglianza di grandezza come superficie, solido, ecc.).

La distinzione tra congruenza e simmetria, che MENELAO (I sec. d. C) doveva conoscere, ma che non ha esplicitamente rilevato (v. term. 10, nota), viene messa in luce da J. A. SEGNER (1741) e introdotta nel trattato scolastico di LEGENDRE. Col nome di *assioma di Segner* sembra fosse nota la proposizione: *Due figure simmetriche sono estensivamente uguali*, proposizione di cui, per i triangoli sferici, appare una dimostrazione in LEGENDRE basata sulla divisione di ciascuno dei triangoli dati in tre triangoli isosceli uguali (sovrapponibili) ciascuno a ciascuno (è noto che per i triangoli sferici isosceli non vi è differenza fra congruenza e simmetria).

Soltanto nei trattati moderni si trovano esplicitamente stabiliti i criteri d'uguaglianza dei triedri, che, pei triangoli sferici, compaiono già nella *Sphaerica* di MENELAO.

Dei quattro criteri d'uguaglianza, i primi due (due facce e il diedro compreso, o una faccia e i due diedri adiacenti uguali) si trovano dimostrati, in quasi tutti i trattati, per sovrapposizione dei due triedri dati, o dell'uno al simmetrico dell'altro. Il quarto criterio (uguaglianza dei tre angoli diedri) viene generalmente ricondotto al terzo (uguaglianza delle facce) ricorrendo al triedro supplementari (o polare), le cui facce sono i supplementi delle sezioni normali dei diedri del triedro dato. Il primo che abbia considerato il

triedro polare sembra sia stato il persiano NASIR-EDDIN (sec. XIII): tale considerazione si trova poi di nuovo in VIETA (1593) e finalmente, esposta in forma chiara e completa, in SNELLI (1627).

Riconducendosi, mediante il triedro polare, il quarto criterio al terzo, resta solo per quest'ultimo una certa libertà e varietà di dimostrazione.

Le dimostrazioni proposte si possono ricondurre ai seguenti tipi principali:

1) - Dimostrazioni nelle quali si prova *direttamente* che se due triedri hanno le facce rispettivamente uguali, essi hanno uguale anche un diedro (cioè la sua sezione normale).

La più semplice tra le dimostrazioni di questo tipo appartiene, a quanto pare, ad A. DEPARCIEUX (*Nouveaux traités de trigonometrie rectiligne et sphérique*, Paris 1741) e si ritrova poi, con leggere varianti di forma, in SIMSON (1756).

Essa consiste nel considerare le sezioni normali dei due diedri corrispondenti, che si ottengono in ciascuno dei triedri con piani perpendicolari ad uno spigolo ed equidistanti dai rispettivi vertici.

Nel caso in cui questi piani perpendicolari incontrino gli altri due spigoli, l'uguaglianza delle due sezioni suddette segue facilmente mediante la considerazione di triangoli uguali.

Questo caso risponde all'ipotesi che due delle facce dei triedri siano angoli acuti: se detta ipotesi non si verifica, basta ricorrere ad un semplice artificio indicato dall'AMIOT, ovvero paragonare in luogo dei triedri dati quelli che si ottengono sostituendo ad uno degli spigoli il raggio opposto.

In LEGENDRE, per la prova dell'uguaglianza dei diedri corrispondenti, si trova una dimostrazione notevolmente più complicata, che prende le mosse dalla XI, 35 di EUCLIDE. E questa dimostrazione ricompare, con qualche variante, in trattati francesi posteriori, ad esempio nel MÉRAY. La semplice dimostrazione DEPARCIEUX-SIMSON si ritrova invece in AMIOT e in altri trattatisti: in FAIFOFER essa è poi resa indipendente, mediante un artificio opportuno, dal postulato delle parallele.

2) - Dimostrazioni in cui l'uguaglianza dei diedri viene provata per assurdo, come conseguenza immediata della proposizione: « Se due facce di un triedro sono rispettivamente uguali

a due facce di un altro triedro, e se il diedro compreso dalle prime è maggiore del diedro compreso dalle altre due, la terza faccia del primo triedro è maggiore della terza faccia del secondo triedro ».

Tale dimostrazione, che è perfettamente simile a quella che LEGENDRE dà per i triangoli piani, si trova accennata nel trattato di ROUCHÉ-COMBEROUSSE (ad. es. nella IV edizione, del 1879).

3) - L'uguaglianza di due diedri appartenenti a triedri con le facce uguali, viene dimostrata in modo diverso da SANNIA e D'OVIDIO nelle più recenti edizioni del loro trattato (ad es. in quella del 1902). Si tratta di imitare la dimostrazione del teorema: « Due triangoli coi lati uguali sono uguali », quale si ottiene portando i due triangoli ad essere simmetrici rispetto ad una base comune e riconoscere così l'uguaglianza degli angoli ai vertici come somma di angoli alla base di due triangoli isosceli (cfr. nota alla I, 8).

Nel caso che siano dati due triedri con le facce uguali, ma di verso opposto, si costruiranno due triedri direttamente uguali ad essi e simmetrici rispetto ad una faccia comune e si riconoscerà l'uguaglianza dei diedri opposti a questa come somma di diedri opposti a facce uguali di due triedri isosceli.

Qualora i due triedri abbiano ugual verso, si potrà ripetere il ragionamento precedente, sostituendo ad uno dei triedri il suo simmetrico.

4) - Dimostrazione in cui si riconosce la sovrapponibilità, o la simmetria, delle piramidi ottenute staccando sugli spigoli dei triedri segmenti uguali.

Questa dimostrazione deriva direttamente dalla costruzione data da EUCLIDE nella XI, 23 e si ritrova, spiegata col linguaggio del movimento, in alcuni trattati moderni; per esempio nelle prime edizioni del SANNIA e D'OVIDIO (cfr. la III^a edizione del 1876).

Si segni il primo triedro $OABC$ con un piano che tagli gli spigoli in tre punti A, B, C equidistanti da O , e lo stesso si faccia pel secondo triedro $O'A'B'C'$ rendendo inoltre $O'A' \equiv OA$. Ciò posto, si portino i tetraedri $OABC, O'A'B'C'$ ad avere la base ABC comune ($AB \equiv A'B', BC \equiv B'C', CA \equiv C'A'$). Allora i vertici O, O' si troveranno sulla perpendicolare alla base condotta per il punto che è centro del cerchio circoscritto ad ABC , e do-

vranno quindi coincidere, o essere simmetrici rispetto al piano di tale base.

Una variante di questa dimostrazione si trova in vari testi, ove i due triedri vengono segati da due piani qualunque, in modo che sia $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $OC \equiv O'C'$.

5) - Infine una dimostrazione basata solo sull'uguaglianza dei triangoli e indipendente dal postulato delle parallele si trova nel trattato di ENRIQUES e AMALDI (1903), dove i criteri d'uguaglianza dei triedri sono ricondotti a riconoscere che sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali sono uguali, e viceversa.

Per uno sviluppo più largo di tali questioni, cfr. A. FRAJESE, l. c.

Nel secondo volume del già citato *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (Ginevra 1778) di L. BERTRAND si trovano esposti tutti i sei criteri di uguaglianza dei triedri, che vengono dimostrati tutti direttamente, senza ricorrere esplicitamente alla dualità. Precisamente i criteri 1) e 2) sono dimostrati mediante sovrapposizione; il 3° è ricondotto al primo dimostrando l'uguaglianza delle sezioni rette di due diedri omologhi ed il 4° è dimostrato attraverso una lunga e laboriosa costruzione non disgiunta dal movimento.

Ai quattro criteri elementari L. BERTRAND aggiunge altri due criteri studiando completamente la questione se un triedro sia determinato date due facce e un diedro qualunque opposto ad una di esse, o dati due diedri e una faccia qualunque opposta ad uno di essi. Nella prima ipotesi, indicando con A e B le facce date e con a il diedro dato, opposto alla faccia A , BERTRAND giunge ai risultati che indichiamo nel seguente specchio:

se $a = 90^\circ$	1	soluzione		
se $a < 90^\circ$ e	{	$A > B$ 1	soluzione
			$A < B$ 2	soluzioni
se $a > 90^\circ$ e	{	$A < B$ 1	soluzione
			$A > B$ 2	soluzioni
se $a \neq 90^\circ$ e		$A = 90^\circ$ 2	soluzioni

Nella seconda ipotesi giunge a risultati, che si possono dedurre dai precedenti per dualità.

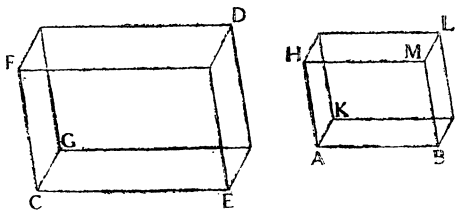
27.

Sopra una data retta costruire un solido parallelepipedo simile e similmente posto ad un parallelepipedo dato.

Sia AB la retta data e CD il solido parallelepipedo dato. Occorre dunque costruire sulla retta AB un parallelepipedo simile e similmente posto al parallelepipedo dato CD .

Si costruisca sulla retta AB e nel punto A di essa un angolo solido uguale all'angolo solido in C e racchiuso da \widehat{BAH} , \widehat{BAK} , \widehat{KAH} , in modo che l'angolo BAH sia uguale ad \widehat{ECF} , \widehat{BAK} a \widehat{ECG} e \widehat{KAH} a \widehat{GCF} , (XI, 26). Si faccia poi EC sta a CG come BA ad AK e GC sta a CF come KA ad AH . Allora, per uguaglianza, EC sta a CF come BA ad AH (V, 22). Si completi poscia il parallelogrammo HB e il solido AL .

Poichè EC sta a CG come BA ad AK e i lati racchiudenti gli angoli uguali ECC , BAK sono proporzio-



nali, il parallelogrammo GE è simile al parallelogrammo KB . Per la stessa ragione il parallelogrammo KH è simile al parallelogrammo GF ed FE ad HB . Quindi tre paral-

lelogrammi del solido CD sono simili a tre parallelogrammi del solido AL .

Ma da una parte tre parallelogrammi sono uguali e simili ai tre opposti, dall'altra tre parallelogrammi sono uguali e simili ai tre opposti, quindi tutto il solido CD è simile a tutto il solido AL .

Dunque sulla retta data AB si è costruito il solido parallelepipedo simile e similmente posto al parallelepipedo CD dato, c. d. f.

Come abbiamo accennato nella nota precedente, le parole « similmente poste » che figurano in questa proposizione non sembrano significare uguaglianza di verso, ma solo uguale disposizione delle facce simili attorno ai vertici corrispondenti.

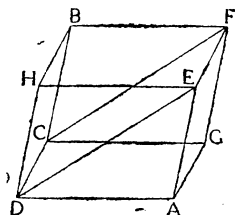
28.

Se si divide un solido parallelepipedo con un piano passante per le diagonali di piani opposti, il solido è diviso dal piano in due parti uguali.

Se si divide il solido parallelepipedo AB col piano $CDEF$ passante per le diagonali CF , DE dei piani opposti, dico che il solido AB è diviso in due parti uguali da $CDEF$.

Il triangolo CGF è uguale al triangolo CFB , e ADE a DEH (I, 34), il parallelogrammo CA è uguale ad EB , perchè opposti, e GE a CH (XI, 24). Quindi il prisma, racchiuso dai triangoli CGF , ADE e dai tre parallelo-

grammi GE , AC , CE , è uguale al prisma racchiuso dai due triangoli CFB , DEH e dai tre parallelogrammi CH ,



BE , CE , poichè sono racchiusi da piani uguali e in ugual numero (XI, term. 10).

Dunque tutto il solido AB è diviso in due parti uguali dal piano $CDEF$, c. d. d.

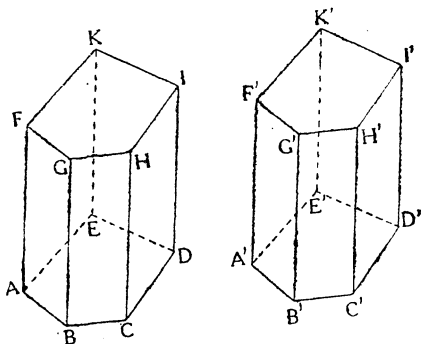
Nelle ultime righe della dimostrazione, dove s'invoca la Def. XI, 10, è sottinteso che le facce dei due solidi sono non soltanto estensivamente uguali, ma anche simili. Giova notare che i due prismi triangolari in cui il parallelepipedo viene diviso sono effettivamente simmetrici rispetto al centro del solido. È verosimile che EUCLIDE abbia riconosciuto che essi non sono sovrapponibili, e nondimeno egli non esita ad attribuir loro uguale estensione, forse perchè appare in qualche modo evidente che l'uno non può essere maggiore dell'altro. Comunque, si può vedere qui anticipato il cosiddetto *assioma di Segner* (cfr. nota alla Prop. XI, 26).

EUCLIDE non dimostra che le diagonali di due facce opposte sono in un piano. Ecco come CLAVIO supplisce a questa mancanza: Poichè le EF , CD sono parallele tanto alla AG che alla BH , esse sono parallele tra loro. Vi è quindi un piano per le CD , EF e le diagonali DE , CF sono in tale piano (XI, 7). E poichè CD , EF sono uguali e parallele, anche le DE , CF sono uguali e parallele.

LEGENDRE giunge a dimostrare la proprietà enunciata da EUCLIDE attraverso le seguenti proposizioni:

I. *Due prismi sono uguali quando hanno un angolo solido compreso fra tre piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente posti.*

Sia la base $ABCDE$ uguale alla base $A'B'C'D'E'$ e i parallelogrammi $ABGF$, $CBGH$ ordinatamente uguali ai parallelogrammi



$A'B'G'F'$, $C'B'G'H'$. Si porti la base $ABCDE$ sopra la base $A'B'C'D'E'$: essendo uguali coincideranno.

Le facce del triedro \widehat{B} si sono supposte uguali alle facce del triedro $\widehat{B'}$ e poichè \widehat{ABC} si è portato a coincidere con $\widehat{A'B'C'}$, segue che BG si è sovrapposto a $B'G'$. Allora, per l'uguaglianza dei parallelogrammi, si ha che FG coinciderà con $F'G'$ e GH con $G'H'$: dunque la base $FGHIK$ coinciderà con la base $F'G'H'I'K'$.

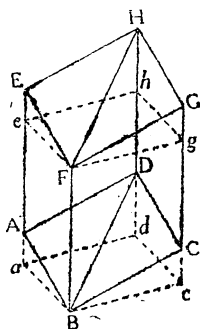
I due solidi, avendo ora gli stessi vertici, coincideranno dunque i due prismi dati sono uguali.

II. *In ogni prisma le sezioni fatte con piani paralleli sono uguali.*

I lati dei poligoni giacenti su una stessa faccia del prisma sono paralleli perchè dati dalle intersezioni dei due piani paralleli col piano della faccia, e sono uguali perchè compresi tra rette parallele. Gli angoli corrispondenti sono poi uguali perchè compresi da lati paralleli.

III. *I due prismi triangolari $ABDHEF$, $BCDFGH$, nei quali si decompone il parallelepipedo AG , sono equivalenti.*

Pei vertici B ed F conduciamo i piani $Badc$, $Fehg$ perpendicolari allo spigolo BF : le sezioni $Badc$, $Fehg$ risulteranno dei



parallelogrammi uguali (prop. II). Si avrà così il solido $BadcFehg$, il quale è un parallelepipedo retto.

Segati i due parallelepipedi col piano $BDHF$, diciamo che il prisma triangolare obliquo $ABDEFH$ è equivalente al prisma triangolare retto $BadFeh$.

Poichè i prismi hanno la parte comune $ABDheF$, basterà provare che le parti restanti $BaADD$, $FeEHh$ sono equivalenti.

Ora è $Aa = Ee$ e $Dd = Hh$, perchè differenze di segmenti uguali: quindi se cerchiamo di sovrapporre i solidi $BaADD$, $FeEHh$ facendo coincidere la base Feh colla base uguale Bad , accadrà che il punto e coinciderà con a e il punto h col punto d : dunque i lati eE , hH si sovrappongono rispettivamente ai lati aA , dD , perchè sono perpendicolari allo stesso piano Bad . I due solidi vengono allora a sovrapporsi, quindi il prisma obliquo è equivalente al prisma retto.

In modo analogo si dimostra che il prisma obliquo $BDCFHG$ è equivalente al prisma retto $BdcFhg$.

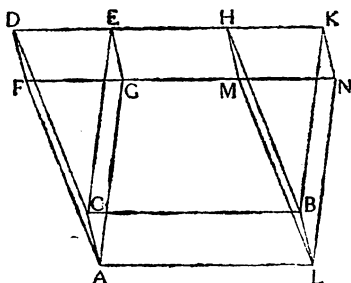
Ma i due prismi retti $BadFeh$, $BdcFhg$ sono uguali avendo la stessa altezza BF e basi uguali, come metà dello stesso parallelogrammo. Dunque i due prismi triangolari $ABDEFH$, $BDCFHG$ sono equivalenti, perchè equivalenti a due prismi uguali.

I solidi parallelepipedi aventi la stessa base e la stessa altezza e le cui rette elevate terminano sulle stesse rette, sono uguali tra loro.

Sulla stessa base AB , siano i solidi parallelepipedi CM , CN colla stessa altezza e le rette elevate AG , AF , LM , LN , CD , CE , BH , BK siano sulle stesse rette FN , DK . Dico che il solido CM è uguale al solido CN .

Poichè ciascuno dei piani CH , CK è un parallelogrammo, la CB è uguale a ciascuna delle DH , EK (I, 34), e allora DH è uguale a EK . Togliendo la parte comune EH , il rimanente DE è uguale al rimanente HK .

Quindi il triangolo AFG è uguale al triangolo MLN , e il parallelogrammo CF è uguale al parallelogrammo



BM e CG è uguale a BN (XI, 24), perchè opposti.

Dunque il prisma racchiuso dai due triangoli AFG , DEC e dai tre parallelogrammi AD , DG , GC è uguale

al prisma racchiuso dai due triangoli MLN , HBK e dai tre parallelogrammi BM , HN , NB ; si aggiunga il solido comune che ha per basi i parallelogrammi opposti AB e $GEHM$.

Allora tutto il solido parallelepipedo CM è uguale al solido parallelepipedo CN .

Dunque i solidi parallelepipedi aventi la stessa base e la stessa altezza e le cui rette elevate sono sulle stesse rette, sono uguali tra loro,

c. d. d.

È la proposizione analoga alla I, 35, colla sostituzione di un prisma triangolare ad un triangolo.

CLAVIO esamina anche i casi in cui E coincida con H e in cui DH non abbia parti in comune con EK : per la dimostrazione ricorre all'equivalenza per differenza.

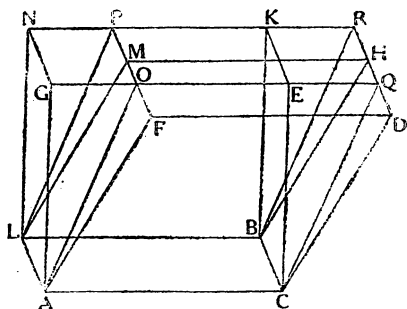
30.

I solidi parallelepipedi aventi la stessa base e la stessa altezza e le cui rette elevate non terminano sulle stesse rette, sono uguali tra loro.

Sulla stessa base AB siano i solidi parallelepipedi CM , CN , colla stessa altezza e le rette elevate AF , AG , LM , LN , CD , CE , BH , BK non terminino sulle stesse rette. Dico che il solido CM è uguale al solido CN .

Si prolunghino le NK , DH e s'incontrino in R , si prolunghino poscia le FM , GE fino in P e in Q e si conducano AO , LP , CQ , BR .

Allora il solido CM , che ha per base il parallelogrammo $ACBL$ (cui è opposto $FDHM$), è uguale al solido



CP , che ha per base il parallelogrammo $ACBL$ (cui è opposto $OQRP$), poichè stanno sulla stessa base $ACBL$ e hanno la stessa altezza e le rette elevate AF , AO , LM , LP , CD , CQ , BH , BR terminano sulle stesse rette FP , DR (XI, 29).

Ma il solido CP , che ha per base il parallelogrammo $ACBL$, cui è opposto $OQRP$, è uguale al solido CN , che ha per base il parallelogrammo $ACBL$, cui è opposto $GEKN$, poichè, di nuovo, stanno sulla stessa base $ACBL$ e hanno la stessa altezza e le rette elevate AG , AO , CE , CQ , LN , LP , BK , BR , terminano sulle stesse rette GQ , NR (XI, 29).

Il solido CM è quindi uguale al solido CN .

Dunque i solidi parallelepipedi aventi la stessa base e la stessa altezza e le cui rette elevate non terminano sulle stesse rette, sono uguali tra loro,

c. d. d.

CLAVIO e GIORDANO VITALE invertono questa proposizione e la precedente nella:

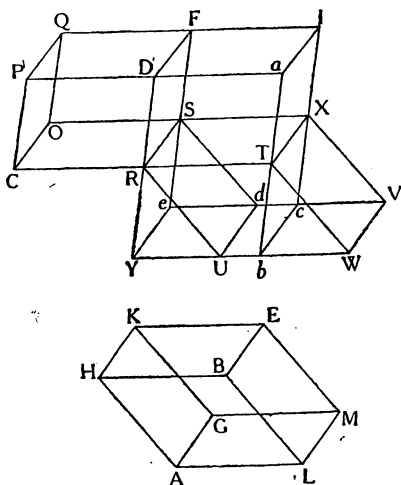
Se solidi parallelepipedi uguali sono sulla stessa base colle rette elevate terminanti nelle stesse rette, o no, essi hanno uguale altezza.

31.

I solidi parallelepipedi aventi basi uguali e la stessa altezza sono uguali tra loro.

I solidi parallelepipedi AE , CF siano sulle basi uguali AB , CD e colla stessa altezza. Dico che il solido AE è uguale al solido CF .

Dapprima le rette elevate HK , BE , AG , LM , PQ , DF , CO , RS siano perpendicolari alle basi AB , CD ; si



porti per diritto alla retta CR la retta RT ; quindi colla

RT , nel suo punto R , si costruisca l'angolo TRU uguale all'angolo ALB (I, 23), si ponga quindi RT uguale ad AL e RU uguale ad LB e si completi la base RW e il solido XU .

Poichè le due rette TR, RU sono uguali alle AL, LB e racchiudono angoli uguali, il parallelogrammo RW è uguale e simile al parallelogrammo HL (VI, 14).

Poichè di nuovo, AL è uguale a RT , e LM a RS e contengono angoli retti, il parallelogrammo RX è uguale e simile al parallelogrammo AM (VI, 14)).

Per la stessa ragione LE è uguale e simile ad SU , quindi tre parallelogrammi del solido AE sono uguali e simili a tre parallelogrammi del solido XU .

Ma in ciascuno dei parallelepipedi tre parallelogrammi sono uguali e simili ai tre opposti (XI, 24), quindi tutto il solido parallelepipedo AE è uguale a tutto il solido parallelepipedo XU (XI, term. 10).

Si prolunghino le DR, WU e s'intersechino in Y ; per T si mandi la parallela Tb alla DY e si prolunghi la PD fino ad incontrare la Tb in a ; si completino quindi i solidi YX, RI .

Il solido YX , di cui il parallelogrammo RX è la base alla quale è opposto il parallelogrammo Yc , è uguale al solido XU , di cui il parallelogrammo RX è la base (alla quale è opposto UV), poichè stanno sulla stessa base RX , hanno la stessa altezza e le loro rette elevate $RY, RU, Tb, TW, Se, Sd, Xc, XV$ terminano sulle stesse rette $YW, e V$ (XI, 29).

Ma il solido XU è uguale al solido AE , quindi il solido XY è pure uguale al solido AE . Il parallelogrammo $RUWT$ è uguale al parallelogrammo YT , essendo sulla stessa base RT e tra le stesse parallele RT, YW (I, 35), e $RUWT$ è uguale a CD , poichè è uguale ad AB : il parallelogrammo YT è quindi uguale a CD . Ma DT è pure un parallelogrammo, quindi la base CD sta a DT come YT a DT (V, 7).

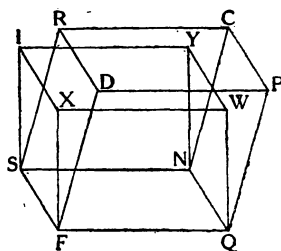
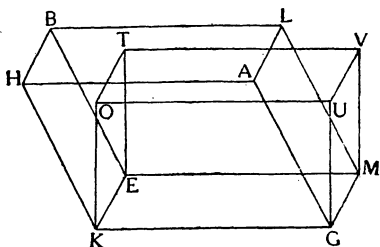
E poichè il solido parallelepipedo CI è segato dal piano RF , parallelo ai piani opposti, la base CD sta alla base DT come il solido CF sta al solido RI (XI, 25).

Per la stessa ragione, poichè il solido parallelepipedo YI è segato dal piano RX parallelo a piani opposti, la base YT sta alla base TD come il solido YX sta al solido RI (XI, 25). Ma la base CD sta a DT come YT a DT , quindi il solido CF sta al solido RI , come il solido YX sta a RI (V, 11). Ciascuno dei solidi CF, YX ha dunque con RI la stessa ragione; quindi il solido CF è uguale al solido YX (V, 9). Ma si è dimostrato che YX è uguale ad AE , quindi AE è uguale anche a CF .

Ora le rette elevate $AG, HK, BE, LM, CN, PQ, DF, RS$ non siano perpendicolari alle basi AB, CD . Dico di nuovo che il solido AE è uguale al solido CF .

Dai punti K, E, G, M, Q, F, N, S si conducano le $KO, ET, GU, MV, QW, FX, NY, SI$ perpendicolari al piano di riferimento, e queste incontrino il piano nei punti O, T, U, V, W, X, Y, I ; si conducano poscia le $OT, OU, UV, TV, WX, WY, YI, IX$.

Il solido KV è uguale al solido QI , poichè stanno sulle basi uguali KM , QS , hanno la stessa altezza e le loro



rette elevate sono perpendicolari alle basi (XI, 31, parte prima).

Inoltre il solido KV è uguale al solido AE , e QI è uguale a CF , poichè stanno sulla stessa base e hanno la stessa altezza e le loro rette elevate non terminano sulle stesse rette (XI, 30).

Quindi il solido AE è uguale al solido CF .

Dunque i solidi parallelepipedi aventi basi uguali e la stessa altezza sono uguali tra loro,

c. d. d.

La dimostrazione di EUCLIDE, come osservano anche altri commentatori, è fra le più belle ed ingegnose degli Elementi.

Si tratta di dimostrare, nel nostro linguaggio, che parallelepipedi con basi equivalenti e con altezze uguali sono equivalenti.

In virtù della Prop. XI, 30, ci si può ridurre al caso in cui i due parallelepipedi dati A , B abbiano gli spigoli elevati sulle basi a , b perpendicolari a queste: che è il primo caso trattato dalla dimostrazione.

Adottando dunque quest'ipotesi, EUCLIDE costruisce un parallelepipedo B' uguale al dato B , che abbia la base b' sullo stesso piano della base a di A (ciò che implicherebbe un semplice trasporto del solido B). Quindi costruisce sopra un lato di b' un parallelogrammo equivalente c che sia equiangolo con a : il quale naturalmente avrà la stessa altezza di b' corrispondente al lato comune.

Infine costruisce su c come base un parallelepipedo C con gli spigoli perpendicolari al piano di c , e paragona i parallelepipedi A , C , B' , B .

Si dimostra l'equivalenza dei parallelepipedi A e C in virtù della Prop. XI, 25, che dice in sostanza: i parallelepipedi con basi equiangole e altezze uguali stanno tra loro come le basi. Si riconosce poi l'equivalenza di C e B' come parallelepipedi aventi una base comune (perpendicolare al piano di riferimento) e la medesima altezza.

Il punto più delicato della dimostrazione consiste precisamente nel riconoscere l'equivalenza dei parallelepipedi A e C , le cui basi, nel nostro caso, hanno una coppia di angoli opposti al vertice, così da dar luogo alla figura dello gnomone contemplata nelle Prop. I, 43 e 44. In luogo di considerare i rapporti di questi parallelogrammi rispetto ad uno di quelli traversati dalla diagonale, EUCLIDE poteva invocare il teorema che i detti parallelogrammi a e c sono differenze di triangoli uguali.

Così la teoria euclidea dell'equivalenza dei parallelepipedi verrà fondata sulla proprietà che poligoni (o più precisamente parallelogrammi) aventi superficie uguali sono sempre equivalenti per somma o per differenza. Se, ora, seguendo la critica moderna iniziata dal DUHAMEL, si costruisce la teoria dell'equivalenza tra poligoni fondandosi soltanto sul criterio dell'equivalenza per somma, risulta

subito che parallelepipedi con basi equivalenti sono somma di parallelepipedi con basi uguali, e perciò riescono sempre equivalenti per somma quando abbiano altezze uguali. Si ottiene in tal guisa, non soltanto un risultato più significativo (decomponibilità in parti uguali dei parallelepipedi equivalenti), ma anche un assetto più semplice di questa dottrina.

SIMSON osserva che EUCLIDE non considera il caso in cui le basi dei parallelepipedi AE , CF siano equiangole e aggiunge, alla prima parte della dimostrazione, anche la dimostrazione di questo caso. Ciò però non è necessario, poichè tutto si riduce a considerare UW coincidente con Yb e dV con ce .

Inoltre SIMSON osserva anche che nella dimostrazione della seconda parte non si dimostra che il nuovo solido che vi si costruisce sia un parallelepipedo. Tale fatto è però così evidente che il non avervi accennato non costituisce un difetto di questa ingegnosa dimostrazione euclidea.

CAMPANO ha una dimostrazione della prima parte un po' più semplice e che si trova riportata anche dal CLAVIO.

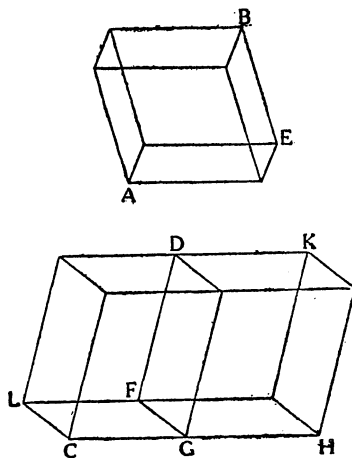
32.

I solidi parallelepipedi aventi la stessa altezza sono tra loro come le basi.

I solidi parallelepipedi AB , CD abbiano la stessa altezza. Dico che i solidi parallelepipedi AB , CD sono tra loro come le basi, cioè che la base AE sta alla base CF , come il solido AB sta al solido CD .

Si costruisca sulla FG un parallelogrammo FH uguale ad AE (I, 45) e sulla base FH , colla stessa altezza di CD , si completi il solido parallelepipedo GK . Il solido

AB è uguale al solido GK , perchè stanno sulle basi uguali AE , FH e hanno la stessa altezza (XI, 31).



Poichè il solido parallelepipedo CK è segato dal piano DG parallelo a piani opposti, la base CF sta alla base FH come il solido CD sta al solido GK (XI, 25). Ma la base FH è uguale alla base AE e il solido GK è uguale al solido AB , quindi la base AE sta alla base CF come il solido AB sta al solido CD .

Dunque i solidi parallelepipedo aventi la stessa altezza sono tra loro come le basi,

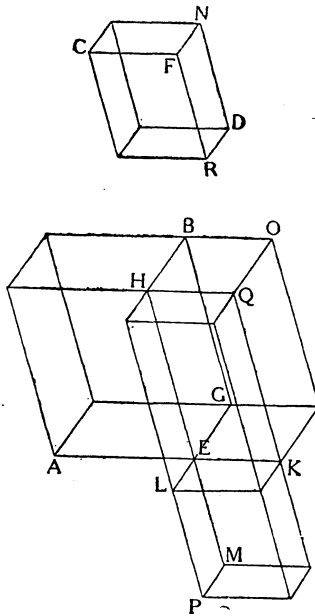
c. d. d.

Qui viene estesa la Prop. 25, adoperando la Prop. 31, che a sua volta è basata su quella.

33.

I solidi parallelepipedi simili sono in ragione triplicata dei lati omologhi.

I solidi parallelepipedi AB , CD siano simili ed il lato AE sia omologo di CF . Dico che il solido AB al solido



CD ha ragione triplicata di quella di AE a CF .

Si aggiunga EK , EL , EM per diritto alle AE , GE , HE , si ponga poi EK uguale a CF , EL uguale a FN ed EM uguale a FR ; si completi quindi il parallelogrammo KL e il solido KP .

Poichè i due lati KE , EL sono uguali ai due lati CF , FN , e l'angolo KEL è uguale all'angolo CFN (poichè AEG è uguale a CFN , per la similitudine dei solidi AB , CD), il parallelogrammo KL è uguale e simile al parallelogrammo CN . Per la stessa ragione il parallelogrammo KM è uguale e simile al parallelogrammo CR , e anche EP è uguale e simile a DF . Dunque tre parallelogrammi del solido KP sono uguali e simili a tre parallelogrammi del solido CD .

Ma da una parte tre parallelogrammi sono uguali e simili ai tre opposti, dall'altra tre parallelogrammi sono uguali e simili ai tre opposti; quindi tutto il solido KP è uguale e simile al solido CD (XI, term. 10).

Si completi il parallelogrammo GK e sui parallelogrammi GK , KL si completino i solidi EO , LQ aventi la stessa altezza di AB .

Per la similitudine dei solidi AB , CD , si ha che AE sta a CF come EG a FN , e come EH a FR (XI, term. 9; VI, term. 1), ma CF è uguale a EK , FN a EL , e FR a EM , quindi AE sta a EK come EG a EL e come HE a EM . Ma AE sta a EK come il parallelogrammo AG sta al parallelogrammo GK , GE sta a EL come GK a KL e HE sta a EM come QE a KM (VI, I), quindi il parallelogrammo AG sta a GK come GK a KL e come QE a KM .

Ma AG sta a GK come il solido AB sta al solido EO , GK sta a KL come il solido OE sta al solido QL e QE sta a KM come il solido QL sta al solido KP (XI, 32),

perciò il solido AB sta a EO come EO a QL e come QL a KP .

Ma, se quattro grandezze sono continuamente proporzionali, la prima alla quarta ha ragione triplicata di quella che ha alla seconda (V, def. 10), quindi il solido AB a KP ha ragione triplicata di quella di AB ad EO . Ma AB sta a EO come il parallelogrammo AG sta a GK e come la retta AE sta a EK , perciò il solido AB sta a KP in ragione triplicata di quella di AE a EK .

Il solido KP è uguale al solido CD e la retta EK è uguale a CF , perciò il solido AB al solido CD ha ragione triplicata di quella dei loro lati omologhi, cioè di quella di AE al lato omologo CF .

Dunque solidi parallelepipedi simili sono in ragione triplicata dei lati omologhi,

c. d. d.

COROLLARIO

Di qui è manifesto che, se quattro rette sono tra loro in proporzione continua, la prima sta alla quarta come il solido parallelepipedo costruito sulla prima sta a quello simile e similmente costruito sulla seconda, poichè la prima alla quarta ha ragione triplicata di quella che ha alla seconda.

HEIBERG dubita che il corollario sia genuino.

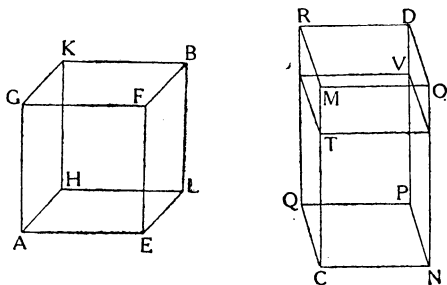
SIMSON aggiunge a questa proposizione la seguente: *I solidi parallelepipedi contenuti da parallelogrammi ordinatamente equi-*

angoli, ossia i solidi parallelepipedi aventi gli angoli solidi ordinatamente uguali tra loro, hanno tra loro la ragione composta della ragione dei lati.

34.

Le basi di solidi parallelepipedi uguali sono in ragione inversa delle altezze; e se le basi di solidi parallelepipedi sono in ragione inversa delle altezze, questi sono uguali.

Siano AB , CD solidi parallelepipedi uguali. Dico che le basi dei solidi parallelepipedi AB , CD sono in ragione inversa delle altezze; cioè la base EH sta alla base NQ come l'altezza del solido CD sta all'altezza del solido AB .



Dapprima, le rette elevate AG , EF , LB , HK , CM , NO , PD , QR siano perpendicolari alle loro basi. Dico che la base EH sta alla base NQ come CM sta ad AG .

Se la base EH è uguale alla base NQ e anche il solido AB è uguale al solido CD , CM è uguale ad AG , poichè

i solidi parallelepipedi di uguale altezza stanno tra loro come le basi (XI, 32). La base EH sta quindi alla base NQ come CM ad AG , ed è evidente che le basi dei solidi parallelepipedi AB , CD sono in ragione inversa delle altezze.

Non sia ora la base EH uguale alla base NQ , ma sia EH la maggiore; allora, poichè il solido AB è uguale al solido CD , è CM maggiore di AG . Si ponga dunque CT uguale ad AG e sulla base NQ , coll'altezza CT , si completi il solido parallelepipedo VC .

Poichè i solidi AB , CD sono uguali e grandezze uguali hanno ugual ragione rispetto alla stessa grandezza (V, 7), il solido AB sta al solido CV , come il solido CD sta al solido CV . Poichè i solidi AB , CV hanno uguale altezza, il solido AB sta al solido CV come la base EH sta alla base NQ (XI, 32), inoltre il solido CD sta al solido CV come la base MQ sta alla base TQ (XI, 25), e come CM sta a CT (VI, 1).

Ma CT è uguale ad AG , quindi si ha anche che la base EH sta alla base NQ , come MC ad AG . Dunque le basi dei solidi parallelepipedi AB , CD sono in ragione inversa delle altezze.

Ora, le basi dei solidi parallelepipedi AB , CD siano in ragione inversa delle altezze, e precisamente la base EH stia alla base NQ come l'altezza del solido CD sta all'altezza del solido AB . Dico che il solido AB è uguale al solido CD .

Siano, di nuovo, le rette elevate perpendicolari alle basi. Se la base EH è uguale alla base NQ , la base EH sta alla base NQ come l'altezza del solido CD sta all'al-

tezza del solido AB . Ma i solidi parallelepipedi posti su basi uguali, e aventi la stessa altezza, sono uguali tra loro (XI, 31), quindi il solido AB è uguale al solido CD .

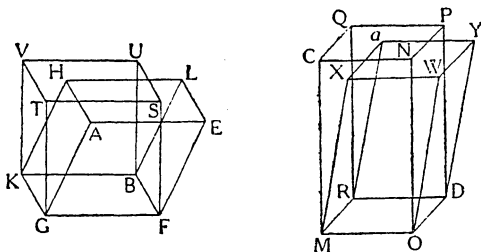
Ora la base EH non sia uguale alla NQ ed EH sia la maggiore; l'altezza del solido CD è allora maggiore dell'altezza del solido AB , cioè CM è maggiore di AG . Si ponga di nuovo CT uguale ad AG e si completi il solido CV .

Poichè la base EH sta alla base NQ come MC sta ad AG , e AG è uguale a CT , si ha che la base EH sta alla base NQ come CM sta a CT .

Poichè i solidi AB , CV hanno uguale altezza, la base EH sta alla base NQ come il solido AB sta al solido CV (XI, 32). Ma CM sta a CT come la base MQ sta alla base QT (VI, 1) e come il solido CD sta al solido CV (XI, 25), quindi il solido AB sta al solido CV come il solido CD sta al solido CV , dunque ciascuno dei solidi AB , CD ha lo stesso rapporto con CV . Il solido AB è allora uguale al solido CD (V, 9).

Le rette elevate FE , BL , GA , KH , ON , DP , MC , RQ non siano ora perpendicolari alle loro basi; allora dai punti F , G , B , K , O , M , D , R si conducano le perpendicolari ai piani EH , NQ , le quali incontrino questi piani nei punti S , T , U , V , W , X , Y , a ; si completino quindi i solidi FV , Oa . Dico che le basi dei solidi uguali AB , CD sono in rapporto inverso alle loro altezze, cioè EH sta ad NQ , come l'altezza del solido CD sta all'altezza del solido AB .

Il solido AB è uguale al solido CD , e AB è uguale a BT (XI, 29, 30), poichè hanno la stessa base FK e la stessa altezza. Il solido CD è uguale al solido DX , poichè stanno sulla stessa base RO e hanno la stessa altezza. Quindi il solido BT è uguale al solido DX . Allora la base FK sta alla base OR come l'altezza del solido DX sta all'altezza del solido BT .



Ma la base FK è uguale alla base EH e la base OR alla base NQ , quindi la base EH sta alla base NQ , come l'altezza del solido DX sta all'altezza del solido BT .

Ma l'altezza dei solidi DX , BT , e dei solidi DC , BA è la stessa, per cui la base EH sta alla base NQ come l'altezza del solido CD sta all'altezza del solido AB . Dunque le basi dei solidi parallelepipedi sono in ragione inversa delle altezze.

Ora le basi dei solidi parallelepipedi AB , CD stanno in ragione inversa con le altezze e sia la base EH alla base NQ come l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB . Dico che il solido AB è uguale al solido CD .

Colla stessa costruzione, poichè la base EH sta alla base NQ come l'altezza del solido CD sta all'altezza del

solido AB , e la base EH è uguale alla base FK e NQ è uguale a OR , la base FK sta alla base OR come l'altezza del solido CD sta all'altezza del solido AB . Ma l'altezza dei solidi AB , CD e dei solidi BT , DX è la stessa, quindi la base FK sta alla base OR come l'altezza del solido DX sta all'altezza del solido BT . Le basi dei solidi parallelepipedi BT , DX sono dunque in ragione inversa colle altezze, quindi il solido BT è uguale al solido DX . Ma BT è uguale a BA (XI, 29, 30), poichè stanno sulla stessa base FK e hanno la stessa altezza, e il solido DX è uguale al solido DC , quindi il solido AB è uguale al solido CD , c. d. d.

Questa proposizione si trova nei primi traduttori (CAMPANO, TARTAGLIA) suddivisa in due, l'una riguardante il parallelepipedo rettangolo e l'altra il parallelepipedo obliquo.

Nel principio della dimostrazione EUCLIDE ammette che *se due solidi parallelepipedi sono uguali ed hanno uguali le basi, anche le loro altezze sono uguali*.

La giustificazione, ritenuta genuina dall'HEIBERG, dice: « Poichè i solidi parallelepipedi di uguale altezza sono tra loro come le basi (XI, 32) », ma questa è seguita anche dalla spiegazione (che si trova riportata da parecchi traduttori, come COMMANDINO, SIMSON): « poichè se le basi EH , NQ sono uguali e le altezze AG , CM non sono uguali, il solido AB non può essere uguale al solido CD . « Ma sono uguali per ipotesi, quindi l'altezza CM non è disuguale all'altezza AG , e perciò sono uguali », spiegazione che invero si deduce direttamente dalla XI, 31.

TARTAGLIA, CLAVIO E GIORDANO VITALE portano invece la seguente variante al testo euclideo, la quale riesce assai più soddisfacente del testo ritenuto genuino dall'HEIBERG: « se le due altezze sono uguali, poichè i solidi parallelepipedi sono supposti uguali, anche le basi sono uguali per l'inversa della XI, 31 ».

Nella dimostrazione del teorema EUCLIDE ammette anche che se i parallelepipedi AB , CD sono uguali e la base EH è maggiore della base NQ , anche l'altezza CM è maggiore dell'altezza AG : di questa affermazione non si ha però, nel testo ritenuto genuino, alcuna spiegazione, poichè le parole « perchè altrimenti i solidi AB , CD non possono essere uguali, mentre sono supposti uguali », riportate dall'HEIBERG, sono ritenute interpolate. La verità dell'affermazione di EUCLIDE si può dedurre facilmente dalla XI, 32 con un procedimento di riduzione all'assurdo: « Se l'altezza CM fosse uguale all'altezza AG , il solido AB starebbe al solido CD come la base EH sta alla base NQ , cioè come il maggiore al minore: i solidi non sarebbero quindi uguali come è per ipotesi. Se poi è CM minore di AG , si aumenti l'altezza del solido CD fino a che sia uguale a quella del solido AB : è allora evidente che AB è maggiore del solido aumentato e quindi, a maggior ragione, maggiore del solido CD , e ciò in contraddizione coll'ipotesi ».

TARTAGLIA, CLAVIO e GIORDANO VITALE, considerando, come hanno già fatto prima, le altezze invece delle basi, evitano questa seconda affermazione di EUCLIDE dicendo: « le altezze non sono uguali, sia CM la maggiore » e quindi procedono colla costruzione euclidea. Questa variante riportata dai commentatori ora citati è assai vantaggiosa e trova riscontro nella proposizione corrispondente relativa ai cono e ai cilindri (XIII, 15), nella quale, appunto, si considerano dapprima le altezze uguali e poi disuguali senza porre alcuna preliminare relazione fra le basi.

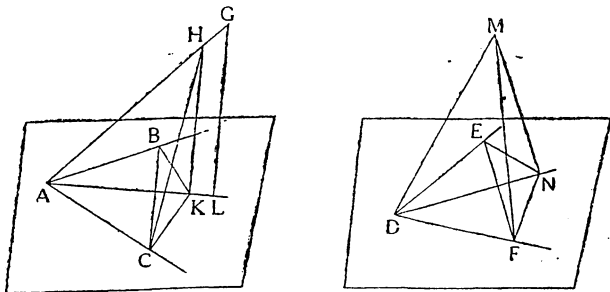
Il testo della seconda parte della dimostrazione, porta varie frasi esplicative, inutili e riempitive, che non abbiamo riportate nella traduzione, perchè da ritenersi, col SIMSON e coll'HEIBERG, opera di inesperti interpolatori.

La proposizione 34, come nota anche il CLAVIO, e le precedenti 29, 30, 31, 32, 33 valgono, sotto le stesse ipotesi, anche pei prismi a basi triangolari parallele: basta completare il parallelepipedo, il quale risulta decomposto in due prismi triangolari equivalenti (XI, 28).

35.

Abbiansi due angoli piani uguali, dai loro vertici si conducano due rette elevate sul piano che formino, coi lati degli angoli dati, angoli uguali ciascuno a ciascuno; sulle rette elevate si prenda un punto qualunque da cui si tiri la perpendicolare ai piani degli angoli; si conducano poi le congiungenti i punti, così ottenuti sui piani, coi vertici degli angoli dati: tali rette formano colle rette elevate angoli uguali.

Siano BAC , EDF gli angoli rettilinei uguali e dai punti A e D si mandino le rette elevate AG , DM formanti, con i lati degli angoli dati, angoli uguali ciascuno a ciascuno e cioè \widehat{MDE} uguale a \widehat{GAB} , \widehat{MDF} uguale a \widehat{GAC} . Sulle AG , DM si prendano i punti qualunque G , M ; si mandino quindi dai punti G , M le perpendicolari GL , MN ai piani BAC , EDF e queste incontrino



i piani in L , N ; si conducano poscia le LA , ND . Dico che l'angolo GAL è uguale all'angolo MDN .

Si ponga DM uguale ad AH e dal punto H si mandi la HK parallela a GL . Poichè GL è perpendicolare al piano BAC , anche la HK è perpendicolare al piano BAC (XI, 8).

Dai punti K, N si mandino le rette KC, KB, NF, NE , perpendicolari alle AC, AB, DF, DE e si conducano le HC, CB, MF, FE .

Il quadrato su HA è uguale alla somma di quelli su HK e su KA , quello su KA è uguale alla somma di quelli su KC e CA (I, 47), allora il quadrato su HA è uguale alla somma di quelli su HK, KC e CA .

Ma il quadrato su HC è uguale alla somma di quello su HK e KC , quindi il quadrato su HA è uguale a quelli su HC e CA . L'angolo HCA è perciò retto (I, 48).

Per la stessa ragione anche \widehat{DFM} è retto. Quindi l'angolo HCA è uguale a \widehat{DFM} . Ma anche \widehat{HAC} è uguale a \widehat{FDM} ; quindi i due triangoli MDF, HAC hanno due angoli uguali, ciascuno a ciascuno, a due angoli, e un lato, sotteso da uno degli angoli uguali, uguale, cioè HA uguale a MD ; quindi avranno anche i rimanenti lati uguali, ciascuno a ciascuno, ai rimanenti (I, 26). Dunque AC è uguale a DF .

Similmente dimostreremo anche che AB è uguale a DE .

Poichè AC è uguale a DF , e AB è uguale a DE , le due rette CA, AB sono uguali alle due rette FD, DE , ma anche l'angolo CAB è uguale all'angolo FDE , quindi la base BC è uguale alla base EF e il triangolo è uguale al triangolo e gli angoli rimanenti agli angoli rimanenti (I,

4). L'angolo ACB è quindi uguale a \widehat{DFE} ; e l'angolo retto ACK è uguale all'angolo retto DFN , quindi \widehat{BCK} è uguale ad \widehat{EFN} . Per la stessa ragione \widehat{CBK} è uguale a \widehat{FEN} .

I due triangoli BCK , EFN sono uguali, poichè hanno due angoli uguali, ciascuno a ciascuno, a due angoli e un lato, adiacente agli angoli uguali, uguale ad un lato, cioè BC uguale ad EF ; avranno quindi anche i lati rimanenti uguali ai lati rimanenti (I, 26). Dunque CK è uguale a FN . Ma anche AC è uguale a DF , quindi i due lati AC , CK sono uguali ai due lati DF , FN e racchiudono angoli retti: la base AK è allora uguale alla base DN . Poichè AK è uguale a DN , il quadrato su AK è uguale a quello su DN .

Ma il quadrato su AH è uguale alla somma di quelli su AK e KH , perchè AKH è retto (I, 47), inoltre il quadrato su DM è uguale alla somma di quelli su DN e NM , perchè \widehat{DNM} è retto, quindi la somma dei quadrati su AK e KH sono uguali alla somma di quelli su DN e NM , ma il quadrato su AK è uguale a quello su DN , perciò il quadrato di KH è uguale a quello su NM . Dunque HK è uguale a MN .

E poichè i due lati HA , AK sono uguali, ciascuno a ciascuno, a MD , DN , e abbiamo dimostrato che la base HK è uguale alla base MN , l'angolo HAK è uguale a \widehat{MDN} .

Dunque se due angoli piani sono uguali, e il resto della proposizione,

c. d. d.

COROLLARIO

Da ciò è evidente che se due angoli piani sono uguali e se dai loro vertici si mandano rette elevate uguali e formanti colle rette date angoli uguali, ciascuno a ciascuno, le perpendicolari che da queste si mandano ai piani, nei quali sono gli angoli dati, sono uguali tra loro,

c. d. d.

Questa proposizione dice che « se sono dati due triedri aventi le facce uguali, gli spigoli corrispondenti hanno inclinazioni uguali sulle facce opposte ». Ed è singolare che l'Autore non richiami nell'enunciato la def. 5 dell'inclinazione di una retta su un piano.

Comunque, questa proposizione, come già accennammo, conferma che l'Autore possiede il pieno senso intuitivo dell'uguaglianza dei triedri, intesa nel senso nostro, poichè qui, come nella prop. 22, si fa vedere che ad ogni costruzione effettuata sopra una delle due figure corrisponde una costruzione sull'altra, in guisa che segmenti ed angoli omologhi risultino uguali.

Conviene aggiungere il rilievo che EUCLIDE, nel corso della sua dimostrazione, mette anche in evidenza che « le proiezioni di due spigoli corrispondenti sulle facce opposte dei triedri dati formano angoli rispettivamente uguali con gli spigoli di queste facce ». Questa proprietà permette subito di stabilire che i due triedri dati (aventi facce uguali) sono sovrapponibili, o simmetrici, teorema che abbiamo visto pure dedursi dalla prop. 23. Anzi, la dimostrazione che così si ottiene, per il criterio d'uguaglianza dei triedri, si ricollega strettamente a quella sviluppata, in forma a dir vero più complicata, da LEGENDRE (cfr. nota alla Prop. 26).

HEATH avverte che la Prop. 35 ha lo scopo di dimostrare che due parallelepipedi di ugual base e aventi gli spigoli e i triedri uguali hanno anche altezza uguale, proprietà che si usa nella XI, 36. E infatti il corollario asserisce che se nei due triedri si fa $AH = MD$ risulta anche $HK = MN$.

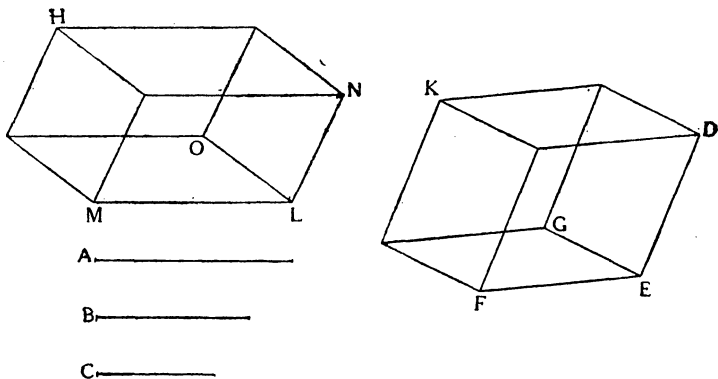
Ma non è detto che il fine a cui EUCLIDE mirava con la proposizione 35 si riduca a questo semplice corollario.

Comunque, le diverse informazioni intorno all'uguaglianza dei triedri che si possono desumere dalle Def. 9 e 10 e dalle prop. 23, 26 e 35, lasciano qualche dubbio su eventuali spostamenti o interpolazioni nel testo euclideo. Congetture in questo senso vengono discusse nell'articolo di A. AGOSTINI: «L'uguaglianza dei triedri in Euclide» in *Period. di Mat.*, Maggio 1928.

36.

Se tre rette sono in proporzione continua, il solido parallelepipedo costruito con esse è uguale al solido parallelepipedo, equilatero ed equiangolo col primo, costruito colla media.

Siano A, B, C le tre rette proporzionali, e A stia a B come B a C ; dico che il solido delle A, B, C è uguale al



solido equilatero della B ed isogonale al primo.

Si consideri l'angolo solido in E racchiuso da \widehat{DEG} , \widehat{GEF} , \widehat{FED} , e si ponga ciascuna delle DE, GE, FE

uguali a B ; si completi quindi il solido parallelepipedo EK . Si ponga poi LM uguale ad A e si costruisca sulla retta LM , nel suo punto L , un uguale angolo solido (XI, 23, cfr. 21) racchiuso da \widehat{NLO} , \widehat{OLM} , \widehat{MLN} e si prenda LO uguale a B e LN uguale a C .

Poichè A sta a B come B a C , e A è uguale a LM , B è uguale a LO , ad EF e ad ED e C è uguale a LN , si ha che LM sta a EF come DE sta a LN .

I lati comprendenti gli angoli uguali NLM , DEF sono in ragione inversa, quindi il parallelogrammo MN è uguale al parallelogrammo DF (VI, 14).

E poichè i due angoli piani rettilinei DEF , NLM sono uguali e le rette LO , EG elevate su essi sono uguali tra loro e racchiudono colle rette date in principio angoli uguali, le perpendicolari ai piani NLM , DEF pei punti G e O sono uguali tra loro (XI, 35); quindi i solidi LH , EK hanno la stessa altezza.

Ma i solidi parallelepipedi posti sulla stessa base e aventi la stessa altezza sono uguali tra loro (XI, 35 coroll.), quindi il solido HL è uguale al solido EK .

Ma il solido LH è costruito colle A , B , C e il solido EK colla B , quindi il solido parallelepipedo costruito colle A , B , C è uguale al solido, equilatero ed equiangolo al primo, costruito con la B ,

c. d. d.

37.

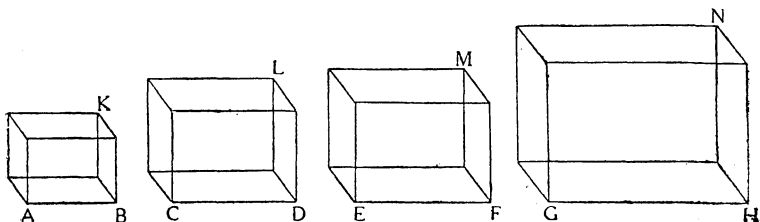
Se quattro rette sono proporzionali, anche i solidi parallelepipedi simili e similmente costruiti su di esse, sono

proporzionali; e se solidi parallelepipedi, simili e similmente costruiti su rette, sono uguali, anche le rette stesse sono proporzionali.

Le AB, CD, EF, GH siano rette proporzionali, e AB stia a CD come EF sta a GH ; si costruiscano sulle AB, CD, EF, GH i solidi parallelepipedi KA, LC, ME, NG simili e similmente posti.

Dico che KA sta a LC come ME sta a NG .

Poichè il solido parallelepipedo KA è simile a LC , KA ad LC ha ragione triplicata di quella di AB a CD (XI, 33). Per la stessa ragione ME a NG ha ragione tri-



plicata di quella di EF a GH . Ma AB sta a CD come EF sta a GH , quindi AK sta a LC come ME sta a NG .

Inversamente, il solido AK stia al solido LC come il solido ME sta al solido NG ; dico che la retta AB sta a CD come EF sta a GH .

Infatti KA ad LC ha di nuovo ragione triplicata di quella di AB a CD (XI, 33) e ME a GN ha ragione triplicata di quella di EF a GH ; ma KA sta ad LC come ME a NG ; quindi AB sta a CD come EF a GH .

Dunque se quattro rette sono proporzionali, e ciò che segue nella proposizione,

c. d. d.

CLAVIO dà anche un'altra dimostrazione contenuta nel codice euclideo della Biblioteca Comunale di Bologna, nella quale non si fa uso della proprietà, qui ammessa da EUCLIDE, che se due ragioni sono uguali, la ragione triplicata dell'una è uguale alla ragione triplicata dell'altra, e, inversamente, che se ragioni, che stanno in ragione triplicata con altre due, sono uguali, anche queste ultime sono uguali tra loro.

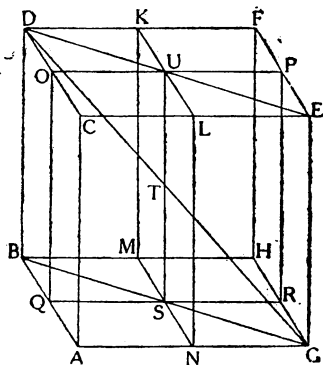
Molti Mss. e traduttori portano intercalata tra questa e la proposizione seguente, la dimostrazione della proprietà:

Se un piano è perpendicolare ad un altro, la perpendicolare condotta da un punto di uno dei piani sopra l'altro cade sopra la comune intersezione dei due piani.

Tale proposizione, che vien dimostrata mediante riduzione all'assurdo, non è del tutto necessaria e ritenuta dall'HEIBERG come interpolata, perchè non riportata dai codici più autorevoli.

38.

Se in un cubo si dividono per metà i lati dei piani opposti e si conducono i piani pei punti di divisione, la comune



intersezione di questi piani e le diagonali del cubo si dividono tra loro per metà.

Nel cubo AF si dividano per metà i lati dei piani opposti CF , AH nei punti K , L , M , N , O , P , Q , R e pei punti di divisione si conducano i piani KN , OR : la loro comune intersezione sia US , e DG sia poi una diagonale del cubo AF . Dico che UT è uguale a TS e DT è uguale a TG .

Si conducano le DU , UE , BS , SG . Poichè DO è parallela a PE , gli angoli alterni DOU , UPE sono uguali tra loro (I, 29). E poichè DO è uguale a PE e OU è uguale a UP e comprendono angoli uguali, la base DU è uguale ad UE . Il triangolo DOU è dunque uguale al triangolo PUE e i rimanenti angoli sono uguali agli angoli rimanenti (I, 4). L'angolo ODU è quindi uguale all'angolo PUE e perciò DU è una retta (I, 14).

Per la stessa ragione BSG è una retta, e BS è uguale a SG .

CA è uguale e parallelo a DB , ed è pure uguale e parallelo ad EG , quindi DB è uguale e parallelo ad EG (XI, 9): queste rette sono congiunte dalle rette DE , BG , quindi DE è parallela a BG (I, 33). L'angolo EDT è allora uguale a BGT , poichè sono alterni (I, 29), e DTU è uguale a GTS (I, 15).

I due triangoli DTU , GTS hanno due angoli uguali a due angoli e un lato, opposto ad uno degli angoli uguali, uguale a un lato, e precisamente DU uguale a GS , perchè sono metà di DE e BG ; i triangoli avranno quindi i lati rimanenti uguali tra loro (I, 26).

Dunque DT è uguale a TG , e UT a TS .

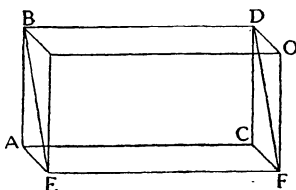
Dunque se in un cubo si dividono per metà i lati dei piani opposti e si conducono i piani pei punti di divisione, la comune intersezione di questi piani e le diagonali del cubo si dividono tra loro per metà,

c. d. d.

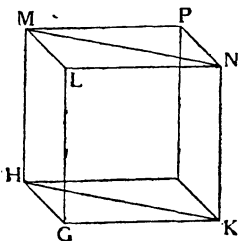
39.

Se di due prismi di uguale altezza, uno ha per base un parallelogrammo, l'altro un triangolo, e se il parallelogrammo è doppio del triangolo, i prismi sono uguali.

Siano $ABCDEF$, $GHKLMN$ i due prismi di uguale altezza; e il primo abbia per base il parallelogrammo AF , l'altro il triangolo GHK ; il parallelogrammo AF sia dop-



pio di GHK . Dico che il prisma $ABCDEF$ è uguale al prisma $GHKLMN$.



Si completino i solidi AO , GP . Poichè il parallelogrammo AF è doppio del triangolo GHK , e il parallelogrammo HK è doppio del triangolo GHK (I, 34), il parallelogrammo AF è uguale al parallelogrammo HK .

Ma i solidi parallelepipedi, aventi ugual base e ugual altezza, sono uguali tra loro (XI, 31), quindi il solido AO è uguale al solido GP . Il prisma $ABCDEF$ è metà del solido AO e il prisma $GHKLMN$ è metà del solido GP , quindi il prisma $ABCDEF$ è uguale al prisma $GHKLMN$.

Dunque se di due prismi di uguale altezza, uno ha per base un parallelogrammo, l'altro un triangolo, e se parallelogrammo è doppio del triangolo, i prismi sono uguali,

c. d. d.

LIBRO DODICESIMO

PER CURA DI

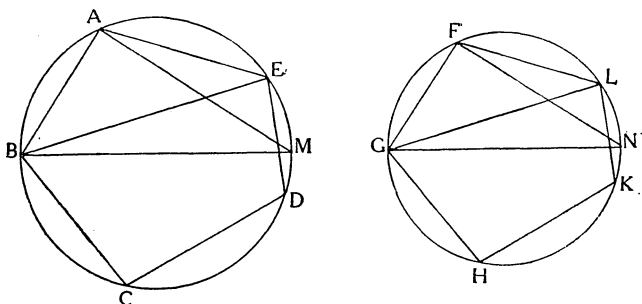
AMEDEO AGOSTINI

LIBRO XII.

1.

I poligoni simili inscritti nei cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri.

Siano ABC , FGH i cerchi e in essi siano inscritti i poligoni simili $ABCDE$, $FGHKL$; BM , GN siano i diametri dei cerchi. Dico che il quadrato di BM sta al quadrato di GN , come il poligono $ABCDE$ sta al poligono $FGHKL$.



Si conducano allora BE , AM , GL , FN .

Poichè il poligono $ABCDE$ è simile al poligono $FGHKL$, l'angolo BAE è uguale a \widehat{GFL} e BA sta ad

AE come GF ad FL (VI, term. 1). Allora BAE e GFL sono due triangoli aventi un angolo uguale ad un angolo, \widehat{BAE} uguale a \widehat{GFL} , e i lati, intorno agli angoli uguali, proporzionali: il triangolo ABE è quindi equiangolo al triangolo GFL (VI, 6) e perciò l'angolo AEB è uguale ad \widehat{FLG} .

Ma \widehat{AEB} è uguale ad \widehat{AMB} , poichè posti nello stesso arco (III, 27), e inoltre \widehat{FLG} è uguale a \widehat{FNG} , perciò \widehat{AMB} è uguale ad \widehat{FNG} ; l'angolo retto BAM è poi uguale all'angolo retto GFN (III, 31), quindi anche il rimanente è uguale al rimanente (I, 32). Il triangolo ABM è dunque equiangolo al triangolo FGN . Si ha perciò la ragione BM sta a GN come BA sta a GF (VI, 4).

Ma il quadrato di BM sta al quadrato di GN in ragione duplicata di quella di BM a GN , e il poligono $ABCDE$ sta al poligono $FGHKL$ in ragione duplicata di quella di BA a GF (VI, 20), quindi il quadrato di BM sta al quadrato di GN come il poligono $ABCDE$ sta al poligono $FGHKL$.

Dunque, nei cerchi i poligoni simili stanno tra loro come i quadrati dei diametri, c. d. d.

Questa proposizione completa la teoria dei poligoni simili svolta da EUCLIDE nel libro VI (Prop. 4, 5, 6, 7, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 31) e specialmente la Prop. 20 che afferma la proporzionalità delle loro superficie ai quadrati dei lati.

I complementi moderni di tale teoria sono in rapporto con la visione della Geometria proiettiva, secondo la quale due figure piane simili sono figure omologhe in una corrispondenza (similitudine) che si estende all'intero piano.

Qui assume particolare importanza la scoperta di un punto del

piano (centro di similitudine) che, per la corrispondenza del piano stesso, è unito. A prescindere da qualche caso particolare, poco significativo, che qualche storico rileva presso gli antichi, la nozione del centro di similitudine (adombrata, pare, da MAUROLICO) sembra introdursi come mezzo ausiliario per l'ingrandimento e l'impiccolimento dei disegni (vedi D. SCHWENTER, *Geometria practica* del 1618 citata da J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, Vol. IV, ed. 1923, pag. 156 e segg.). Tale nozione viene poi sviluppata da EULERO nel 1777 (*De centro similitudinis*, Nova Acta Ac. Petrop., 1799), che la estende anche allo spazio.

Da un punto di vista elementare, il centro di similitudine resta definito dalla proprietà che una rotazione intorno ad esso permette di portare le due figure simili in posizione omotetica (secondo la denominazione di CHASLES), per modo che i segmenti corrispondenti risultino paralleli.

La similitudine piana si presenta poi come caso particolare metrico dell'omografia negli studi di MONGE (1799) e della sua scuola (cfr. p. es. F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, paragrafi 50 e 97).

Nella stessa scuola la similitudine viene specialmente applicata alla risoluzione di problemi elementari classici, come quello di costruire un cerchio tangente a tre cerchi dati, che, in questo senso, fu risolto da GAULTIER DE TOUR (1815) e da PONCELET (*Traité des propriétés projectives...*, 1822).

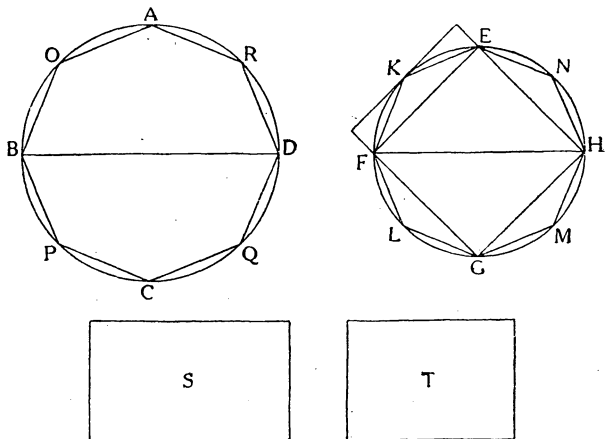
2.

I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri.

Siano $ABCD$, $EFGH$ i cerchi e BD , FH i loro diametri. Dico che il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il quadrato di BD sta al quadrato di FH .

Se il cerchio $ABCD$ non sta al cerchio $EFGH$ come il quadrato di BD sta a quello di FH , allora il quadrato di

BD starà a quello di FH come il cerchio $ABCD$ sta ad uno spazio minore, o maggiore, di quello del cerchio $EFGH$: stia dapprima come allo spazio minore S .



Nel cerchio $EFGH$ si inscriva il quadrato $EFGH$: il quadrato inscritto è maggiore della metà del cerchio $EFGH$, poichè, se pei punti E, F, G, H si mandano le rette toccanti il cerchio, il quadrato $EFGH$ è metà del quadrato circoscritto al cerchio, ma il cerchio è minore del quadrato circoscritto, perciò il quadrato inscritto $EFGH$ è maggiore della metà del cerchio $EFGH$.

Si dividano ora per metà, nei punti K, L, M, N , gli archi EF, FG, GH, HE e si conducano $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$.

Ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà dei rispettivi segmenti del cerchio, poichè, se pei punti K, L, M, N conduciamo le tangenti al cerchio e completiamo i parallelogrammi sulle rette

EF, FG, GH, HE , ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è metà dei rispettivi parallelogrammi e i rispettivi segmenti del cerchio sono minori dei parallelogrammi: dunque ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà dei rispettivi segmenti del cerchio.

Così, segnando i rimanenti archi per metà e conducendo le rette, e ciò sempre facendo, troviamo certi segmenti del cerchio i quali sono minori dell'eccesso del cerchio $EFGH$ sullo spazio S .

Ma si è dimostrato nel primo teorema del libro decimo che se dalla maggiore di due quantità disuguali date togliamo più della metà e, dal rimanente, più della metà, così seguitando, resterà una grandezza che sarà minore della minore grandezza data.

Si tolgano dal cerchio $EFGH$ i segmenti che stanno sulle basi $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$; poichè questi sono minori dell'eccesso del cerchio $EFGH$ sullo spazio S , il rimanente poligono $EKFLGMHN$ è maggiore dello spazio S .

Si inscriba ora nel cerchio $ABCD$ il poligono $AOBPCQDR$ simile al poligono $EKFLGMHN$; allora il quadrato di BD sta al quadrato di FH come il poligono $AOBPCQDR$ sta al poligono $EKFLGMHN$ (XII, 1).

Ma il quadrato di BD sta a quello di FH anche come il cerchio $ABCD$ sta allo spazio S , e quindi (V, 11) il cerchio $ABCD$ sta allo spazio S come il poligono $AOBPCQDR$ sta al poligono $EKFLGMHN$: permutando

tando (V, 16), il cerchio $ABCD$ sta al poligono inscritto in esso come lo spazio S sta al poligono $EKFLGMHN$.

Ma il cerchio $ABCD$ è maggiore del poligono inscritto in esso, quindi anche lo spazio S è maggiore del poligono $EKFLGMHN$; ma invece è minore, quindi è impossibile.

Dunque il quadrato di BD non sta a quello di FH come il cerchio $ABCD$ sta ad uno spazio minore di quello del cerchio $EFGH$.

Similmente dimostreremo che il quadrato di FH non sta a quello di BD come il cerchio $EFGH$ sta ad uno spazio minore di quello del cerchio $ABCD$.

Ora dico che il quadrato di BD non sta a quello di FH come il cerchio $ABCD$ sta ad uno spazio maggiore di quello del cerchio $EFGH$.

Se è possibile, sia S lo spazio maggiore del cerchio. Invertendo (V, 7 coroll.), il quadrato di FH sta a quello di BD come lo spazio S sta al cerchio $ABCD$. Ma lo spazio S sta al cerchio $ABCD$ come il cerchio $EFGH$ sta ad uno spazio minore del cerchio $ABCD$, quindi il quadrato di FH sta al quadrato di BD come il cerchio $EFGH$ sta alla stessa area minore del cerchio $ABCD$; ciò che è dimostrato impossibile. Dunque il quadrato di FH non sta a quello di BD come il cerchio $ABCD$ ad uno spazio maggiore del cerchio $EFGH$.

Abbiamo dimostrato anche che non è vero il rapporto con uno spazio minore del cerchio $EFGH$, quindi il quadrato di BD sta a quello di FH , come il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$.

Dunque, i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri, c. d. d.

COROLLARIO

Dico che, essendo lo spazio S maggiore del cerchio $EFGH$, lo spazio S sta al cerchio $ABCD$ come il cerchio $EFGH$ sta ad uno spazio minore di quello del cerchio $ABCD$.

Stia lo spazio S al cerchio $ABCD$ come il cerchio $EFGH$ sta allo spazio T . Dico che lo spazio T è minore del cerchio $ABCD$.

Infatti, poichè lo spazio S sta al cerchio $ABCD$ come il cerchio $EFGH$ sta allo spazio T , permutando (V, 16), lo spazio S sta al cerchio $EFGH$ come il cerchio $ABCD$ sta allo spazio T . Ma lo spazio S è maggiore del cerchio $EFGH$, quindi il cerchio $ABCD$ è maggiore dello spazio T (V, 14).

Dunque lo spazio S sta al cerchio $ABCD$ come il cerchio $EFGH$ sta allo spazio T , c. d. d.

Questa proposizione è certo nota intuitivamente fin dalla più remota antichità. Le testimonianze indicano che essa sia stata esplicitamente enunciata, e in qualche modo, se pure non rigorosamente, dimostrata da IPPOCRATE DI CHIO.

La dimostrazione rigorosa che EUCLIDE ne porge è notevole per la sua semplicità, benchè sia stata abbandonata dai trattati più moderni, che trattano parallelamente la questione della superficie e quella della lunghezza del cerchio. Fondamento della dimostrazione euclidea è il metodo di esaustione, che, secondo ARCHIMEDE (*Sulla sfera e sul cilindro*, Introduzione e *Quadratura della parabola*, Introduzione) appartiene ad EUDOSSO DI CNIDO (circa 410-356

a. C.), il quale avrebbe stabilito rigorosamente con tale metodo le proposizioni più importanti di questo libro.

Il metodo stesso viene fondato da EUCLIDE sulla X, 1.

Per la storia di tale metodo nell'antichità e per gli sviluppi che esso ha avuto nelle opere di ARCHIMEDE, rinviamo il lettore al volume: E. RUFINI, *Il Metodo di Archimede* di questa collezione.

Poichè tale metodo verrà usato da EUCLIDE anche nelle prop. 5, 10, 11, 12, 17, 18 di questo libro, riteniamo utile dare uno schema del procedimento generale. (Per maggiori sviluppi cfr. l'articolo « Aree, lunghezze e volumi nella Geometria elementare » di O. CHISINI nelle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* raccolte e coordinate da F. ENRIQUES, Parte I, Vol. II).

Date due grandezze omogenee A e B si costruiscano due successioni A_n, B_n di grandezze omogenee alle precedenti tali che

$$A_n < A, \quad B_n < B.$$

Se le due successioni soddisfano alle condizioni:

- 1) ogni grandezza A_n è equivalente alla corrispondente B_n ,
- 2) prefissata una grandezza ε a piacere, omogenea colle precedenti, si possano determinare due grandezze corrispondenti delle due successioni tali che, contemporaneamente, sia

$$A - A_n < \varepsilon, \quad B - B_n < \varepsilon,$$

allora le grandezze A e B sono equivalenti.

Per dimostrare ciò si ricorre ad una riduzione all'assurdo.

Non sia A equivalente a B ; allora A sarà equivalente ad una grandezza S minore, o maggiore, di B .

Sia dapprima S minore di B . Per quanto piccola sia la differenza $B - S$, potremo sempre determinare un termine B_m della successione B_n tale che

$$B_m > S,$$

allora, preso il termine corrispondente nella successione A_n , si ha

$$A_m = B_m, \quad A_m < A,$$

ma $A = S$, quindi è

$$B_m < S,$$

ma ciò è assurdo, perchè, per costruzione, è

$$B_m > S.$$

È quindi impossibile che A sia equivalente ad una grandezza minore di B .

In modo analogo si può dimostrare che S non può essere maggiore di B , quindi A è equivalente a B .

ANDREA TACQUET (1612-1660) nel Libro XII dei suoi *Elementa geometriae* (1654), che ebbero anche edizioni in Italia, introduce la seguente definizione, che aggiunge a quelle euclidee del libro precedente:

Si dice che le grandezze di figure inscritte o circoscritte ad una figura, ovvero le grandezze minori o maggiori della stessa figura, tendono a quella della figura quando possono differire da essa di una quantità data qualunque, comunque essa sia piccola.

Con tale principio, includente il concetto di limite, le lunghe dimostrazioni per esaurimento vengono abbreviate: il TACQUET può limitarsi a dimostrare per ogni caso che le figure inscritte o circoscritte tendono alla figura cui sono inscritte o circoscritte, avendo stabilito, una volta per sempre, il seguente *porisma universale*:

Se le figure inscritte nelle figure A e B tendono a queste, lo stesso rapporto che intercede tra le figure inscritte, intercede anche tra le figure A e B .

Tale proprietà viene dimostrata mediante una riduzione all'assurdo con procedimento analogo a quello eudossiano.

Le figure inscritte in A e le corrispondenti figure inscritte in B siano sempre nel rapporto come X a Z . Supponiamo che non sia

$$A:B = X:Z,$$

e che il rapporto di A a B sia dapprima maggiore di quello di X a Z . Si potrà allora determinare una figura R , minore di A , tale che

$$R:B = X:Z.$$

Poichè, per ipotesi, le figure inscritte in A e in B tendono rispettivamente ad A e a B , esisteranno certe figure inscritte in A

e in B le quali differiranno da A e da B di una quantità minore dell'eccesso di B su R : siano esse C ed F . Sarà dunque $C > R$ e quindi $C:B$ è un rapporto maggiore di $R:B$; ma

$$R:B = X:Z$$

e, per ipotesi,

$$X:Z = C:F,$$

quindi il rapporto di C a B è maggiore del rapporto di C a F ; la figura B dovrebbe quindi essere minore della figura F inscritta in essa, cioè il tutto minore di una parte, ciò che è assurdo. Quindi il rapporto di A a B non può essere maggiore di quello di X a Z .

In modo analogo si dimostrerebbe che anche il rapporto di B ad A non può essere maggiore di quello di Z ad X .

Dunque il rapporto di A a B è uguale a quello di X a Z cioè a quello delle corrispondenti figure inscritte.

LEGENDRE (*Éléments*, lib. IV, 10) giunge alla dimostrazione della proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri premettendo un lemma analogo a quello che EUCLIDE dà in XII, 16:

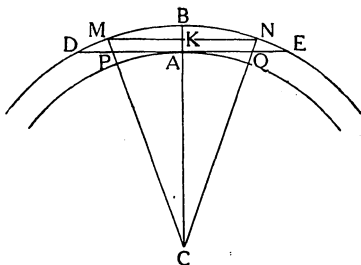
Date due circonferenze concentriche si può sempre inscrivere nella maggiore un poligono regolare i cui lati non incontrino la più piccola, e si può, inoltre, circoscrivere alla minore un poligono regolare, di un ugual numero di lati, i cui lati non incontrino la circonferenza maggiore.

Siano CA , CB i raggi delle circonferenze date. In A conduciamo la tangente che incontra la circonferenza maggiore in D ed E . Si inscriba nella circonferenza maggiore un poligono regolare e, mediante la bisezione degli archi sottesi, si inscriba il poligono regolare con un numero doppio di lati. Si seguiti la bisezione degli archi fino ad avere un arco minore di DBE : sia esso MBN e il punto B sia il punto che lo dimezza.

È evidente che MN è minore di DE e quindi il poligono regolare di lato MN non incontrerà la circonferenza di raggio CA .

Conduciamo ora le CM , CN : esse incontrino la DE in P e Q . Il poligono circoscritto alla circonferenza minore con lato PQ è simile a quello ora costruito di lato MN ed è chiaro che tale po-

ligono non incontrerà la circonferenza maggiore, poichè è $CP < CM$.

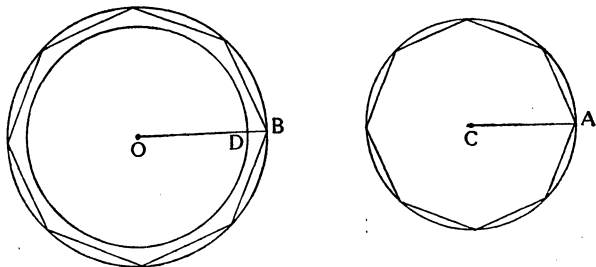


Premesso tale lemma, LEGENDRE dimostra la XII, 2 nel seguente modo:

Per brevità indichiamo l'area del cerchio di raggio CA con la notazione (circ. CA). Se OB è il raggio del secondo cerchio si deve dimostrare che

$$(\text{circ. } CA) : (\text{circ. } OB) = \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2.$$

Supponiamo che ciò non sia vero: allora \overline{CA}^2 sta a \overline{OB}^2 come (circ. CA) sta ad un'area maggiore o minore di (circ. OB).



Sia dapprima

$$(1) \quad \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2 = (\text{circ. } CA) : (\text{circ. } OD),$$

ove $OD < OB$.

Inscriviamo allora nel cerchio OB un poligono regolare che non tocchi la circonferenza di raggio OD e inscriviamo nel cerchio di raggio CA un poligono simile. Le aree di tali poligoni sono in ragione duplicata dei raggi, quindi

$$\begin{aligned} (\text{polig. in circ. } CA) : (\text{polig. in circ. } OB) &= \\ &= \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2, \text{ e, per la (1),} \\ &= (\text{circ. } CA) : (\text{circ. } OD), \end{aligned}$$

ma ciò è impossibile poichè il poligono in (circ. CA) è minore di (circ. CA) e il poligono in (circ. OB) è maggiore di (circ. OD).

Dunque \overline{CA}^2 non sta ad \overline{OB}^2 come (circ. CA) ad un cerchio minore di (circ. OB).

Supponiamo ora che \overline{CA}^2 stia a \overline{OB}^2 come (circ. CA) ad un cerchio maggiore di (circ. OB): si avrebbe allora

$$\overline{OB}^2 : \overline{CA}^2 = (\text{cerchio } > \text{ di circ. } OB) : (\text{circ. } CA),$$

ciò che si dimostra impossibile come nel caso precedente.

Dunque si ha

$$\overline{CA}^2 : \overline{OB}^2 = (\text{circ. } CA) : (\text{circ. } OB).$$

Con la proposizione in esame EUCLIDE stabilisce la costanza del rapporto $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tra il cerchio e il quadrato del diametro. La prima valutazione del numero π fatta con approssimazione sistematica è quella dovuta ad ARCHIMEDE, il quale, nel suo libro *Sulla misura del cerchio*, collega la questione della quadratura a quella della rettificazione della circonferenza stabilendo le seguenti proposizioni:

1) *Ogni cerchio ha area uguale a quella di un triangolo rettangolo che ha un cateto uguale al raggio e l'altro cateto uguale alla circonferenza rettificata;*

2) *Il rapporto del cerchio al quadrato del suo diametro è approssimativamente quello di 11 a 14;*

3) *La circonferenza è il triplo del diametro aumentato di meno di $\frac{1}{7}$, ma di più di $\frac{10}{71}$ del diametro stesso;*

ciò che significa:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

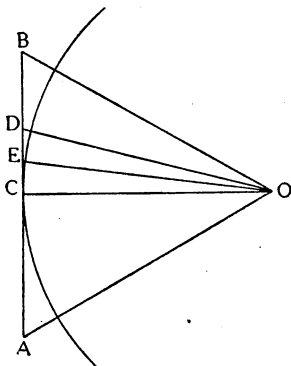
Per valutare la lunghezza della circonferenza, la circonferenza stessa è considerata come il limite comune ai perimetri dei poligoni regolari circoscritti e ai perimetri dei poligoni regolari inscritti al tendere all'infinito del numero dei lati.

Accenniamo brevemente, e in termini moderni, alla valutazione di π che ARCHIMEDE porge in tal guisa:

Sia OC il raggio del cerchio di centro O e raggio r e sia AB il lato l_6 dell'esagono circoscritto. Poichè è $l_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ si ha

$$OC:BC = \sqrt{3}:1.$$

ARCHIMEDE dà come valore approssimato di $\sqrt{3}$ per difetto il numero $\frac{265}{153}$, per cui si ha



$$OC:BC > 265:153,$$

e quindi

$$(OC + 2BC):BC > 571:153,$$

ossia

$$(1) \quad (OC + OB):BC > 571:153.$$

Condotta la bisettrice OD dell'angolo BOC , si hanno le proporzioni

$$OB:OC = BD:DC,$$

$$(OB + OC):OC = (BD + DC):DC,$$

$$OC:DC = (OB + OC):BC,$$

$$OC:DC > 571:153;$$

da quest'ultima si ricava il rapporto tra il semilato CD del dodegono circoscritto al suo raggio OD nel seguente modo: poichè è

$$\overline{OC}^2 : \overline{DC}^2 > 571^2 : 153^2,$$

si ha

$$\frac{\overline{OC}^2 + \overline{DC}^2}{\overline{DC}^2} > \frac{349450}{153^2},$$

ossia

$$\overline{OD}^2 : \overline{DC}^2 > 349450 : 153^2,$$

ed estraendo la radice quadrata,

$$(2) \quad OD:DC > 591\frac{1}{8}:153.$$

Condotta poi la bisettrice OE dell'angolo COD , si ottiene, come si è fatto prima, la proporzione

$$(OD + OC):DC = OC:EC;$$

ma, sommando le disuguaglianze (1) e (2), si ha

$$(OD + OC):DC > 1162\frac{1}{8}:153,$$

e quindi si ha la disuguaglianza

$$OC:EC > 1162\frac{1}{8}:153,$$

che dà un limite inferiore tra il rapporto del raggio e metà del lato del poligono regolare di 24 lati circoscritto al cerchio.

Ripetendo il procedimento, ARCHIMEDE giunge a stabilire il limite superiore tra il rapporto di P_{96} e il diametro

$$P_{96}:2r < 14688:4673 \frac{1}{2} < 3 \frac{1}{7}:1.$$

Per ricavare il limite inferiore, sia CB il lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio $OA = r$; allora AB risulta il lato del triangolo equilatero inscritto, quindi è

$$AB:BC = \sqrt{3}:1.$$

ARCHIMEDE assume come valore per eccesso di $\sqrt{3}$ il numero 1351:780, quindi

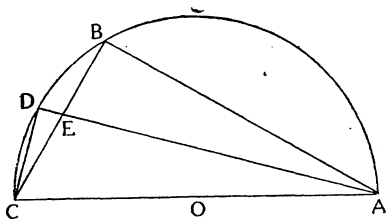
$$AB:BC < 1351:780,$$

d'altra parte è

$$AC:BC = 2:1,$$

quindi, sommando, si ha

$$(1) \quad (AB + AC):BC < 2911:780.$$



Si conduca la bisettrice AD dell'angolo BAC : allora DC risulterà il lato del dodecagono regolare inscritto. Dai triangoli rettangoli simili ADC , CDE si ha

$$AD:DC = DC:DE = AC:CE,$$

mentre, per la proprietà della bisettrice, è

$$AC:CE = AB:BE,$$

dalla quale si ha

$$AC:CE = (AC + AB):(CE + BE) = (AC + AB):CB;$$

ma per la (1) è

$$AC:CE < 2911:780,$$

quindi si ha anche

$$AD:DC < 2911:780.$$

Quadrando questa disuguaglianza e componendo, tenendo presente che $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ è uguale ad \overline{AC}^2 , dopo estrazione di radice quadrata, si ottiene il seguente limite superiore per il rapporto tra il diametro e il lato del dodecagono inscritto

$$AC:CD < 3013\frac{3}{4}:780.$$

Applicando successivamente questo procedimento fino a giungere al poligono inscritto regolare di 96 lati, ARCHIMEDE ottiene il seguente risultato

$$p_{96}:2r > 6336:2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}:1.$$

ARCHIMEDE non si limita a valutare la lunghezza della circonferenza in via approssimata, ma riconosce, in via teorica, l'*esistenza* d'un segmento ben determinato che corrisponde alla circonferenza rettificata.

La considerazione della lunghezza d'una curva si presenta tanto naturale sotto l'aspetto fisico ed intuitivo che, quand'anche mancassero testimonianze positive, deve farsi risalire alla più remota antichità.

Sembra pure che a questo concetto abbia rivolto l'attenzione DINOSTRATO (della generazione posteriore a EUDOSSO), il quale avrebbe riconosciuto la superficie del cerchio equivalere a un triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio (cfr. HEATH, *A history of greek mathematics*, Vol. I, pag. 229). Ma in tal caso conviene dubitare che la trattazione non soddisfacesse alle esigenze del rigore, e che, in genere, i geometri precedenti ad EUCLIDE non possedessero una definizione precisa della lunghezza d'una curva, perchè EUCLIDE non ne parla affatto nei suoi *Elementi*.

ARCHIMEDE precisa il concetto intuitivo della lunghezza d'una curva (*Sulla sfera e il cilindro*, lib. I), riferendosi al caso della linea convessa, mediante le seguenti *assunzioni* ($\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu\alpha$), la prima delle quali rientrerebbe nell'affermazione più generale della seconda :

1) *La retta è la più breve linea tra due punti;*

2) *Di due linee [convesse] aventi le estremità in comune, con la concavità rivolta nella stessa direzione, ed eventualmente con parti in comune, è più lunga quella che, rispetto alla congiungente gli estremi, racchiude l'altra.*

Di qui deduce subito la proposizione che la circonferenza è maggiore del perimetro di qualunque poligono inscritto e minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto.

Per lo scopo della rettificazione della circonferenza il principio assunto può restringersi, come in F. SEVERI, al seguente *postulato* : « la lunghezza di un arco circolare minore della semicirconferenza è maggiore della corda e minore della somma delle tangenti nei suoi estremi ».

LEGENDRE ha tentato di dimostrare la seconda assunzione archimedeo, riconducendola alla prima, che egli trasforma in definizione della retta. A tale scopo egli ragiona introducendo una linea di minima lunghezza tra le linee convesse che circondano una linea convessa data : senonchè l'esistenza di questo minimo implica qualche difficoltà, sia perchè si va incontro a delicate questioni di continuità, sia perchè, in mancanza del principio archimedeo che qui si pretenderebbe dimostrare, non si vede nemmeno come possa confrontarsi la lunghezza di due linee curve, in guisa da dare un senso alla linea minima di cui s'è discorso.

In realtà la « lunghezza d'una curva » ha un contenuto fisico o intuitivo irriducibile a concetti geometrici noti, in guisa da costituire un nuovo concetto primitivo; in ciò sta anzi una differenza essenziale tra il caso delle lunghezze e il caso delle superficie piane. L'assunzione o postulato archimedeo porge la *definizione* del concetto di lunghezza d'una curva in guisa da rispondere appunto al contenuto di cui sopra. Invero il senso logico della definizione non differisce da quello di un postulato in cui uno dei concetti fondamentali che vi figurano viene esplicitamente spiegato per mezzo

dei rimanenti. (Cfr. G. PEANO, *Period. di Mat.*, vol. I (1921), p. 175). Senonchè alla definizione (concepita come costruzione logicamente arbitraria) si deve accompagnare, in ogni caso, l'affermazione d'*esistenza*, o di nuovo postulandola, o dimostrandola in base al postulato più generale della *continuità*, conforme all'indirizzo della nostra *Analisi*, e come si legge in alcuni trattati moderni.

Comunque si proceda, la definizione della lunghezza della circonferenza, maggiore dei perimetri dei poligoni inscritti e minore dei circoscritti, deve essere resa univoca, col riconoscere che le due classi « perimetri dei poligoni inscritti » e « perimetri dei poligoni circoscritti » sono convergenti ad un limite ben determinato, cioè che la loro differenza può ridursi piccola ad arbitrio, ovvero che il loro rapporto tende a 1. ARCHIMEDE dimostra (*Sulla sfera e il cilindro*, lib. I) quest'ultima proprietà, cioè (traducendo in linguaggio moderno): *Il rapporto fra il lato d'un poligono regolare circoscritto a un cerchio e il lato del poligono regolare inscritto d'ugual numero n di lati, si può ridurre (col crescere di n) minore di qualsiasi rapporto dato maggiore dell'unità.*

A questo scopo egli riconosce in sostanza che il lato del poligono regolare di n lati, per n sufficientemente grande, corrisponde ad un angolo al centro piccolo a piacere, per cui il rapporto di cui si tratta (che è eguale a quello tra il raggio del cerchio e l'apotema) appare minore del rapporto fra l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo, i quali formino un angolo acuto piccolo a piacere.

Stabilita così l'univocità della definizione della circonferenza, la collega quindi alla superficie del cerchio dimostrando similmente che il rapporto tra le superficie di due poligoni regolari d'ugual numero n di lati, rispettivamente circoscritto e inscritto al cerchio, si può ridurre (al crescere di n) minore di qualsiasi rapporto maggiore dell'unità.

Pertanto la superficie del cerchio riesce maggiore di quella di qualsiasi triangolo la cui base sia minore della circonferenza rettificata e la cui altezza sia minore (e quindi anche uguale) al raggio, e minore di quella di qualsiasi triangolo avente base maggiore della circonferenza rettificata e per altezza il raggio.

Il metodo che oggi è più comunemente adottato nei trattati scolastici non differisce essenzialmente da quello archimedeo; ma in luogo di considerare il rapporto fra i perimetri dei poligoni circoscritti ed inscritti se ne considera la differenza.

Questa idea sembra comparire per la prima volta in TACQUET (op. cit.) in accordo con la sua visione del cerchio come limite delle due classi di poligoni inscritti e circoscritti. Il ragionamento di TACQUET si riduce al fatto, quasi evidente, che la differenza tra i raggi del cerchio circoscritto ed inscritto ad un poligono regolare di n lati diventa infinitesima col crescere di n . La deduzione a partire da questo punto è alquanto involuta, ma sembra ridursi sostanzialmente all'uso d'una proporzione che s'ottiene *dividendo* una proporzione simile a quella data da ARCHIMEDE.:

$$P : p = r : a.$$

In modo esplicito questo metodo di dimostrazione compare due secoli più tardi nel trattato dell'AMIOT, il quale, dividendo la proporzione archimedeica, trova che la differenza dei perimetri sopra indicati sta al perimetro del poligono circoscritto come la freccia e corrispondente al lato del poligono inscritto sta al raggio, ossia:

$$P - p = \varepsilon \cdot \frac{P}{r}.$$

Siccome P può assumersi inferiore per esempio a $8r$, la differenza $P - p$ può rendersi piccola ad arbitrio, insieme con ε . (Che veramente ε diventi infinitesimo dimostra bene l'AMIOT e del resto può riconoscersi anche in modo diretto e più semplice).

Nell'AMIOT si può anche scorgere un'altra dimostrazione del teorema, in cui si valuta la differenza tra i perimetri dei poligoni circoscritti e inscritti di $2n$ lati, facendo vedere che:

$$P_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{4}(P_n - p_n),$$

disuguaglianza che viene dedotta dalle importanti formule che egli riprende da SCHWAB, e di cui avremo occasione di parlare accennando al calcolo di π , e che, d'altra parte, si lascia anche dedurre mediante una costruzione geometrica dovuta al BERTOT.

Qui pare che sia l'origine della dimostrazione di convergenza dei perimetri inscritti e circoscritti che è stata largamente diffusa in Italia dal trattato di A. FAIFOFER, il quale osserva che ai fini di codesta convergenza basta dimostrare la disuguaglianza:

$$P_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{2}(P_n - p_n).$$

Altre dimostrazioni dell'anzidetta convergenza si trovano in trattati più recenti.

Per esempio, ENRIQUES e AMALDI rendono la dimostrazione in forma facilmente intuitiva, facendo vedere che la differenza dei perimetri anzidetti $P_n - p_n$ è uguale alla differenza tra la base e la somma dei lati d'un triangolo isoscele, il cui angolo alla base diventa infinitesimo con n .

Un confronto più largo delle dimostrazioni del teorema di convergenza di cui si tratta si troverà in uno studio che A. PROCISSI sta preparando per il Periodico di Matematiche.

Il calcolo di π si può fare mediante il confronto dei poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio, di cui si vada sempre raddoppiando il numero dei lati, così come abbiám visto esser fatto da ARCHIMEDE (pag. 155). Ma, ai fini del calcolo suddetto, il metodo di ARCHIMEDE è stato perfezionato da vari autori moderni, in guisa da:

1) ottenere valori convenientemente approssimati di π dal confronto di poligoni regolari a minor numero di lati;

2) spingere avanti il calcolo con un procedimento ripetibile rilevando la periodicità dell'aritmetico che esso mette in opera.

Naturalmente il calcolo di π può farsi confrontando sia i perimetri, sia le aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio; ma non vi è qui una differenza essenziale, poichè i due metodi portano a sviluppi paralleli e direttamente comparabili.

Il primo progresso significativo che l'epoca moderna raggiunge in quest'ordine d'idee è dovuto a F. VIETA (1593: *Opera*, ed. SCHOOTEN 1646, p. 400), il quale, non soltanto ha spinto avanti il calcolo archimedeo fino al numero di lati 3.2^{17} , traendone un valore di π con 9 cifre decimali esatte, ma ha anche rilevato una

certa periodicità dell'algoritmo, che si traduce nello sviluppo di π come prodotto infinito, cioè (in termini moderni) nella formula:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Poco appresso (1621) SNELLI (*Cyclometria*, pag. IX) rilevava esplicitamente che l'area del poligono inscritto di $2n$ lati è media geometrica tra le aree dei poligoni di n lati, rispettivamente inscritto e circoscritto al medesimo cerchio, ossia $s_{2n} = \sqrt{s_n S_n}$.

Nel 1667, J. GREGORY (*Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Prop. I e XII) metteva in luce che l'area del poligono circoscritto di $2n$ lati è media armonica tra le aree del poligono circoscritto di n lati e del poligono inscritto di $2n$ lati, cioè le inverse sono in progressione aritmetica:

$$\frac{1}{S_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_{2n}} + \frac{1}{S_n} \right).$$

Sussistono teoremi analoghi per i perimetri, cioè:

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n} \right),$$

$$p_{2n} = \sqrt{P_n p_n},$$

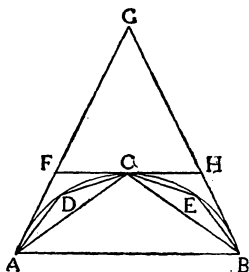
formule che taluno vuol vedere implicite nella *Ciclotomia* d'ARCHIMEDE. La dimostrazione di queste formule si trova sviluppata in molti trattati classici, ad esempio in LEGENDRE (*Éléments*, Libro III, Prop. XIV, Ediz. del 1806), BALTZER (*Elem. Mat.*, Parte IV, Cap. XIII: trad. it., Genova 1867, pag. 152 e segg.), SANNIA e OVIDIO (p. 245, pag. 118 e segg., Vol. II, Ediz. 1902).

CH. HUYGENS ⁽¹⁾ ha mostrato come i limiti d'approssimazione di π dati da ARCHIMEDE $\left(3 + \frac{10}{71} \text{ e } 3 + \frac{10}{70} \right)$ possano già dedursi

(¹) *De Circuli magnitudine inventa*, 1654.

dal confronto dei poligoni regolari di 12 lati, anzichè di 96. Diamo un breve cenno delle significative proposizioni indicate dal grande fisico e matematico olandese.

Egli confronta anzitutto il triangolo isoscele ACB con la somma dei triangoli analoghi ADC e CEB inscritti nei segmenti residui,



e poi lo stesso triangolo ACB con quello FGH che la tangente nel vertice C forma con le due tangenti in A e in B . Le relazioni così trovate tra le aree:

$$ACB < 4(ADC + CEB),$$

$$FGH > \frac{1}{2} ACB,$$

gli permettono di dimostrare i due teoremi seguenti:

PROP. 3). L'area del segmento circolare supera i $\frac{4}{3}$ del triangolo isoscele inscritto.

PROP. 4). L'area del segmento circolare è minore dei $\frac{2}{3}$ del triangolo isoscele avente la stessa base, e i lati tangenti negli estremi dell'arco che lo contiene.

Per conseguenza (Prop. 5) si ottiene un valore più approssimato per difetto dell'area del cerchio aggiungendo quella d'un poli-

gono regolare inscritto di $2n$ lati con $\frac{1}{3}$ della differenza tra questo poligono e quello di n lati; per $r = 1$ si ha:

$$\pi > s_{2n} + \frac{1}{3}(s_{2n} - s_n).$$

Similmente si ha un valore più approssimato per eccesso del cerchio, sottraendo dal poligono regolare circoscritto di n lati $\frac{1}{3}$ della differenza tra questo poligono e quello inscritto dello stesso numero di lati; quindi:

$$\pi < \frac{2}{3}S_n + \frac{1}{3}s_n.$$

Da queste disuguaglianze si passa ad altre relative ai perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti.

Il commentatore dell'edizione nazionale di HUYGENS nota che il passaggio si fa nel modo più semplice adoperando due lemmi, di facile verifica, che, per $r = 1$, si traducono nelle formule:

$$s_{2n} = \frac{1}{2}p_n,$$

$$S_n = \frac{1}{2}P_n.$$

Avremo dunque:

$$2\pi > p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n)$$

$$2\pi < \frac{2}{3}P_{2n} + \frac{1}{3}p_n.$$

Facendo in queste formule $n = 6$ e riferendosi quindi al poligono regolare di $2n = 12$ lati, HUYGENS ritrova per π i limiti archimedei:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}.$$

La questione del calcolo di π è entrata nelle trattazioni moderne con gli *Elementa Matheseos* di CHRISTIAN WOLFF ⁽¹⁾ (Vol. I, pag. 171); il quale imprende anzitutto a calcolare il perimetro del poligono regolare inscritto di $2n$ lati e del poligono circoscritto di n lati, in funzione di quello del poligono inscritto di n lati, e quindi, per successivo raddoppiamento del numero dei lati, trova due successioni convergenti che comprendono la circonferenza rettificata. Questo metodo non reca nessuna novità sostanziale rispetto ad ARCHIMEDE, ma J. A. SEGNER ha portato qui un perfezionamento ⁽²⁾ usufruendo, a quanto pare, dell'idea di HUYGENS ⁽³⁾. Infatti, se in luogo di considerare i perimetri ci si riferisce alle aree, si ottiene un valore più approssimato per difetto del cerchio aggiungendo alla superficie s_n del poligono inscritto di n lati qualche cosa che sia minore della somma dei segmenti circolari trascurati.

E SEGNER mostra che un segmento circolare è maggiore dei $\frac{2}{3}$ del rettangolo che ha per base la corda e per altezza la freccia: proposizione che discende immediatamente dalla prop. 3 di HUYGENS, sopra citata. La superficie del detto rettangolo dà un valore approssimato per difetto che differisce dal segmento circolare per un infinitesimo d'ordine superiore, quando la freccia diventa infinitesima. In tal guisa SEGNER, usando, come ARCHIMEDE, il poligono regolare di 96 lati, ne trae per π un valore approssimato con 6 cifre decimali esatte.

Gli sviluppi precedenti perfezionano direttamente il metodo per il calcolo di π indicato da ARCHIMEDE.

Una modificazione notevole del procedimento appare nel cosiddetto *metodo degli isoperimetri* (o degli *equivalenti*). Ed è notevole che questo metodo s'incontri già nelle matematiche indiane, sebbene non sembri che questa conoscenza abbia esercitato alcun influsso sulla nostra scienza europea (vedi J. TROPFKE, op. cit., Vol. IV,

(1) Ci riferiamo nella citazione alla *Novissima editio* del 1742.

(2) *Anfangsgrunde*, II Ediz., 1773.

(3) Non abbiamo potuto confermare con la visione del testo questa congettura.

pag. 213), nella quale l'idea s'introduce con NICOLA DA CUSA (1401-1464) e poi con DESCARTES.

Spieghiamo in breve il principio del metodo. La considerazione degli isoperimetri ricorre, com'è noto, nel teorema fondamentale: « Il cerchio ha area massima fra tutte le superficie chiuse contenute da linee di uguale lunghezza » (cfr. l'art. di O. CHISINI « Sulla teoria elementare degli isoperimetri » in *Questioni riguardanti le mat. elem.*, vol. III).

Ciò posto, si consideri un poligono regolare di n lati e si costruisca un altro poligono isoperimetro che abbia doppio numero di lati. Così procedendo si ottiene una successione crescente di aree, che ha per limite quella del cerchio isoperimetro. E i raggi dei cerchi rispettivamente inscritti e circoscritti a questi poligoni forniscono due successioni convergenti che comprendono $\frac{1}{2\pi}$ (il perimetro fisso essendo preso come unità).

Lo sviluppo di questo metodo si trova in J. C. SCHWAB (*Éléments de Géométrie*, Nancy, 1813) ⁽¹⁾, il quale rileva esplicitamente che l'algoritmo del calcolo conduce a un procedimento periodico alternato, in cui si costruiscono successivamente medie aritmetiche e geometriche. Pertanto la regola per il calcolo di π viene riassunta da SCHWAB come segue:

Si formi una successione di numeri dei quali i due primi siano 0 e $\frac{1}{2}$, gli altri siano alternatamente medio aritmetico e medio geometrico tra i due immediatamente precedenti. Presi due numeri consecutivi della successione aventi uguali le prime $m + 1$ cifre decimali, si divida l'unità per il numero formato da queste cifre comuni: si ottiene per quoziente un valore di π approssimato per eccesso a meno di $\frac{1}{10^m}$.

I trattatisti che riportano questo metodo osservano che alla medesima regola si perviene anche col metodo archimedeo dei poligoni inscritti e circoscritti. Si tratta invero di adoperare quelle relazioni (di media geometrica e armonica) che già abbiamo visto essere state riconosciute da SNELLIO e GREGORY.

(¹) Cfr. i trattati di ROUCHÉ et COMBEROUSSE di SANNIA e D'OVIDIO.

Colla introduzione del calcolo infinitesimale, il numero π viene definito analiticamente e si iniziano così nuovi metodi pel calcolo di π ricorrendo a sviluppi in serie, a prodotti infiniti, o a frazioni continue. I metodi analitici per il calcolo di π sono più rapidi dei metodi elementari ed hanno permesso di calcolare valori approssimati di π fino con 707 cifre decimali nella speranza di mettere π sotto forma di numero decimale periodico; tale speranza cadde quando LAMBERT (1768) dimostrò che π è irrazionale. Colla dimostrazione, data nel 1882 dal LINDEMANN, che il numero π è trascendente, ossia non è radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali, venne dimostrata anche la impossibilità di risolvere elementarmente il problema della *quadratura del cerchio*, o della *rettificazione della circonferenza*.

Per maggiori particolari sull'argomento, si veda, ad esempio, l'articolo 22° di B. CALÒ in F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le mat. elementari*, Parte II, Vol. I; U. CASSINA, *Calcolo numerico*, Bologna, 1928; A. AGOSTINI, *Problemi elementari e problemi classici in Enciclopedia delle matematiche elementari*.

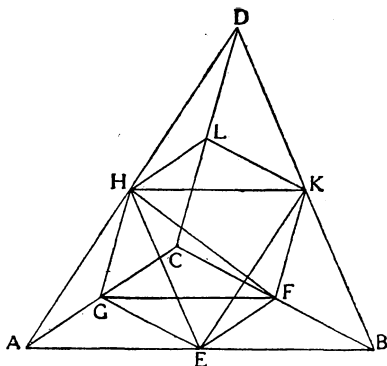
3.

Ogni piramide avente la base triangolare si divide in due piramidi di ugual base e simili all'intera, e in due prismi uguali; i due prismi insieme sono maggiori della metà dell'intera piramide.

Sia la piramide la cui base è il triangolo ABC e il vertice il punto D . Dico che la piramide ABC si divide in due piramidi di ugual base e simili all'intera, e in due prismi uguali; i due prismi insieme sono maggiori della metà dell'intera piramide.

Si dividano per metà AB , BC , CA , AD , BD , CD nei punti E , F , G , H , K , L e si conducano HE , EG , GH , HK , KL , LH , KF , FG .

Poichè AE è uguale ad EB e AH uguale a DH , la EH è parallela a DB (VI, 2). Per la stessa ragione anche HK è parallela ad AB . Quindi $HEBK$ è un parallelogrammo, ed HK è uguale ad EB (I, 34). Ma EB



è anche uguale ad AE , quindi AE è uguale ad HK . Inoltre AH è uguale ad HD , quindi EA , AH sono rispettivamente uguali a HK , HD e l'angolo EAH è uguale all'angolo KHD (I, 29).

La base EH è dunque uguale alla base KD (I, 4), perciò il triangolo AEH è uguale e simile (I, 4) al triangolo HKD . Per la stessa ragione il triangolo AHG è uguale e simile al triangolo HLD .

Poichè le rette che s'intersecano EH , HG sono parallele alle rette che s'incontrano KD , DL e non sono nello stesso piano, esse racchiudono angoli uguali (XI, 10): l'angolo EHG è dunque uguale all'angolo KDL . Inoltre, poichè le rette EH , HG sono rispettivamente uguali alle due KD , DL , e l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL ,

la base EG è uguale alla base KL e il triangolo EHG è uguale e simile al triangolo KDL (I, 4).

Per la stessa ragione il triangolo AEG è uguale e simile al triangolo HKL .

Dunque la piramide, la cui base è il triangolo AEG e vertice il punto H , è uguale e simile alla piramide la cui base è il triangolo HKL e vertice il punto D (XI, term. 10).

Poichè si è condotta la parallela HK ad uno dei lati AB del triangolo ADB , il triangolo ADB è equiangolo al triangolo DHK (I, 29) e i loro lati sono proporzionali. Il triangolo ADB è perciò simile al triangolo DHK (VI, term. 1).

Per la stessa ragione il triangolo DBC è simile al triangolo DKL e ADC è simile a DLH . Inoltre, poichè le due rette che si intersecano BA , AC sono parallele alle due rette che si incontrano KH , HL , esse racchiudono angoli uguali (XI, 10): l'angolo BAC è dunque uguale a \widehat{KHL} e BA sta ad AC come KH ad HL .

Il triangolo ABC è perciò simile al triangolo HKL (VI, 1).

Dunque la piramide, la cui base è il triangolo ABC e vertice il punto D , è simile alla piramide, la cui base è il triangolo HKL e vertice il punto D (XI, term. 9). Ma la piramide, la cui base è il triangolo HKL e vertice il punto D , si è dimostrata simile alla piramide, la cui base è il triangolo AEG , vertice il punto H . Quindi anche la piramide, la cui base è il triangolo ABC e vertice il punto D , è simile alla piramide, la cui base è il triangolo AEG

e vertice il punto H . Ciascuna dunque delle piramidi $AEGH$, $HKLD$ è simile all'intera piramide $ABCD$.

Poichè BF è uguale a FC , il parallelogrammo $EBFG$ è doppio del triangolo GFC (I, 41). Ora, se due prismi hanno uguale altezza e uno ha per base un parallelogrammo e l'altro un triangolo e il parallelogrammo è doppio del triangolo, i prismi sono uguali, quindi il prisma, racchiuso dai due triangoli BKF , EHG e dai tre parallelogrammi $EBFG$, $EBKH$, $HKFG$, è uguale al prisma racchiuso dai due triangoli GFC , HKL e dai tre parallelogrammi $KFCL$, $LCGH$, $HKFG$ (XI, 39).

Ed è evidente che ciascuno dei prismi, quello con base il parallelogrammo $EBFG$, cui è opposta la retta HK , e quello con base il triangolo GFC , cui è opposto il triangolo HKL , è maggiore di ciascuna delle piramidi aventi per base i triangoli AEG , HKL e vertici i punti H e D , poichè, se conduciamo le rette EF , EK , il prisma la cui base è il parallelogrammo $EBFG$, cui è opposta la retta HK , è maggiore della piramide la cui base è il triangolo EBF e vertice il punto K .

Ma la piramide, la cui base è il triangolo EBF e vertice il punto K , è uguale alla piramide, la cui base è il triangolo AEG e vertice il punto H , poichè sono racchiuse da piani simili. Dunque anche il prisma, la cui base è il parallelogrammo $EBFG$, cui è opposta la retta HK , è maggiore della piramide, la cui base è il triangolo AEG e vertice il punto H . Il prisma, la cui base è il parallelogrammo $EBFG$, cui è opposta la retta HK , è uguale al prisma, la cui base è il triangolo GFC , cui è opposto il

triangolo HKL ; e la piramide, la cui base è il triangolo AEG e vertice il punto H , è uguale alla piramide la cui base è il triangolo HKL e vertice il punto D . Quindi quei due prismi sono maggiori delle due piramidi le cui basi sono i triangoli AEG , HKL e vertici i punti H , D .

Dunque, l'intera piramide, la cui base è il triangolo ABC e vertice il punto D , è divisa in due piramidi uguali tra loro e in due prismi uguali e i due prismi sono maggiori della metà dell'intera piramide, c. d. d.

4.

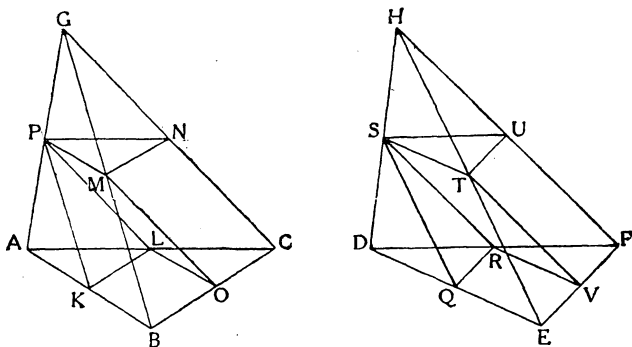
Date due piramidi aventi la stessa altezza e basi triangolari, se ciascuna di esse si divide in due piramidi uguali tra loro e simili all'intera e in due prismi uguali, la base di una piramide sta alla base dell'altra piramide come tutti i prismi della prima piramide stanno a tutti i prismi, in ugual numero, dell'altra piramide.

Siano due piramidi aventi la stessa altezza, le basi triangolari ABC , DEF e i vertici G , H ; si divida ciascuna di esse in due piramidi uguali tra loro e simili all'intera e in due prismi uguali (XII, 3). Dico che la base ABC sta alla base DEF come tutti i prismi della piramide $ABCG$ stanno a tutti i prismi, in ugual numero, della piramide $DEFH$.

Infatti, poichè BO è uguale ad OC ed AL è uguale ad LC (XII, 3), la LO è parallela alla AB e il triangolo ABC è simile al triangolo LOC . Per la stessa ragione anche il triangolo DEF è simile al triangolo RVF . E poi-

chè BC è doppio di CO ed EF di FV , si ha che BC sta a CO come EF ad FV .

Sopra le BC , CO si sono costruite le figure rettilinee ABC , LOC simili e similmente poste, e sopra EF , FV



le figure simili e similmente poste DEF , RVF , quindi il triangolo ABC sta al triangolo LOC come il triangolo DEF sta al triangolo RVF (VI, 22). Allora, permutando, il triangolo ABC sta al triangolo DEF come il triangolo LOC sta al triangolo RVF (V, 16). Ma il triangolo LOC sta al triangolo RVF , come il prisma, la cui base è il triangolo LOC opposto a PMN , sta al prisma, la cui base è il triangolo RVF opposto ad STU (v. lemma seguente). Quindi come il triangolo ABC sta al triangolo DEF , così il prisma, la cui base è il triangolo LOC opposto a PMN , sta al prisma, la cui base è il triangolo RVF opposto ad STU .

Ma i detti prismi stanno tra loro come il prisma, la cui base è il parallelogrammo $KBOL$, opposto alla retta PM ,

sta al prisma la cui base è il parallelogrammo $QEV R$, opposto alla retta ST (XI, 39; cfr. XII, 3). Quindi i due prismi, quello la cui base è il parallelogrammo $KBOL$ opposto alla retta PM e quello la cui base è LOC , opposto a PMN , hanno la stessa ragione dei prismi la cui base è $QEV R$, opposto alla retta ST , e la cui base è il triangolo RVF , opposto a STU (V. 12). Perciò la base ABC sta alla base DEF come i due prismi detti ai due prismi detti.

E similmente, se le piramidi $PMNG$, $STUH$ si dividono in due prismi e in due piramidi, la base PMN starà alla base STU come la somma dei due prismi della piramide $PMNG$ sta alla somma dei due prismi della piramide $STUH$. Ma la base PMN sta alla base STU come la base ABC sta alla base DEF , poichè ciascuno dei triangoli PMN , STU è uguale a ciascuno dei triangoli LOC , RVF . Quindi la base ABC sta alla base DEF anche come i quattro prismi stanno ai quattro prismi.

Similmente, anche se dividiamo le rimanenti piramidi in due piramidi e in due prismi, la base ABC starà alla base DEF , come tutti i prismi della piramide $ABCG$ stanno a tutti i prismi, in ugual numero, della piramide $DEFH$,

c. d. d.

LEMMA

Che il triangolo LOC sta al triangolo RVF come il prisma, la cui base è il triangolo LOC , opposto a PMN , sta al prisma, la cui base è RVF , opposto a STU , si dimostra così.

Nella stessa figura si conducano le perpendicolari da G e H ai piani ABC , DEF ; esse sono evidentemente uguali perchè abbiamo supposto le piramidi di uguale altezza. Poichè le due rette GC e la perpendicolare per G incontrano i piani paralleli ABC , PMN , esse sono segate nella stessa ragione (XI, 17).

Ma la GC è divisa per metà dal piano PMN , quindi anche la perpendicolare per G al piano ABC è divisa per metà dal piano PMN . Per la stessa ragione anche la perpendicolare per H al piano DEF è divisa per metà dal piano STU .

Ma le perpendicolari per G e H ai piani ABC , DEF sono uguali, quindi sono uguali anche le perpendicolari condotte dai triangoli PMN , STU sopra ABC e DEF . Perciò i prismi le cui basi sono i triangoli LOC , RVF , rispettivamente opposti a PMN , STU , hanno uguale altezza.

Dunque i solidi parallelepipedi costruiti nei detti prismi hanno uguale altezza e stanno tra loro come le basi (XI, 32). Allora la base LOC e la base RVF stanno tra loro come i detti prismi, metà dei parallelepipedi, c. d. d.

5.

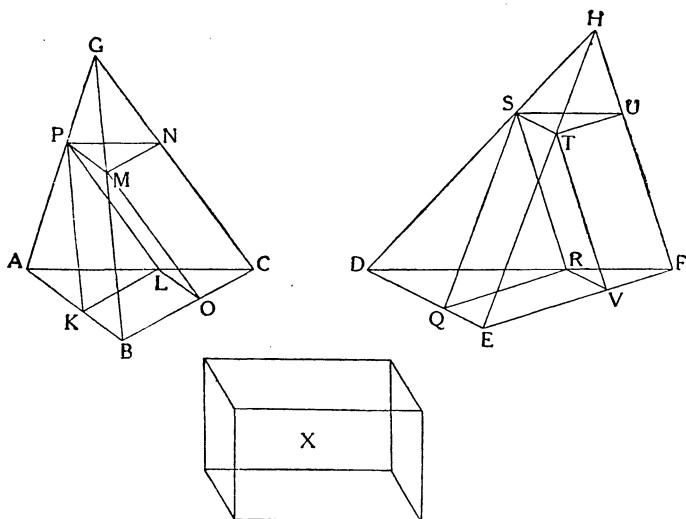
Piramidi aventi la stessa altezza e basi triangolari stanno tra loro come le basi.

Siano due piramidi aventi la stessa altezza, per basi i triangoli ABC , DEF e per vertici i punti G , H . Dico

che la base ABC sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$.

Se la base ABC non sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$, la base ABC stia alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta ad un solido o minore, o maggiore, di quello della piramide $DEFH$.

Stia dapprima al solido minore X e si divida la piramide $DEFH$ in due piramidi uguali tra loro e simili all'intera e in due prismi uguali: i due prismi insieme sono al-



lora maggiori della metà dell'intera piramide (XII, 3). Di nuovo si dividano similmente le piramidi sorte dalla divisione e si faccia sempre ciò finchè si trovino nella piramide $DEFH$ due piramidi che insieme siano minori dell'eccesso di cui la piramide $DEFH$ eccede il solido X

(X, 1). Si trovino e siano per esempio le $DQRS$, $STUH$: i rimanenti prismi della piramide $DEFH$ sono quindi maggiori del solido X .

Si divida anche la piramide $ABCG$ similmente, ed in ugual numero, alla piramide $DEFH$, allora la base ABC sta alla base DEF come i prismi della piramide $ABCG$ stanno ai prismi della piramide $DEFH$ (XII, 4). Ma la base ABC sta alla base DEF anche come la piramide $ABCG$ sta al solido X , dunque la piramide $ABCG$ sta al solido X come i prismi della piramide $ABCG$ stanno ai prismi della piramide $DEFH$ (V, 11). Permutando, (V, 16) la piramide $ABCG$ sta ai suoi prismi come il solido X sta ai prismi della piramide $DEFH$. Ma la piramide $ABCG$ è maggiore dei suoi prismi, quindi anche il solido X è maggiore dei prismi della piramide $DEFH$ (V, 14). Ma è anche minore, quindi è impossibile.

Dunque la base ABC non sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta ad un solido minore della piramide $DEFH$. Similmente dimostreremo che la base DEF non sta alla base ABC come la piramide $DEFH$ sta ad un solido minore della piramide $ABCG$.

Ora dico che la base ABC non sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta ad un solido maggiore della piramide $DEFH$.

Se è possibile, stia al solido maggiore X . Dunque (V, 7, coroll.) la base DEF sta alla base ABC come il solido X sta alla piramide $ABCG$. Ma il solido X sta alla piramide $ABCG$ come la piramide $DEFH$ sta ad un solido minore della piramide $ABCG$ come sopra abbiamo

dimostrato (XII, 2 coroll.). Quindi anche la base DEF sta alla base ABC come la piramide $DEFH$ sta ad un solido minore della piramide $ABCG$ (V, 11), ciò che abbiamo dimostrato impossibile.

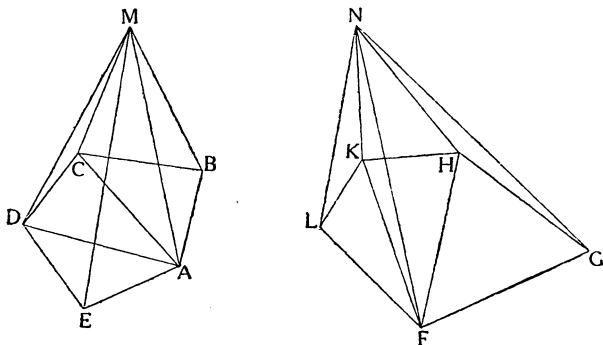
Dunque la base ABC non sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta ad un solido maggiore della piramide $DEFH$.

Abbiamo dimostrato che non può stare ad un solido minore, quindi la base ABC sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$, c. d. d.

6.

Le piramidi aventi la stessa altezza e basi poligonali stanno tra loro come le basi.

Siano date le piramidi aventi la stessa altezza e per basi i poligoni $ABCDE$, $FGHKL$ e per vertici i punti M ed N .



Dico che la base $ABCDE$ sta alla base $FGHKL$ come la piramide $ABCDEM$ sta alla piramide $FGHKLN$.

Conduciamo le AC , AD , FH , FK . Le piramidi

$ABCM$, $ACDM$ hanno le basi triangolari e uguale altezza, quindi stanno tra loro come le basi (XII, 5). Dunque la base ABC sta alla base ACD come la piramide $ABCM$ sta alla piramide $ACDM$, e, componendo (V, 18), la base $ABCD$ sta alla base ACD come la piramide $ABCDM$ sta alla piramide $ACDM$. Ma la base ACD sta alla base ADE (XII, 5) come la piramide $ACDM$ sta alla piramide $ADEM$, quindi, per uguaglianza (V, 22), la base $ABCD$ sta alla base ADE come la piramide $ABCDM$ sta alla piramide $ADEM$ e, di nuovo, componendo (V, 18), la base $ABCDE$ sta alla base ADE come la piramide $ABCDEM$ sta alla piramide $ADEM$.

Similmente dimostreremo anche che la base $FGHKL$ sta alla base FGH come la piramide $FGHKLN$ sta alla piramide $FGHN$.

E poichè $ADEM$, $FGHN$ sono due piramidi aventi basi triangolari e uguale altezza, la base ADE sta alla base FGH come la piramide $ADEM$ sta alla piramide $FGHN$ (XII, 5). Ma la base ADE sta alla base $ABCDE$ come la piramide $ADEM$ sta alla piramide $ABCDEM$, quindi, per uguaglianza (V, 22), la base $ABCDE$ sta alla base FGH come la piramide $ABCDEM$ sta alla piramide $FGHN$.

Ma la base FGH sta alla base $FGHKL$ anche come la piramide $FGHN$ sta alla piramide $FGHKLN$, quindi, ancora per uguaglianza (V, 22), la base $ABCDE$ sta alla base $FGHKL$ come la piramide $ABCDEM$ sta alla piramide $FGHKLN$,

c. d. d.

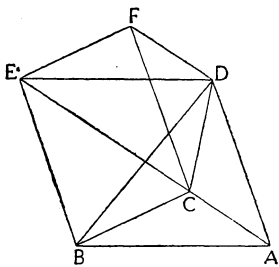
EUCLIDE considera, nella dimostrazione, due piramidi con le basi costituite da poligoni aventi un ugual numero di lati, ma è evidente, come mostrano COMMANDINO, CLAVIO e VITALE, che la dimostrazione è valida anche se i poligoni delle basi non hanno un ugual numero di lati.

7.

Ogni prisma avente la base triangolare si divide in tre piramidi uguali tra loro e aventi basi triangolari.

Sia un prisma la cui base è il triangolo ABC opposto a DEF , dico che il prisma $ABCDEF$ si divide in tre piramidi uguali tra loro e aventi basi triangolari.

Si conducano BD , EC , CD . Poichè $ABED$ è un parallelogrammo e BD è una sua diagonale, il triangolo ABD è uguale al triangolo EBD (I, 34); allora la piramide, la cui base è il triangolo ABD e vertice il punto C , è uguale alla piramide, che ha per base il triangolo DEB e



per vertice il punto C (XII, 5). Ma la piramide, che ha per base il triangolo DEB e per vertice il punto C , è uguale alla piramide la cui base è il triangolo EBC e vertice il punto

D , perchè sono racchiuse dagli stessi piani. Dunque anche la piramide, che ha per base il triangolo ABD e per vertice il punto C , è uguale alla piramide che ha per base il triangolo EBC e per vertice il punto D .

Di nuovo, poichè $FCBE$ è un parallelogrammo e CE è una sua diagonale, il triangolo CEF è uguale al triangolo CBE (I, 34), la piramide, che ha per base il triangolo BCE e per vertice il punto D , è uguale alla piramide che ha per base il triangolo CEF e per vertice il punto D (XII, 5).

Dimostrammo anche che la piramide, che ha per base il triangolo BCE e per vertice il punto D , è uguale alla piramide che ha per base il triangolo ABD e per vertice il punto C , dunque la piramide, che ha per base il triangolo CEF e per vertice il punto D , è uguale alla piramide che ha per base il triangolo ABD e per vertice il punto C .

Il prisma $ABCDEF$ è stato diviso in tre piramidi uguali tra loro e aventi basi triangolari.

La piramide, che ha per base il triangolo ABD e per vertice il punto C , è uguale alla piramide che ha per base il triangolo CAB e per vertice il punto D , perchè racchiuse dagli stessi piani, quindi è dimostrato che la piramide, che ha per base il triangolo ABD e per vertice il punto C , è la terza parte del prisma, la cui base è il triangolo ABC opposto a DEF , quindi anche la piramide, che ha per base il triangolo ABC e per vertice il punto D è la terza parte del prisma avente per base lo stesso triangolo ABC opposto a DEF .

COROLLARIO

Di qui è evidente che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base e uguale altezza, c. d. d.

Questo corollario, che assegna il volume della piramide, si può riguardare come lo scopo a cui tendono le precedenti proposizioni, che, in qualche modo, vengono in esso riassunte.

La scoperta del volume della piramide è attribuita da ARCHIMEDE (cfr. la prefazione in RUFINI, *Il Metodo di ARCHIMEDE* di questa collezione) a DEMOCRITO, aggiungendo che il teorema avrebbe avuto una dimostrazione rigorosa solo più tardi per opera di EUDOSSO. Mancano testimonianze positive per accertare in quale maniera DEMOCRITO sia pervenuto alla valutazione di cui sopra.

Secondo lo HEATH, DEMOCRITO avrebbe osservato dapprima che in due piramidi, di basi e altezze uguali, le sezioni fatte con piani paralleli alle basi e condotte alla stessa altezza sono uguali e avrebbe poi riconosciuto che dall'eguaglianza di queste sezioni segue l'equivalenza delle due piramidi anticipando, in qualche modo, *il metodo degli indivisibili* di CAVALIERI. Poi egli avrebbe insegnato a scomporre il prisma triangolare in tre piramidi triangolari equivalenti, come nella proposizione in esame.

Seguendo l'ipotesi dell'ENRIQUES, DEMOCRITO ha potuto invece scoprire direttamente il volume della piramide, senza conoscere la scomposizione del prisma in piramidi, in base alla costruzione che viene offerta dalla prop. XII, 3 di EUCLIDE; per ciò bastava usufruire della somma della progressione geometrica, la cui nozione può riattaccarsi agli argomenti di ZENONE D'ELEA.

Decomponiamo, come c'insegna EUCLIDE in XII, 3, una piramide triangolare $ABCD$ (v. fig. p. 169) in due piramidi $AEGH$, $HKLD$ simili alla data e in due prismi triangolari che risultano uguali tra loro. Si dimostra facilmente che la base dei due prismi è la quarta parte della base DBC della piramide e che la loro altezza è la metà dell'altezza della piramide relativa alla base DBC . I due prismi insieme sono quindi $\frac{1}{4}$ del prisma P che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide data.

Dividendo nello stesso modo le due piramidi $AEGH$, $HKLD$ si ottengono quattro prismi e quattro piramidi. I quattro prismi hanno le basi e le altezze uguali rispettivamente alla quarta parte e alla metà delle basi e delle altezze dei due prismi precedenti e insieme sono equivalenti a $\frac{1}{16}$ del prisma P .

Un'altra divisione dà luogo a otto prismi equivalenti a $\frac{1}{64}$ di P . Eseguendo n volte l'operazione, si verranno a determinare nella piramide tanti prismi il cui volume è dato da

$$V_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) P = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) P,$$

da cui, passando al limite,

$$V = \frac{1}{3} P.$$

Anche altri metodi, che il calcolo moderno traduce come metodi di integrazione, permettono di calcolare direttamente il volume della piramide.

Particolarmente notevole è un procedimento di cui si ha notizia da ARCHIMEDE, che lo generalizza ai corpi rotondi (*Sui conoidi e gli sferoidi*).

Per il caso che qui occorre, il procedimento consiste nel costruire uno scaloide inscritto alla piramide costituito da una serie di prismi con le basi parallele alla base della piramide: come è noto, questo scaloide si costruisce dividendo l'altezza della piramide in n parti uguali, e mandando per i punti di divisione i piani perpendicolari a codesta altezza; i triangoli segnati su questi piani dalla piramide formano le basi superiori dei prismi in questione.

Sommando i volumi dei prismi che formano lo scaloide e indicando con B l'area della base della piramide, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{h}{n} \left[\frac{B}{n^2} + \frac{2^2 B}{n^2} + \frac{3^2 B}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2 B}{n^2} \right] &= \\ = Bh \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}. \end{aligned}$$

Se, in luogo dello scaloide inscritto, si costruisce analogamente uno scaloide circoscritto, il volume di esso è dato da

$$Bh \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^3}.$$

Il volume V della piramide è compreso tra questi due valori e si calcola subito come limite di uno di essi per $n \rightarrow \infty$. Allo scopo occorre valutare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

e si ha

$$V = \frac{Bh}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} = \frac{Bh}{3}.$$

Lo studioso moderno, che ha familiare il calcolo infinitesimale, riconosce nel procedimento spiegato innanzi l'integrazione della funzione $\frac{Bx^2}{h^2}$ che rappresenta l'area del triangolo segato da un piano parallelo alla base che dista di x dal vertice; si ha invero:

$$\int_0^h \frac{Bx^2}{h^2} dx = \frac{B}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{Bh}{3}.$$

Questo modo di vedere (che si rende rigoroso nella trattazione critica dei principi del Calcolo) ha la sua origine in una intuizione che si può esprimere suggestivamente, se pure non rigorosamente, dicendo che « la piramide è la somma delle infinite superficie sezioni di essa parallele alla base ». Appunto da intuizioni di questo genere è nato il Calcolo infinitesimale, lentamente maturatosi nel fecondo periodo costruttivo del Rinascimento. E la precedente veduta trova una delle prime espressioni caratteristiche nel *Principio* del CAVALIERI, per cui due solidi compresi tra due piani paralleli hanno lo stesso volume se i piani paralleli a questi li segano secondo superficie uguali.

Chi postuli come intuitivo il principio del CAVALIERI giunge nel modo più rapido alla determinazione del volume della piramide,

riconoscendo anzitutto che due piramidi di uguale base ed altezza hanno volumi uguali, e ricorrendo poi alla decomposizione del prisma in tre piramidi, di cui alla Prop. in esame.

Anzi CLAIRAUT (*Élém. de Géom.*, Paris 1741) offre una dimostrazione anche più rapida e intuitiva dell'ultimo teorema. Avendo dedotto che due piramidi di uguale altezza sono proporzionali alle basi, egli osserva che basta sapere misurare una piramide per saperle misurare tutte. Ora, congiungendo il centro di un cubo, di base B e altezza $2h$, coi vertici di una faccia, si ottiene una piramide che è la sesta parte del cubo, quindi il suo volume è dato da

$$V = \frac{1}{6} B \cdot 2h = \frac{1}{3} Bh,$$

formula che si estende, per ciò che precede, a tutte le piramidi (cfr. A. NATUCCI, *Period. di Mat.*, 12 (1932), p. 305).

Limitandoci, per semplicità di discorso, al caso della piramide triangolare, o tetraedro, si conoscono altre espressioni del volume in funzione di diversi elementi sufficienti a determinare la figura.

Così GERGONNE (1828) e STEINER (1848) danno il volume del tetraedro in funzione di due spigoli opposti a , b e del loro momento (seno dell'angolo ϖ moltiplicato per la minima distanza δ):

$$V = \frac{1}{6} ab \delta \sin \varpi.$$

Più difficile è calcolare il volume del tetraedro in funzione dei sei spigoli: il metodo all'uopo escogitato da NICOLÒ TARTAGLIA (1560) è stato sviluppato da EULERO (1758), cui è dovuta la formula che risolve il problema.

Un'altra espressione notevole del volume del tetraedro, che appartiene pure ad EULERO, fa intervenire i tre spigoli per un vertice e quello che STAUDT ha chiamato seno dell'angolo triedro da essi formato.

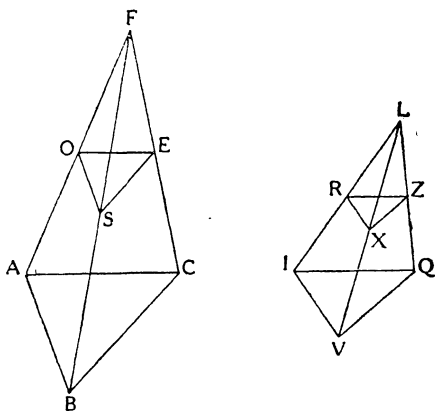
Queste, ed altre espressioni notevoli del volume del tetraedro, si trovano nell'articolo di G. SANSONE: « Sull'espressione del volume del tetraedro.... » in *Period. di Mat.*, 1923, p. 20.

Per giustificare il principio di CAVALIERI, si ritorna natural-

mente alla considerazione degli scaloidi inscritti e circoscritti, già incontrata nel procedimento archimedeo. Questa considerazione compare frequentemente nei trattati scolastici come metodo per confrontare le piramidi di uguali basi e altezze, in luogo di ricorrere alla prop. XII, 3 di EUCLIDE, e le osservazioni che qui occorre fare si riattaccano al TACQUET il quale giunge alla proporzionalità delle piramidi di uguale altezza alle basi, sostituendo alle XII, 3, 4 di EUCLIDE le seguenti proposizioni:

1) *Se due piramidi triangolari si segano con piani paralleli alle basi in modo da dividere i lati proporzionalmente, le sezioni delle piramidi stanno tra loro come le basi.*

Poichè i piani paralleli OSE , ABC sono segati dai piani BFC , AFB , AFC , le sezioni comuni SE , BC ; OS , AB e OE , AC sono (XI, 16) parallele. Dunque gli angoli OSE , ABC ; SOE , BAC ; OES , ACB sono a due a due uguali (XI, 10). Perciò le sezioni OSE , ABC sono simili.



Nello stesso modo si dimostra che sono simili le sezioni RXZ , IVQ .

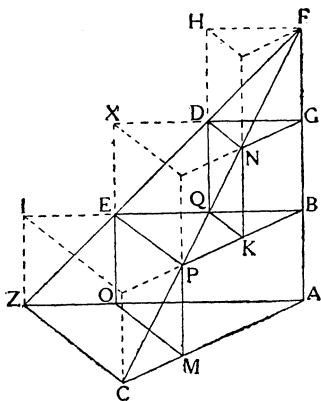
Ora la sezione ABC sta alla sezione OES come \overline{BC}^2 sta ad \overline{SE}^2 e la sezione IVQ sta a RXZ come \overline{VQ}^2 sta ad \overline{XZ}^2 (VI, 19); ma $BC:SE = VQ:XZ$, poichè $BC:SE = CF:EF = QL:ZL = VQ:XZ$.

Quindi il rapporto di ABC ad OSE è uguale a quello di IVQ ad RXZ .

2) *In una piramide triangolare i prismi inscritti all'infinito (scaloidi inscritti) tendono alla piramide stessa.*

Si divida un lato della piramide in alcune parti uguali AB , BG , GF , si facciano le sezioni GDN , BEP parallele alla base ZAC e si considerino i prismi triangolari inscritti nella piramide $BEPMAO$, $GDNKBQ$. Continuati questi fuori dalla piramide si considerino i prismi $CIBA$, $PXGB$, $NHFG$ come circoscritti alla piramide.

La differenza tra i prismi circoscritti e gli inscritti è data dai solidi IM , XK , HG che insieme sono uguali al prisma $CIBA$; infatti HG è uguale a DB e perciò HG più XK è uguale a $PXGB$, ossia a $MEBA$. Dunque HG , XK , IM sono insieme uguali a tutto il prisma $CIBA$.



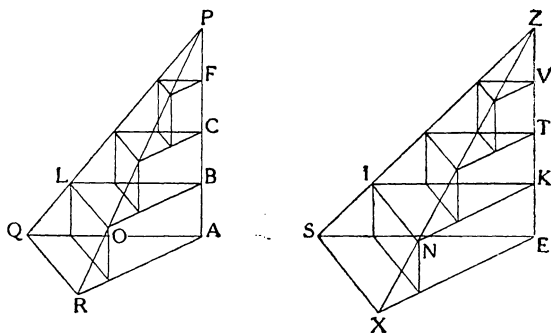
Ora se AF si divide indefinitamente in parti uguali (e in conseguenza si aumenta indefinitamente il numero dei prismi) AB si potrà rendere minore di ogni quantità data. Allora la differenza tra i prismi circoscritti (e a maggior ragione tra la piramide $ZCAF$, che è parte dei prismi circoscritti ad essa) e i prismi inscritti si può rendere minore di qualunque quantità data.

Dunque i prismi inscritti tendono alla piramide.

3) *Le piramidi triangolari di uguale altezza stanno tra loro come le basi.*

Divisi i lati AP , EZ in un ugual numero di parti uguali, si costruiscano i prismi triangolari inscritti, aventi due vertici nei punti di divisione e le basi parallele alle basi delle piramidi. I prismi risulteranno perciò di uguale altezza. Allora (XI, 34) il prisma LA sta al prisma IE come la base LOB sta alla base INK , ossia (pel primo lemma citato) come la base QRA della piramide sta alla base SXE dell'altra piramide.

Nello stesso modo si dimostra che ciascun prisma inscritto nella piramide $QPAR$ sta a ciascun prisma inscritto nella piramide $SZEX$, come la base QAR sta alla base SEX . Dunque pel



porisma universale che TACQUET ha premesso a questo libro, (cfr. nota a XII, 2) tutti i prismi, insieme, dell'una stanno a tutti i prismi dell'altra come la base sta alla base. Ma i prismi tendono alle piramidi, quindi anche queste stanno tra loro come le basi.

L'ordine delle deduzioni del TACQUET, ripreso e modificato attraverso il BERTRAND, riceve un nuovo assetto negli *Elementi* di LEGENDRE. La serie delle proposizioni che s'incontra in questo trattato si ritrova nella maggior parte delle esposizioni scolastiche che sono oggi più in uso. Basterà quindi enunciare queste proposizioni:

1) *Se una piramide è intersecata da un piano parallelo alla base, i lati e l'altezza sono divisi in parti proporzionali e il poligono sezione è simile alla base.*

2) *Date due piramidi aventi lo stesso vertice e uguali al-*

tezze, le sezioni fatte in esse con un piano parallelo al piano delle basi stanno tra loro come le basi.

3) Due piramidi triangolari, aventi basi equivalenti ed uguale altezza, sono equivalenti.

4) Ogni piramide triangolare è la terza parte di un prisma triangolare di ugual base ed uguale altezza.

5) Ogni piramide ha per misura il terzo del prodotto della base per l'altezza.

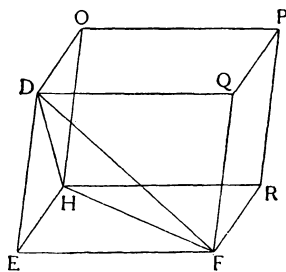
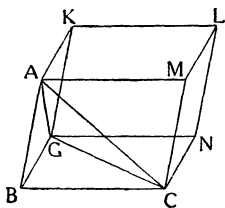
6) Due piramidi di uguale altezza stanno tra loro come le basi e piramidi di ugual base stanno tra loro come le altezze.

8.

Le piramidi simili ed aventi basi triangolari sono in ragione tripla dei lati omologhi.

Siano le piramidi simili con le basi triangolari ABC , DEF e vertici i punti G , H ; dico che la piramide $ABCG$ alla piramide $DEFH$ ha ragione tripla di quella di BC ad EF .

Si completino i solidi parallelepipedi $BGML$, $EHQP$.



Poichè la piramide $ABCG$ è simile alla piramide $DEFH$, l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF , \widehat{GBC} è uguale ad \widehat{HEF} e \widehat{ABG} è uguale a \widehat{DEH} , inoltre AB sta a DE

come BC sta ad EF e come BG sta ad EH . Ma poichè AB sta a DE come BC sta ad EF , i lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali, quindi il parallelogrammo BM è simile al parallelogrammo EQ .

Per la stessa ragione anche BN è simile ad ER e BK ad EO : dunque i parallelogrammi MB , BK , BN sono simili ai parallelogrammi EQ , EO , ER . Ma i tre parallelogrammi MB , BK , BN sono uguali e simili ai tre opposti e anche i tre parallelogrammi EQ , EO , ER sono uguali e simili ai tre opposti (XI, 24), quindi i solidi $BGML$, $EHQP$ sono racchiusi da un ugual numero di piani simili e uguali.

Dunque il solido $BGML$ è simile al solido $EHQP$ (XI, term. 9).

Ma solidi parallelepipedo simili sono in ragione tripla dei lati omologhi (XI, 33), quindi il solido $BGML$ e il solido $EHQP$ hanno ragione tripla di quella del lato BC al lato omologo EF . Inoltre il solido $BGML$ sta al solido $EHQP$ come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$, poichè la piramide è la sesta parte del solido, essendo il prisma metà del solido parallelepipedo (XI, 28; (XI, 28) triplo della piramide (XII, 7).

Dunque anche la piramide $ABCG$ e la piramide $DEFH$ hanno ragione tripla di quella di BC ad EF ,

c. d. d.

COROLLARIO

Di qui è manifesto che anche le piramidi simili, aventi basi poligonali, sono tra loro in ragione tripla dei lati omologhi.

Infatti dividiamo le due piramidi nello stesso numero di piramidi aventi basi triangolari, dividendo i poligoni simili delle basi in un ugual numero di triangoli simili (VI, 20); si avrà che una piramide a base triangolare dell'una sta ad una piramide a base triangolare dell'altra come tutte le piramidi a base triangolare di una delle piramidi sta a tutte le piramidi a base triangolare dell'altra (V, 12), o, ciò che è lo stesso, come la piramide a base poligonale sta all'altra piramide a base poligonale. Ma le piramidi aventi basi triangolari sono in ragione tripla dei lati omologhi, quindi anche una piramide a base poligonale ed un'altra avente base simile hanno ragione tripla di quella di un lato al lato omologo.

Come giustamente osserva l'HEATH, si deve dubitare della genuinità del corollario, poichè non è mai usato da EUCLIDE, anzi, dove dovrebbe essere invocato (XII, 12), si trova ripetuto il ragionamento che porta alla generalizzazione di questa proposizione.

Ora si suole dimostrare che *piramidi triangolari simili stanno tra loro come i cubi degli spigoli omologhi*, nel seguente modo:

Siano $ABCD$, $A'B'C'D'$ due piramidi triangolari simili di basi b , b' e altezze h e h' . Si ha

$$ABCD:A'B'C'D' = \frac{\frac{1}{3}bh}{\frac{1}{3}b'h'}$$

ma, indicando con l, l' due lati omologhi delle basi, è

$$\frac{b}{b'} = \frac{l^2}{l'^2}, \quad \frac{h}{h'} = \frac{l}{l'}$$

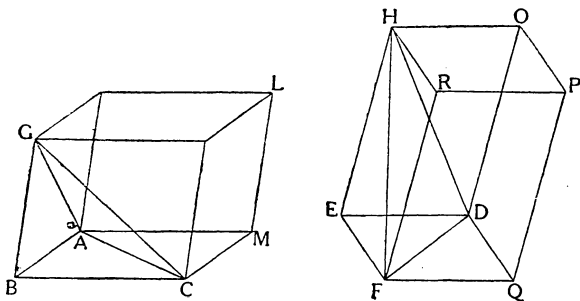
quindi

$$ABCD : A'B'C'D' = \frac{l^3}{l'^3}.$$

9.

Le basi di piramidi uguali a basi triangolari sono in ragione inversa delle altezze; e le piramidi, le cui basi sono in ragione inversa delle altezze, sono uguali.

Siano dunque le piramidi uguali aventi le basi triangolari ABC, DEF e i vertici nei punti G e H ; dico che le basi delle piramidi $ABCG, DEFH$ sono in ragione inver-



sa delle altezze, cioè la base ABC sta alla base DEF come l'altezza della piramide $DEFH$ sta all'altezza della piramide $ABCG$.

Si completino perciò i solidi parallelepipedi $BGML, EHQP$.

Poichè la piramide $ABCG$ è uguale alla piramide $DEFH$, e il solido $BGML$ è sei volte la piramide $ABCG$ e il solido $EHQP$ è sei volte la piramide $DEFH$, il solido $BGML$ è uguale al solido $EHQP$. Ma le basi di solidi parallelepipedi uguali sono in ragione inversa delle altezze (XI, 34), quindi la base BM sta alla base EQ come l'altezza del solido $EHQP$ sta all'altezza del solido $BGML$. Ma la base BM sta alla base EQ come il triangolo ABC sta al triangolo DEF (I, 34), quindi anche il triangolo ABC sta al triangolo DEF come l'altezza del solido $EHQP$ sta all'altezza del solido $BGML$ (V, 11).

L'altezza del solido $EHQP$ è la stessa dell'altezza della piramide $DEFH$ e l'altezza del solido $BGML$ è la stessa dell'altezza della piramide $ABCG$, quindi la base ABC sta alla base DEF come l'altezza della piramide $DEFH$ sta all'altezza della piramide $ABCG$.

Le basi delle piramidi $ABCG$, $DEFH$ sono dunque in ragione inversa delle altezze.

Ora le basi delle piramidi $ABCG$, $DEFH$ siano in ragione inversa delle altezze, e precisamente la base ABC stia alla base DEF come l'altezza della piramide $DEFH$ sta all'altezza della piramide $ABCG$; dico che la piramide $ABCG$ è uguale alla piramide $DEFH$.

Infatti, per ipotesi, la base ABC sta alla base DEF come l'altezza della piramide $DEFH$ sta all'altezza della piramide $ABCG$, ma la base ABC sta alla base DEF come il parallelogrammo BM sta al parallelogrammo EQ (I, 34), quindi il parallelogrammo BM sta al parallelo-

grammo EQ come l'altezza della piramide $DEFH$ sta all'altezza della piramide $ABCG$ (V, 11).

Ma l'altezza della piramide $DEFH$ è la stessa dell'altezza del parallelepipedo $EHQP$ e l'altezza della piramide $ABCG$ è la stessa dell'altezza del parallelepipedo $BGML$, quindi la base BM sta alla base EQ come l'altezza del parallelepipedo $EHQP$ sta all'altezza del parallelepipedo $BGML$. Ma i solidi parallelepipedi, le cui basi sono in ragione inversa delle altezze, sono uguali (XI, 34): dunque il solido parallelepipedo $BGML$ è uguale al solido parallelepipedo $EHQP$. Ed essendo la piramide $ABCG$ la sesta parte del parallelepipedo $BGML$ e la piramide $DEFH$ la sesta parte del parallelepipedo $EHQP$, la piramide $ABCG$ è uguale alla piramide $DEFH$.

Dunque le basi di piramidi uguali a basi triangolari sono in ragione inversa delle altezze; e le piramidi, le cui basi sono in ragione inversa delle altezze, sono uguali, c. d. d.

10.

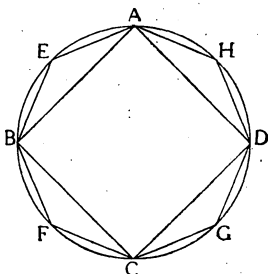
Ogni cono è la terza parte di un cilindro avente la stessa base e uguale altezza.

Il cono abbia infatti la stessa base del cilindro: il cerchio $ABCD$; dico che il cono è la terza parte del cilindro, cioè che il cilindro è il triplo del cono.

Infatti se il cilindro non è il triplo del cono, esso sarà o maggiore o minore del triplo del cono.

Sia dapprima maggiore del triplo e si inscriba nel cerchio $ABCD$ il quadrato $ABCD$ (IV, 6), allora il quadra-

to $ABCD$ è maggiore della metà del cerchio $ABCD$ (cfr. XII, 2).



Sul quadrato $ABCD$ si costruisca il prisma di altezza uguale a quella del cilindro; il prisma costruito è maggiore della metà del cilindro, poichè, se circoscriviamo un quadrato intorno al cerchio $ABCD$ (IV, 7), il quadrato inscritto nel cerchio $ABCD$ è metà del circoscritto e i solidi parallelepipedi costruiti su essi sono prismi di uguale altezza. Ma i solidi parallelepipedi aventi la stessa altezza sono tra loro come le basi (XI, 32), quindi il prisma costruito sul quadrato $ABCD$ è metà del prisma costruito sul quadrato circoscritto al cerchio $ABCD$ (XI, 28; XII, 6, 7 coroll.). Il cilindro poi è minore del prisma costruito sul quadrato circoscritto al cerchio $ABCD$, quindi il prisma costruito sul quadrato $ABCD$, di altezza uguale a quella del cilindro, è minore della metà del cilindro.

Si dividano ora gli archi AB , BC , CD , DA per metà mediante i punti E , F , G , H e si conducano le AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA ; ciascuno dei triangoli AEB , BFC , CGD , DHA è, come sopra abbiamo dimo-

strato (XII, 2), minore della metà dei rispettivi segmenti del cerchio $ABCD$.

Si costruiscano su ciascuno dei triangoli AEB , BFC , CGD , DHA i prismi di altezza uguale a quella del cilindro; ciascuno dei prismi costruiti è maggiore della metà dei corrispondenti segmenti del cilindro, poichè, se pei punti E , F , G , H conduciamo le parallele alle AB , BC , CD , DA e completiamo sulle AB , BC , CD , DA i parallelogrammi, e su questi costruiamo i solidi parallelepipedi di altezza uguale a quella del cilindro, i prismi sui triangoli AEB , BFC , CGD , DHA sono metà di ciascuno dei parallelepipedi costruiti, ma i segmenti del cilindro sono minori dei solidi parallelepipedi costruiti, dunque i prismi costruiti sui triangoli AEB , BFC , CGD , DHA sono maggiori della metà dei rispettivi segmenti del cilindro.

Ora dividiamo gli archi ottenuti per metà, *conduciamo le rette e costruiamo su ciascuno dei triangoli i prismi di altezza uguale a quella del cilindro, così seguitando troveremo certi segmenti del cilindro i quali sono minori dell'eccesso del cilindro sul triplo del cono (X, 1). Si trovino e siano AE , EB , BF , FC , CG , GD , DH , HA . Allora il prisma rimanente, la cui base è il poligono $AEBFCGDH$ e l'altezza quella del cilindro, è maggiore del triplo del cono. Ma il prisma, avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per altezza quella del cilindro, è il triplo della piramide avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per vertice quello del cono (XII, 7 coroll.), quindi la piramide, avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per vertice quello del cono è maggiore del cono avente come

base il cerchio $ABCD$. Ma è anche minore, perchè compresa da esso: si ha quindi l'assurdo.

Dunque il cilindro non è maggiore del triplo del cono.

Dico che il cilindro non è neanche minore del triplo del cono.

Infatti, se è possibile, il cilindro sia minore del triplo del cono. Inversamente dunque il cono è maggiore della terza parte del cilindro. Si inscriba nel cerchio $ABCD$ il quadrato $ABCD$ (IV, 6), che è maggiore della metà del cerchio $ABCD$ (XII, 2). Sul quadrato $ABCD$ si costruisca la piramide avente la stessa altezza del cono. La piramide costruita è allora maggiore della metà del cono, poichè, come sopra abbiamo dimostrato (XII, 2), il quadrato (IV, 7) $ABCD$, inscritto nel cerchio, è uguale a metà del quadrato circoscritto al cerchio, e se sui quadrati costruiamo i solidi parallelepipedi di altezza uguale a quella del cono, quello costruito sul quadrato $ABCD$ è metà di quello costruito sul quadrato circoscritto al cerchio, poichè stanno tra loro come le basi (XI, 32). Quindi anche le terze parti, ossia la piramide, la cui base è il quadrato $ABCD$, è la metà della piramide costruita sul quadrato circoscritto al cerchio (XII, 7 coroll.) e la piramide costruita sul quadrato circoscritto al cerchio è maggiore del cono, perchè lo contiene.

Dunque la piramide, avente per base il quadrato $ABCD$ e per vertice quello del cono, è maggiore della metà del cono.

Si dividano per metà gli archi AB , BC , CD , DA nei punti E , F , G , H e si conducano le AE , EB , BF , FC ,

CG, GD, DH, HA ; ciascuno dei triangoli AEB, BFC, CGD, DHA è maggiore della metà dei rispettivi segmenti del cerchio $ABCD$. Si costruiscano su ciascuno dei triangoli AEB, BFC, CGD, DHA le piramidi aventi lo stesso vertice del cono, allora ciascuna delle piramidi costruite è, nello stesso modo, maggiore della metà dei rispettivi segmenti del cono.

Dividiamo ora i rimanenti archi per metà e conduciamo le rette e costruiamo su ciascuno dei triangoli le piramidi aventi lo stesso vertice del cono; così seguitando troveremo certi segmenti del cono i quali saranno maggiori dell'eccesso del cono sulla terza parte del cilindro (X, 1). Si trovino, e siano quelli relativi ad $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA$. Dunque la rimanente piramide, avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per vertice quello del cono, è maggiore della terza parte del cilindro. Ma la piramide, avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per vertice quello del cono, è la terza parte del prisma avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per altezza la stessa del cilindro, dunque anche il prisma, avente per base il poligono $AEBFCGDH$ e per altezza quella del cilindro, è maggiore del cilindro avente per base il cerchio $ABCD$: ma è anche minore, perchè racchiuso da esso, quindi è impossibile. Dunque il cilindro non può essere minore del triplo del cono.

Abbiamo anche dimostrato che non è maggiore del triplo, quindi il cilindro è triplo del cono, ossia il cono è la terza parte del cilindro.

Dunque ogni cono è la terza parte di un cilindro avente la stessa base e uguale altezza, c. d. d.

La scoperta di questa proposizione è dovuta a DEMOCRITO (cfr. nota alla XII, 7).

Qui, come nelle proposizioni seguenti, EUCLIDE considera solamente coni e cilindri retti, ma è facile estendere, come fanno COMMANDINO e CLAVIO, le proprietà ai coni e ai cilindri obliqui.

TACQUET premette a questa proposizione il lemma :

Le piramidi ed i prismi che si inscrivono all'infinito nei coni e nei cilindri tendono ai coni e ai cilindri.

Quindi osserva che le piramidi a base regolare inscritte nel cono sono un terzo dei prismi corrispondenti inscritti nel cilindro. Ma le piramidi tendono al cono e i prismi al cilindro, quindi, pel suo *porisma generale* (cfr. nota alla XII, 2) il cono è un terzo del cilindro di ugual base e altezza.

EUCLIDE non parla mai della superficie dei corpi rotondi, perchè alla sua epoca non si era ancora scoperto il modo razionale di misurarli: spetta ad ARCHIMEDE il merito della scoperta. Accenniamo qui ai risultati conseguiti da ARCHIMEDE relativi al cono e al cilindro e contenuti nel I libro *Sul cilindro e sulla sfera*.

Per definire l'area d'una superficie curva, ARCHIMEDE ricorre ad assunzioni analoghe a quelle usate per introdurre la lunghezza d'una curva. Queste assunzioni rivestono una forma particolarmente semplice, poichè l'autore greco si limita a prendere in considerazione superficie (a punti ellittici, o parabolici) che nell'intorno di ogni punto giacciono tutte da una parte del piano tangente; riesce così evitata la più grande difficoltà che i critici moderni incontrano in tale ordine di questioni, per stabilire una teoria generale che comprenda anche il caso delle superficie a punti iperbolici.

ARCHIMEDE, o non ha avuto occasione di osservare l'esistenza di queste superficie, ovvero volontariamente s'è limitato a quelle che comprendono le superficie costituenti l'oggetto proprio della sua ricerca. Comunque, egli dà alle sue assunzioni 3 e 4 una forma precisa, che traduciamo liberamente :

Una superficie il cui contorno sia una linea piana è maggiore della superficie piana racchiusa da questo contorno.

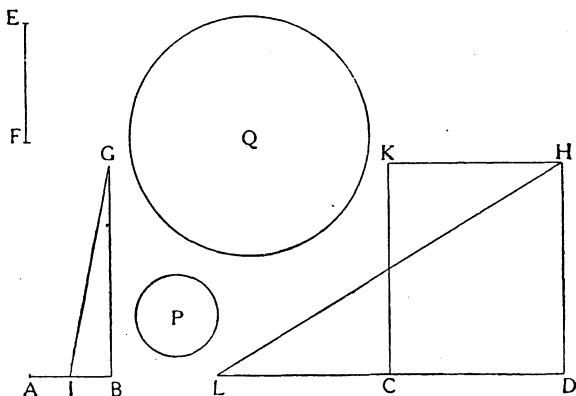
Se due superficie [a punti ellittici o parabolici] sono terminate dal medesimo contorno piano, e rivolgono in ogni punto la loro concavità nella medesima direzione, e se inoltre una di esse è compresa nel solido terminato dall'altra e dal piano del suo contorno, questa superficie compresa è minore di quella che la comprende.

In base a queste assunzioni, ed a quella nota sotto il nome di postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE, il matematico siracusano sviluppa la teoria delle superficie laterali del cilindro e del cono, e, come vedremo più avanti, trova poi la superficie della sfera. Qui diamo in breve i risultati conseguiti da ARCHIMEDE per il cono e il cilindro.

AREA LATERALE DEL CILINDRO. — Premesso il lemma (prop. XI e XII):

Ogni prisma inscritto in un cilindro retto ha area laterale minore di quella del cilindro, e ogni prisma circoscritto ad un cilindro ha area laterale maggiore dell'area laterale del cilindro,

ARCHIMEDE dimostra la proposizione (prop. XIII):



L'area laterale di ogni cilindro retto è uguale al cerchio che ha il raggio medio proporzionale tra l'altezza del cilindro e il diametro della base del cilindro.

Sia P il cerchio base del cilindro, AB il diametro di questo cerchio, e CD sia uguale all'altezza del cilindro. EF sia la media proporzionale tra AB e CD , e Q un cerchio di raggio EF . Si vuol dimostrare che il cerchio Q è uguale alla superficie laterale S del cilindro.

Se non è $Q = S$, sarà $Q > S$, oppure $Q < S$.

1^a Ipotesi. — Sia $Q < S$. Si inscriva al cerchio Q un poligono regolare e se ne circoscriva un altro in modo che il rapporto del poligono circoscritto all'inscritto sia minore del rapporto $S:Q$ (la possibilità di ciò è dimostrata da ARCHIMEDE in una proposizione precedente; cfr. la nota alla XII, 2). Circoscriviamo al cerchio P un poligono simile a quello circoscritto a Q e costruiamo su esso un prisma con altezza uguale a quella del cilindro: il prisma risulterà circoscritto al cilindro. Si prenda BG perpendicolare ad AB e DH perpendicolare a CD e ambedue uguali al perimetro del poligono circoscritto a P . Si congiunga G col punto I di mezzo di AB e si completi il rettangolo $CDHK$.

Sarà

$$\begin{aligned} \text{triang. } IBG &= \text{polig. circosc. a } P, \\ \text{rett. } CDHK &= \text{sup. lat. del prisma.} \end{aligned}$$

Si prolunghi CD di $LC = CD$ e si conduca LH . I poligoni circoscritti ai cerchi P e Q , essendo simili, stanno tra loro come i quadrati dei raggi, quindi

$$\begin{aligned} \text{triang. } IBG : \text{pol. circosc. a } Q &= \overline{IB}^2 : \overline{EF}^2 \\ &= \overline{IB}^2 : \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ &= \overline{IB}^2 : 2\overline{IB} \cdot \overline{CD} \\ &= IB : LD, \text{ e poichè } BG = DH, \\ &= \text{triang. } IBG : \text{triang. } LDH, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \text{polig. circosc. a } Q &= \text{triang. } LDH = \\ &= \text{rett. } CDHK = \text{sup. lat. del prisma.} \end{aligned}$$

Ora per ipotesi è

$$\text{polig. circosc. a } Q : \text{polig. inscr. in } Q < S : Q,$$

quindi

$$\text{sup. lat. prisma} : \text{pol. inscr. in } Q < S : Q,$$

ossia

$$\text{sup. lat. prisma} : S < \text{pol. inscr. in } Q : Q,$$

ciò che è assurdo, poichè la superficie laterale del prisma è maggiore di S , mentre il poligono inscritto in Q è minore di Q .

2^a *Ipotesi.* — Sia $Q > S$. Si inscriva al cerchio Q un poligono regolare e se ne circoscriviva un altro in modo che il rapporto tra il poligono circoscritto e l'inscritto sia minore del rapporto $Q:S$. Nel cerchio P inscriviamo un poligono simile a quello inscritto in Q e sopra di esso costruiamo il prisma inscritto nel cilindro. Si prenda $BG = DH =$ perimetro del poligono inscritto in P . Sarà

$$\text{triang. } IBG > \text{pol. inscr. in } P,$$

poichè l'apotema del poligono inscritto è minore del raggio del cerchio.

Inoltre

$$\text{triang. } LDH = \text{rett. } CDHK = \text{sup. lat. del prisma.}$$

Ma è

$$\begin{aligned} \text{pol. inscr. in } P : \text{pol. inscr. in } Q &= \overline{IB}^2 : \overline{EF}^2 \\ &= \text{triang. } IBG : \text{triang. } LDH, \end{aligned}$$

ma triang. $IBG >$ pol. inscr. in P , quindi

$$\text{triang. } LDH = \text{sup. lat. prisma} > \text{pol. inscr. in } Q.$$

Ciò è assurdo perchè è

pol. circosc. a Q : pol. inscr. in $Q < Q$: $S <$ pol. circs. in Q : S , ed essendo il poligono circoscritto a Q maggiore di Q , segue

$$\text{pol. inscr. in } Q > S > \text{sup. lat. prisma.}$$

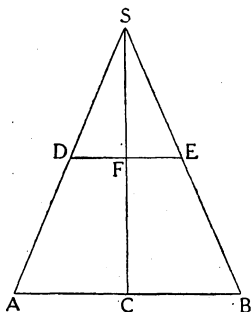
Non essendo Q nè maggiore, nè minore di S , sarà $Q = S$.

AREA LATERALE DEL CONO E DEL TRONCO DI CONO. — Sempre col metodo di esaurimento, ARCHIMEDE dimostra che :

La superficie laterale del cono retto è uguale al cerchio avente per raggio la media proporzionale tra l'apotema del cono e il raggio della base del cono (prop. XIV);

Il rapporto tra la superficie laterale del cono retto e la base è uguale a quello dell'apotema del cono al raggio della base del cono (prop. XV).

ARCHIMEDE dà poi la regola per calcolare la superficie laterale di un tronco di cono retto deducendola in modo semplice (prop. XVI):



Sia SAB una sezione assiale del cono cui appartiene il tronco retto $ABDE$. La superficie laterale dei coni SAB , SDE è uguale a due cerchi di raggio $\sqrt{\overline{SA} \cdot \overline{AC}}$ e $\sqrt{\overline{SD} \cdot \overline{DF}}$ e la superficie laterale del tronco è la differenza dei due cerchi. Si ha

$$\overline{SA} \cdot \overline{AC} - \overline{SD} \cdot \overline{DF} = \overline{DA} \cdot \overline{AC} + \overline{SD} \cdot \overline{AC} - \overline{SD} \cdot \overline{DF},$$

ma

$$\overline{SD} : \overline{SA} = \overline{DF} : \overline{AC},$$

ossia

$$\overline{SD} \cdot \overline{AC} = \overline{SA} \cdot \overline{DF},$$

quindi

$$\begin{aligned} \overline{SA} \cdot \overline{AC} - \overline{SD} \cdot \overline{DF} &= \overline{DA} \cdot \overline{AC} + \overline{SA} \cdot \overline{DF} - \overline{SD} \cdot \overline{DF} = \\ &= \overline{DA} \cdot \overline{AC} + \overline{DA} \cdot \overline{DF} = \overline{DA}(\overline{AC} + \overline{DF}). \end{aligned}$$

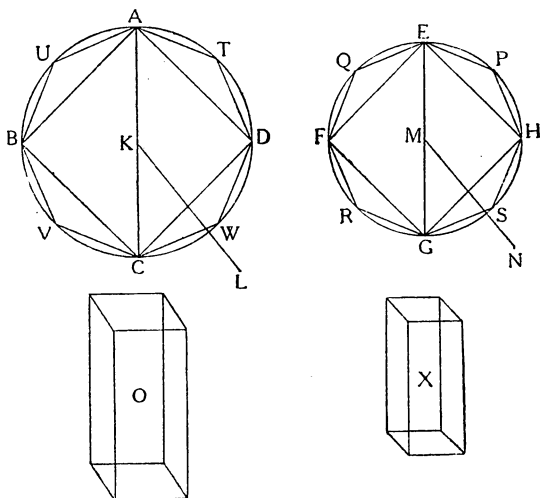
Dunque la superficie laterale del tronco di cono è uguale ad un cerchio che ha il raggio $\sqrt{\overline{DA}(\overline{AC} + \overline{DF})}$, ossia che ha il raggio medio proporzionale tra l'apotema del tronco e la somma dei raggi delle basi.

11.

I coni e i cilindri aventi la stessa altezza stanno tra loro come le basi.

I coni e i cilindri, aventi i cerchi $ABCD$, $EFGH$ per basi, KL , MN per assi, e AC , EG come diametri delle basi, abbiano la stessa altezza. Dico che il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il cono AL sta al cono EN .

Se ciò non è, il cerchio $ABCD$ stia al cerchio $EFGH$ come il cono AL sta ad un solido minore, ovvero maggiore del cono EN . Stia dapprima al solido minore O , e il solido X sia uguale all'eccesso del cono EN sul solido O : il cono EN è allora uguale alla somma dei solidi O e X .



Si inscriva nel cerchio $EFGH$ il quadrato $EFGH$ (IV, 6); il quadrato è allora maggiore della metà del cer-

chio (cfr. XII, 2). Sul quadrato $EFGH$ si costruisca una piramide di altezza uguale a quella del cono: la piramide costruita è maggiore della metà del cono, poichè, se circoscriviamo al cerchio un quadrato (IV, 7) e su di esso costruiamo una piramide di altezza uguale a quella del cono, la piramide inscritta è metà della circoscritta, perchè stanno tra loro come le basi (XII, 6); e inoltre il cono è minore della piramide circoscritta.

Si dividano per metà gli archi HE , EF , FG , GH mediante i punti P , Q , R , S e si conducano le HP , PE , EQ , QF , FR , RG , GS , SH .

Ciascuno dei triangoli HPE , EQF , FRG , GSH è maggiore della metà del rispettivo segmento del cerchio (cfr. XII, 2). Si costruisca su ciascuno dei triangoli HPE , EQF , FRG , GSH una piramide di altezza uguale a quella del cono: ciascuna delle piramidi costruite è maggiore della metà del rispettivo segmento del cono (cfr. XII, 10). Ora dividiamo gli archi precedenti per metà, conduciamo le rette e costruiamo su ciascuno dei triangoli le piramidi di altezza uguale a quella del cono, così seguendo, troveremo certi segmenti del cono i quali sono minori del solido X (X, 1).

Si trovino e siano quelli su HPE , EQF , FRG , GSH ; la rimanente piramide, avente per base il poligono $HPEQFRGS$ e per altezza quella del cono, è quindi maggiore del solido O . Si inscriba poi nel cerchio $ABCD$ il poligono $DTAUBVCW$ simile, e similmente posto, al poligono $HPEQFRGS$ (cfr. VII, 18) e su di esso si costruisca una piramide di altezza uguale a quella del cono.

Ora, poichè il quadrato di AC sta al quadrato di EG come il poligono $DTAUBVCW$ sta al poligono $HPEQFRGS$ (XII, 1) e il quadrato di AC sta a quello di EG come il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ (XII, 2), allora il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il poligono $DTAUBVCW$ sta al poligono $HPEQFRGS$. Ma il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il cono AL sta al solido O e il poligono $DTAUBVCW$ sta al poligono $HPEQFRGS$ come la piramide, avente per base il poligono $DTAUBVCW$ e per vertice il punto L , sta alla piramide avente per base il poligono $HPEQFRGS$ e per vertice il punto N (XII,6). Quindi anche il cono AL sta al solido O come la piramide, avente per base il poligono $DTAUBVCW$ e per vertice il punto L , sta alla piramide, avente per base il poligono $HPEQFRGS$ e per vertice il punto N . Allora, permutando (V, 16), il cono AL sta alla piramide interna ad esso come il solido O sta alla piramide interna al cono EN . Ma il cono AL è maggiore della piramide inscritta in esso, quindi il solido O è maggiore della piramide interna al cono EN (V, 14), ma è anche minore, quindi si ha l'assurdo.

Dunque il cerchio $ABCD$ non sta al cerchio $EFGH$ come il cono AL sta ad un solido minore del cono EN .

Similmente poi dimostreremo che anche il cerchio $EFGH$ non sta al cerchio $ABCD$ come il cono EN sta ad un solido minore del cono AL .

Ora dico anche che il cerchio $ABCD$ non sta al cer-

chio $EFGH$ come il cono AL sta ad un solido maggiore del cono EN .

Infatti, se è possibile, stia al solido maggiore O . Allora, invertendo, il cerchio $EFGH$ sta al cerchio $ABCD$ come il solido O sta al cono AL (V, 7 coroll.). Ma il solido O sta al cono AL come il cono EN sta ad un solido minore del cono AL (XII, 2 coroll.). Quindi anche il cerchio $EFGH$ sta al cerchio $ABCD$ come il cono EN sta ad un solido minore del cono AL : il che abbiamo dimostrato impossibile.

Dunque il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il cono AL sta al cono EN .

Ma il cono sta al cono, come il cilindro sta al cilindro, poichè ciascuno di questi è triplo di ciascuno di quelli (XI, 10). Quindi il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come i cilindri di ugual altezza aventi quei cerchi per base.

Dunque i coni e i cilindri che hanno la stessa altezza stanno tra loro come le basi, c. d. d.

Seguendo un procedimento che abbiamo già visto nelle note precedenti, il TACQUET considera le piramidi inscritte nei due coni: esse stanno tra loro come le basi (XII, 6), e tendono ai coni, quindi anche i coni, pel porisma universale (cfr. nota a XII, 2), stanno tra loro come le basi.

LEGENDRE dimostra questa proprietà seguendo un metodo analogo a quello che abbiamo riferito in XII, 2. Egli dimostra dapprima che:

Il volume di un cilindro è uguale al prodotto della base per l'altezza.

Infatti il prodotto della base per l'altezza di un dato cilindro non può essere il volume di un cilindro di ugual altezza e di minor base, perchè a questo cilindro si potrebbe allora circoscrivere un

prisma che avrebbe volume minore. Inoltre il prodotto della base per l'altezza del dato cilindro non può essere la misura di un cilindro con base maggiore ed uguale altezza, perchè in questo cilindro si potrebbe allora inscrivere un prisma di maggior volume.

Deduce quindi, come corollari, la proposizione presente e la XII, 12:

I cilindri di uguale altezza stanno tra loro come le basi; e i cilindri di ugual base stanno tra loro come le altezze.

I cilindri simili stanno tra loro come i cubi delle altezze o come i cubi dei diametri delle basi. Perchè le basi stanno come i quadrati dei loro diametri e perchè, essendo i cilindri simili, i diametri delle basi stanno come le altezze.

Uguualmente procede per i coni.

12.

I coni e i cilindri simili sono in ragione tripla dei diametri delle basi.

Siano i coni e i cilindri simili, di cui i cerchi $ABCD$, $EFGH$ sono le basi, BD , FH i diametri delle basi, e KL , MN gli assi dei coni e dei cilindri; dico che il cono avente per base il cerchio $ABCD$ e per vertice il punto L ed il cono, avente per base il cerchio $EFGH$ e per vertice il punto N , hanno ragione tripla di quella di BD ad FH .

Se il cono $ABCDL$ ed il cono $EFGHN$ non hanno ragione tripla di quella di BD ad FH , il cono $ABCDL$ abbia ragione tripla rispetto ad un solido minore o maggiore del cono $EFGHN$. L'abbia dapprima rispetto al solido minore O e si inscriva nel cerchio $EFGH$ il quadrato $EFGH$ (IV, 6).

Il quadrato $EFGH$ è allora maggiore della metà del cerchio $EFGH$ (cfr. XII, 2). Si costruisca sul quadrato

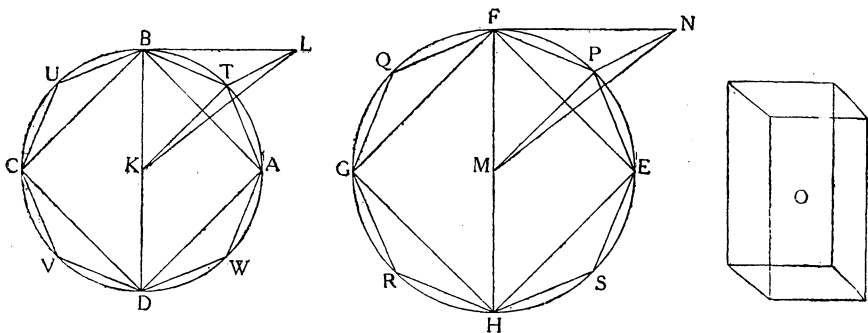
$EFGH$ la piramide avente lo stesso vertice del cono: la piramide costruita è allora maggiore della metà del cono (cfr. XII, 10). Dividiamo ora per metà gli archi EF , FG , GH , HE mediante i punti P , Q , R , S , e conduciamo le EP , PF , FQ , QG , GR , RH , HS , SE .

Ciascuno dei triangoli EPF , FQG , GRH , HSE è maggiore della metà del corrispondente segmento del cerchio $EFGH$ (cfr. XII, 2). Si costruisca su ciascuno dei triangoli EPF , FQG , GRH , HSE una piramide avente lo stesso vertice del cono: ciascuna delle piramidi costruite è maggiore della metà del rispettivo segmento del cono.

Dividiamo ora gli archi ottenuti per metà, conduciamo le rette e costruiamo su ciascuno dei triangoli le piramidi aventi lo stesso vertice del cono, così seguitando, troveremo certi segmenti del cono i quali sono minori dell'eccesso del cono $EFGHN$ sul solido O .

Si trovino e siano quelli sopra EP , PF , FQ , QG , GR , RH , HS , SE . La rimanente piramide, avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice il punto N , è maggiore del solido O . Si inscriva poi nel cerchio $ABCD$ il poligono $ATBUCVDW$ simile e similmente posto al poligono $EPFQGRHS$ e si costruisca sul poligono $ATBUCVDW$ una piramide avente lo stesso vertice del cono ed LBT sia una delle facce triangolari che racchiudono la piramide avente per base il poligono $ATBUCVDW$ e per vertice il punto L ed NFP sia una delle facce triangolari che racchiudono la piramide avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice il punto N .

Poichè il cono $ABCDL$ è simile al cono $EFGHN$, si ha che BD sta ad FH come l'asse KL sta all'asse MN (XI, term. 24). Ma BD sta ad FH come BK sta ad FM , quindi anche BK sta ad FM come KL sta ad MN . E, permutando (V, 16), BK sta a KL come FM sta ad MN . I lati intorno agli angoli uguali BKL , FMN sono proporzionali, quindi il triangolo BKL è simile al triangolo FMN (VI, 6).



Di nuovo, BK sta a KT come FM sta ad MP e queste rette formano gli angoli BKT , FMP uguali, perchè tanto l'angolo BKT quanto l'angolo FMP sono la stessa parte di quattro retti, quindi, poichè i lati intorno ad angoli uguali sono proporzionali, il triangolo BKT è simile al triangolo FMP .

Ora, poichè abbiamo dimostrato che BK sta a KL come FM sta ad MN e BK è uguale a KT ed FM è uguale a PM , allora TK sta a KL come PM sta ad MN : i lati intorno agli angoli TKL , PMN , uguali perchè retti, sono proporzionali. Dunque il triangolo LKT è simile al

triangolo NMP (VI, 6). Ma ora, per la similitudine dei triangoli LKB , NMF , LB sta a BK come NF sta ad FM , e, per la similitudine dei triangoli BKT , FMP , KB sta a BT come MF sta ad FP (VI, term. 1), quindi, per uguaglianza, LB sta a BT come NF sta ad FP (V, 22).

Inoltre, per la similitudine dei triangoli LTK , NPM , LT sta a TK come NP sta a PM , e, per la similitudine dei triangoli TKB , PMF , KT sta a TB come MP sta a PF , per uguaglianza, è quindi LT sta a TB come NP sta ad PF . Ma abbiamo dimostrato anche che TB sta a BL come PF sta ad FN . Per uguaglianza dunque TL sta ad LB come PN sta ad NF : i lati dei triangoli LTB , NPF sono perciò proporzionali. I triangoli LTB , NPF sono dunque simili (VI, 5), e perciò anche equiangoli (VI, term. 1).

Anche la piramide, avente per base il triangolo BKT e per vertice il punto L , è dunque simile alla piramide, avente per base il triangolo FMP e per vertice il punto N , perchè racchiuse da un ugual numero di piani simili (XI, term. 9). Ma le piramidi simili aventi basi triangolari sono in ragione tripla dei lati omologhi (XII, 8), quindi la piramide $BKTL$ e la piramide $FMPN$ hanno ragione tripla di quella di BK ad FM .

Similmente, congiunti A , W , D , V , C , U con K ed E , S , H , R , G , Q con M e costruite su ciascuno dei triangoli le piramidi aventi lo stesso vertice dei coni, dimostreremo che ciascuna delle piramidi similmente poste ha a ciascuna delle piramidi similmente poste ragione tripla di quella del lato omologo BK al lato omologo FM , cioè come BD sta

ad FH . Ma uno degli antecedenti sta ad uno dei conseguenti come tutti gli antecedenti stanno a tutti i conseguenti (V, 12). Quindi la piramide $BKTL$ sta alla piramide $FMPN$ come l'intera piramide, avente per base il poligono $ATBUCVDW$ e per vertice il punto L , sta all'intera piramide, avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice il punto N .

Dunque la piramide, avente per base il poligono $ATBUCVDW$ e per vertice il punto L , e la piramide, avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice il punto N , hanno ragione tripla di quella di BD ad FH .

Supponemmo poi che anche il cono, avente per base il cerchio $ABCD$ e per vertice il punto L , ed il solido O avessero ragione tripla di quella di BD ad FH ; quindi il cono, avente per base il cerchio $ABCD$ e per vertice il punto L , sta al solido O come la piramide, avente per base il poligono $ATBUCVDW$ e per vertice il punto L , sta alla piramide, avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice il punto N . Allora, permutando (V, 16), il cono avente per base il cerchio $ABCD$ e per vertice il punto L sta alla piramide inscritta in esso, avente per base il poligono $ATBUCVDW$ e per vertice il punto L , come il solido O sta alla piramide avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice il punto N . Ma il suddetto cono è maggiore della piramide inscritta in esso, perchè la racchiude, quindi anche il solido O è maggiore della piramide avente per base il poligono $EPFQGRHS$ e per vertice N . Ma è minore, quindi l'assurdo.

Dunque il cono avente per base il cerchio $ABCD$ e per

vertice il punto L , ed un solido minore del cono che ha per base il cerchio $EFGH$ e per vertice il punto N , non hanno ragione tripla di quella di BD ad FH .

Similmente dimostreremo anche che il cono $EFGHN$ ed un solido minore del cono $ABCDL$, non hanno ragione tripla di quella di FH a BD .

Ora dico che il cono $ABCDL$ ed un solido maggiore del cono $EFGHN$ non hanno ragione tripla di quella di BD ad FH .

Se è possibile, l'abbia rispetto al solido maggiore O . Quindi, inversamente, il solido O ha, rispetto al cono $ABCDL$, ragione tripla di quella di FH a BD (V, 7 coroll.). Ma il solido O sta al cono $ABCDL$ come il cono $EFGHN$ sta ad un solido minore del cono $ABCDL$ (XII, 2 coroll.). Quindi il cono $EFGHN$ ed un solido minore del cono $ABCDL$ hanno ragione tripla di quella di FH a BD , ciò che dimostrammo impossibile. Quindi il cono $ABCDL$ ed un solido maggiore del cono $EFGHN$ non stanno in ragione tripla di quella di BD ad FH . Abbiamo dimostrato anche che ciò non è anche rispetto ad un solido minore, quindi il cono $ABCDL$ ed il cono $EFGHN$ hanno ragione tripla di quella di BD ad FH .

Ma il cono sta al cono, come il cilindro sta al cilindro, poichè il cilindro avente la stessa base del cono e altezza uguale, è triplo del cono (XII, 10). Quindi il cilindro rispetto al cilindro ha ragione tripla di quella di BD ad FH .

Dunque i coni e i cilindri simili sono in ragione tripla dei diametri delle basi, c. d. d.

È il contenuto di questa proposizione che fa dubitare della genuinità del corollario della XII, 8, accolto dall'HEIBERG. Infatti EUCLIDE dimostra qui, senza richiamarsi a tale corollario, che, inscrivendo nelle basi di coni simili poligoni simili equilateri, risultano delle piramidi simili e che stanno tra loro in ragione triplicata dei lati omologhi.

La dimostrazione che ne dà il TACQUET è analoga a quella riportata nella nota precedente.

13.

Se si taglia un cilindro con un piano parallelo alle basi, il cilindro sta al cilindro come l'asse sta all'asse.

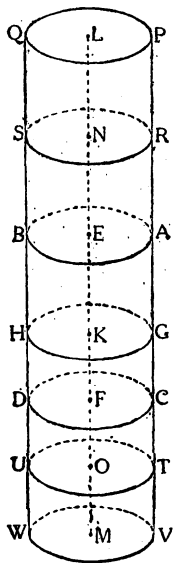
Si seghi infatti il cilindro AD col piano GH parallelo alle basi AB , CD e il piano GH incontri l'asse nel punto K . Dico che il cilindro BG sta al cilindro GD come l'asse EK sta all'asse KF .

Infatti si prolunghi l'asse EF da ciascuna parte fino ai punti L , M e si prendano quante si vogliano rette EN , NL uguali all'asse EK e quante si vogliano rette FO , OM uguali ad FK e si supponga intorno all'asse LM il cilindro PW , avente per basi i cerchi PQ , VW . Si conducano anche pei punti N , O i piani paralleli ai piani AB , CD e alle basi del cilindro PW , e si formino i cerchi RS e TU di centri N e O .

Poichè gli assi LN , NE , EK sono uguali tra loro, i cilindri QR , RB , BG stanno tra loro come le basi (XII, 11). Ma le basi sono uguali, quindi anche i cilindri QR , RB , BG sono uguali. Gli assi LN , NE , EK sono uguali e anche i cilindri QR , RB , BG sono uguali e in ugual numero, quindi di quanto l'asse KL è molteplice dell'asse

EK , di tanto il cilindro QG sarà molteplice del cilindro GB .

Per la stessa ragione, di quanto l'asse MK è molteplice dell'asse KF , di tanto il cilindro WG sarà molteplice del cilindro GD . E se l'asse KL è uguale all'asse KM , an-



che il cilindro QG sarà uguale al cilindro GW ; e se l'asse è maggiore dell'asse, anche il cilindro è maggiore del cilindro, e se minore, minore.

Ma, date quattro grandezze, gli assi EK , KF e i cilindri BG , GD , si sono presi le equimolteplici (l'asse LK e il cilindro QG equimolteplici dell'asse EK e del cilindro BG , e l'asse KM e il cilindro GW equimolteplici dell'asse KF e del cilindro GD), inoltre si è dimostrato che se l'as-

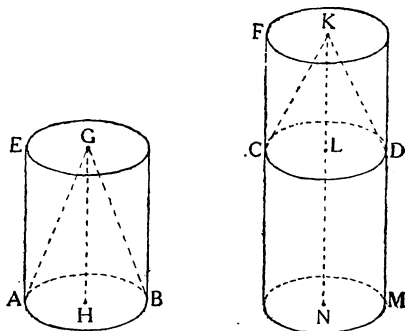
se KL supera l'asse KM , anche il cilindro QG supera il cilindro GW , e se uguale, è uguale, e se minore, minore. Quindi (V, term. 5) l'asse EK sta all'asse KF come il cilindro BG sta al cilindro GD , c. d. d.

Dimostrazione analoga alla VI, 1 e alla XI, 25.

14.

I coni e i cilindri aventi ugual base stanno tra loro come le altezze.

I cilindri EB , FD abbiano, come basi uguali, i cerchi AB , CD . Dico che il cilindro EB sta al cilindro FD come l'asse GH sta all'asse KL .



Si prolunghi l'asse KL fino al punto N , si ponga LN uguale all'asse GH e si immagini intorno all'asse LN il cilindro CM .

Poichè i cilindri EB , CM hanno la stessa altezza, essi stanno tra loro come le basi (XII, 11). Ma le basi sono uguali tra loro, quindi anche i cilindri EB , CM sono uguali. E poichè il cilindro FM è segato dal piano CD , parallelo alle basi, il cilindro CM sta al cilindro FD come l'asse LN sta all'asse KL (XII, 13). Ma il cilindro CM è uguale al cilindro EB e l'asse LN è uguale all'asse GH , quindi il cilindro EB sta al cilindro FD come l'asse GH sta all'asse KL .

Ma il cilindro EB sta al cilindro FD come il cono ABG sta al cono CDK (XII, 10), quindi anche l'asse GH sta all'asse KL come il cono ABG sta al cono CDK e come il cilindro EB sta al cilindro FD , c. d. d.

15.

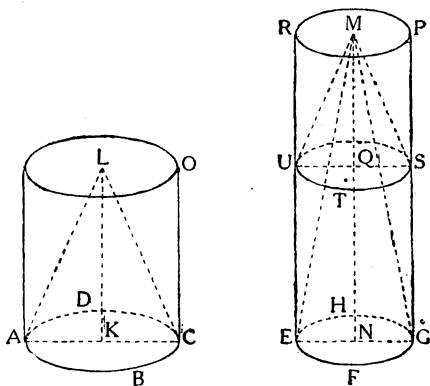
Le basi dei coni e dei cilindri uguali sono in ragione inversa delle altezze; e i coni e i cilindri, le cui basi sono in ragione inversa delle altezze, sono uguali tra loro.

I coni e i cilindri, aventi i cerchi $ABCD$, $EFGH$ per basi, AC , EG per diametri delle basi, KL , MN per assi, siano uguali tra loro. Siano KL , MN le altezze dei coni e dei cilindri. Si completino quindi i cilindri AO , EP .

Dico che le basi dei cilindri AO , EP sono in ragione contraria delle altezze, cioè la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$ come l'altezza MN sta all'altezza KL .

Infatti l'altezza KL sarà uguale all'altezza MN o no. Sia dapprima uguale. Allora anche il cilindro AO è ugua-

le al cilindro EP . Ma i coni e i cilindri aventi la stessa altezza sono tra loro come le basi (XII, 11), quindi anche la base $ABCD$ è uguale alla base $EFGH$. Perciò sussiste la ragione inversa: la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$ come l'altezza MN sta all'altezza KL .



Ora l'altezza KL non sia uguale ad MN . Sia MN maggiore, e si tolga dall'altezza MN la QN uguale a KL , e pel punto Q , si seghi il cilindro EP col piano TUS parallelo ai piani dei cerchi $EFGH$, RP ; si immagini quindi il cilindro ES avente per base il cerchio $EFGH$ e per altezza NQ .

Poichè il cilindro AO è uguale al cilindro EP , il cilindro AO sta al cilindro ES come il cilindro EP sta al cilindro ES (V, 7). Ma il cilindro AO sta al cilindro ES come la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$, poichè i cilindri AO , ES hanno la stessa altezza (XII, 11); ed il cilindro EP sta al cilindro ES come l'altezza MN sta al-

l'altezza QN , poichè il cilindro EP è segato da un piano parallelo ai piani opposti (XII, 13). Quindi la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$ come l'altezza MN sta all'altezza QN . Ma l'altezza QN è uguale all'altezza MN , quindi la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$ come l'altezza MN sta all'altezza KL .

Dunque le basi dei cilindri AO , EP sono in ragione inversa delle altezze.

Ora le basi dei cilindri AO , EP siano in ragione inversa delle altezze, e stia la base $ABCD$ alla base $EFGH$ come l'altezza MN sta all'altezza KL . Dico che il cilindro AO è uguale al cilindro EP .

Infatti, per ipotesi, la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$, come l'altezza MN sta all'altezza KL , ma l'altezza KL è uguale all'altezza QN , quindi la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$ come l'altezza MN sta all'altezza QN . Inoltre la base $ABCD$ sta alla base $EFGH$ come il cilindro AO sta al cilindro ES , poichè hanno la stessa altezza (XII, 11); e l'altezza MN sta all'altezza QN come il cilindro EP sta al cilindro ES (XII, 13). Quindi il cilindro AO sta al cilindro ES come il cilindro EP sta al cilindro ES .

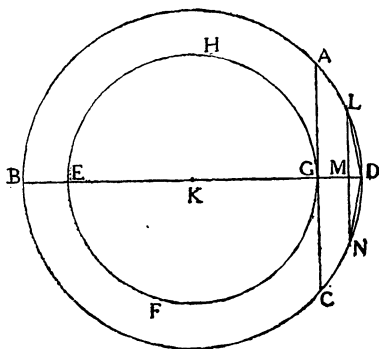
Dunque (V, 9) il cilindro AO è uguale al cilindro EP . Ugualmente anche per i coni, c. d. d.

LEGENDRE fa rientrare questa proposizione nella regola pel calcolo del volume del cilindro e del cono (cfr. nota a XII, 11).

16.

Dati due cerchi aventi lo stesso centro, inscrivere nel cerchio maggiore un poligono che non tocchi il cerchio minore e con un numero pari di lati uguali tra loro.

Siano $ABCD$, $EFGH$ i due cerchi dati aventi lo stesso centro K ; occorre inscrivere nel cerchio maggiore $ABCD$ un poligono con un numero pari di lati uguali e che non tocchi il cerchio $EFGH$.



Si conduca infatti pel centro K la retta BKD , si mandi pel punto G la retta GA perpendicolare alla retta BD e si prolunghi in C : la AC tocca quindi il cerchio $EFGH$ (III, 16 coroll.).

Dividiamo l'arco BAD per metà e la sua metà per metà; facendo sempre così, troveremo (X, 1) un arco minore di AD . Si trovi e sia LD ; da L si mandi la LM perpendicolare a BD e si prolunghi in N , si conducano poi LD , DN ; la LD risulta uguale alla DN (III, 3; I, 4).

Poichè LN è parallela ad AC (I, 28) ed AC tocca il cerchio $EFGH$, la LN non tocca il cerchio $EFGH$. A maggior ragione quindi le LD , DN non toccano il cerchio $EFGH$.

Ora se di seguito adattiamo nel cerchio $ABCD$ (IV, 1) rette uguali alla retta LD , inscriviamo nel cerchio $ABCD$ un poligono, con un numero pari di lati uguali, che non tocca il cerchio minore $EFGH$, c. d. f.

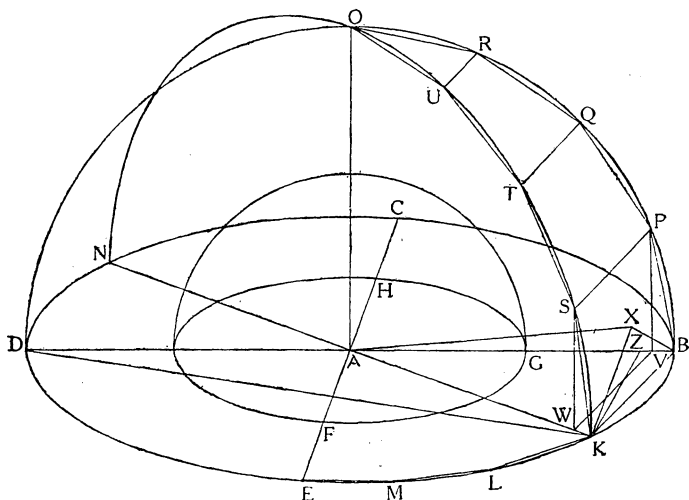
17.

Date due sfere aventi lo stesso centro, inscrivere nella sfera maggiore un solido poliedro che non tocchi colla superficie la sfera minore.

Si suppongano due sfere aventi lo stesso centro A ; occorre dunque inscrivere nella sfera maggiore un solido poliedro che non tocchi colla superficie la sfera minore.

Si seghino le sfere con un piano qualunque pel centro: le sezioni saranno cerchi, poichè la sfera si ottiene facendo ruotare il semicerchio intorno al diametro (XI, term. 14). Perciò, in qualunque posizione si supponga il semicerchio, il piano condotto per esso determina, sulla superficie della sfera, un cerchio. Ed è evidente che è anche il cerchio più grande possibile, poichè il diametro della sfera, che è naturalmente anche il diametro del semicerchio e del cerchio, è maggiore di tutte le rette che si possono condurre nel cerchio, o nella sfera (III, 15).

Il cerchio $BCDE$ sia nella sfera maggiore e il cerchio FGH nella sfera minore, si conducano allora in essi i diametri BD , CE perpendicolari tra loro; dati i due cerchi



$BCDE$, FGH aventi lo stesso centro, si inscriba nel cerchio maggiore $BCDE$ un poligono con un numero pari di lati uguali, che non tocchi il cerchio minore FGH (XII, 16); i lati di tale poligono nel quadrante BE siano BK , KL , LM , ME .

Condotta la KA , si prolunghi in N e dal punto A si conduca la AO , perpendicolare al piano del cerchio $BCDE$, essa intersechi la superficie della sfera in O . Si mandino, poscia, per AO e per ciascuna delle BD , KN dei piani, i quali, per le cose dette sopra, formano sulla superficie della sfera dei cerchi massimi: i semicerchi di questi sui diametri BD , KN siano BOD , KON .

Poichè AO è perpendicolare al piano del cerchio $BCDE$, anche tutti i piani per AO sono perpendicolari al piano del cerchio $BCDE$ (XI, 18), quindi anche i semicerchi BOD , KON sono perpendicolari al piano del cerchio $BCDE$. I semicerchi BED , BOD , KON sono uguali, poichè hanno i diametri uguali BD , KN (III, term. 1), quindi i quadranti BE , BO , KO sono uguali tra loro. Allora quanti sono i lati del poligono nel quadrante BE , altrettante sono le rette uguali a BK , KL , LM , ME che si possono condurre nei quadranti BO , KO . Si inscrivano e siano BP , PQ , QR , RO , KS , ST , TU , UO , si conducano poi le SP , TQ , UR e si mandino da P e da S le perpendicolari al piano del cerchio $BCDE$: cadranno sulla comune intersezione dei piani BD , KN , poichè i piani dei cerchi BOD , KON sono perpendicolari al piano del cerchio $BCDE$ (XI, term. 4). Vi cadano e siano PV , SW . Si conduca poscia WV .

Poichè nei semicerchi uguali BOD , KON si sono tracciate le rette uguali BP , KS e si sono condotte le PV , SW perpendicolari, la PV è uguale a SW e BV è uguale a KW (III, 27; I, 26). Ma anche l'intero BA è uguale all'intero KA , quindi anche il rimanente VA è uguale al rimanente WA , perciò BV sta a VA come KW sta a WA : la VW è quindi parallela alla KB (VI, 2). E poichè ciascuna delle PV , SW è perpendicolare al piano del cerchio $BCDE$, la PV è parallela alla SW (XI, 6). Dimostrammo anche che esse sono uguali, quindi anche le WV , SP sono uguali e parallele (I, 33).

E poichè VW è parallela ad SP e VW è parallela a

KB , anche la SP è parallela alla KB (I, 30): le loro congiungenti sono BP e KS .

Il quadrilatero $KBPS$ è allora in un piano, poichè, date due rette parallele, se si prendono su ciascuna di esse un punto qualunque, la retta passante pei punti è nello stesso piano delle parallele (XI, 7).

Per la stessa ragione, anche ciascuno dei quadrilateri $SPQT$, $TQRU$ sta in un piano. Così pure il triangolo URO è in un piano (XI, 2).

Ora, se congiungiamo A coi punti P , S , Q , T , R , U , si costruirà tra gli archi BO , KO una certa figura solida poliedrica composta di piramidi, aventi per basi i quadrilateri $KBPS$, $SPQT$, $TQRU$ e il triangolo URO e aventi tutte per vertice il punto A .

Se anche su ciascuno dei lati KL , LM , ME facciamo le stesse costruzioni come su BK e lo stesso facciamo sui tre quadranti rimanenti, si costruirà una certa figura poliedrica inscritta nella sfera e composta di piramidi, aventi per basi i quadrilateri suddetti e il triangolo URO e i triangoli e i quadrilateri simili, in posizione, a quelli, e aventi tutte per vertice il punto A .

Dico che il suddetto poliedro non tocca colla superficie la sfera minore, cioè quella nella quale è il cerchio FGH .

Si conduca dal punto A la perpendicolare AX al piano del quadrilatero $KBPS$: tale perpendicolare incontri il piano nel punto X ; si conducano allora le XB , XK .

Poichè AX è perpendicolare al piano del quadrilatero $KBPS$, è anche perpendicolare a tutte le rette che la in-

tersecano e che stanno sul piano del quadrilatero (XI, term. 3).

La AX è quindi perpendicolare a ciascuna delle XB , XK . E poichè AB è uguale ad AK , anche il quadrato di AB è uguale a quello di AK . Ma i quadrati di AX e di XB sono insieme uguali a quello di AB , poichè l'angolo in X è retto (I, 47), e i quadrati di AX e XK sono insieme uguali a quello di AK . Quindi la somma dei quadrati di AX e di XB è uguale alla somma di quelli di AX e di XK . Si tolga il quadrato di AX che è comune, allora il rimanente quadrato di BX è uguale al rimanente quadrato di XK , quindi BX è uguale ad XK .

Similmente dimostreremo che anche le congiungenti X con P ed S sono uguali a ciascuno delle BX , XK . Quindi il cerchio, descritto con centro X e raggio uguale a una delle BX , XK , passa per P ed S e il quadrilatero $KBPS$ risulterà inscritto nel cerchio.

Essendo KB maggiore di WV e WV uguale ad SP , è KB maggiore di SP . Ma KB è uguale a ciascuna delle KS , BP , quindi ciascuna delle KS , BP è maggiore di SP . Ora, poichè il quadrilatero $KBPS$ è inscritto in un cerchio, i lati KB , BP , KS sono uguali, e PS è minore ed essendo BX il raggio del cerchio, il quadrato di KB è maggiore del doppio del quadrato di BX .

Si conduca da K la KZ perpendicolare a BV . Poichè BD è minore del doppio di DZ e BD sta a DZ come il rettangolo DB , BZ sta al rettangolo DZ , ZB ; costruito il quadrato di BZ e completato il parallelogrammo su ZD , il rettangolo DB , BZ è minore del doppio del ret-

tangolo DZ , ZB . Condotta la KD , il rettangolo DB , ZB risulta uguale al quadrato di BK , e il rettangolo di DZ , ZB uguale al quadrato di KZ (III, 31; VI, 8 coroll.), quindi il quadrato di KB è minore del doppio di quello di KZ . Ma il quadrato di KB è maggiore del doppio di quello di BX , quindi il quadrato di KZ è maggiore del quadrato di BX .

Poichè BA è uguale a KA , il quadrato di BA è uguale a quello di KA . I quadrati, poi, di BX e XA insieme sono uguali al quadrato di BA e i quadrati di KZ , ZA insieme sono uguali a quello di KA (I, 47), quindi la somma dei quadrati di BX e XA è uguale a quella dei quadrati di KZ e ZA ; di questi il quadrato di KZ è maggiore di quello di BX , perciò il rimanente quadrato di ZA è minore del quadrato XA .

Dunque AX è maggiore di AZ . A maggior ragione quindi AX è maggiore di AG . La AX poi è sopra una faccia del poliedro ed AG è sopra la superficie della sfera minore, perciò il poliedro non tocca la superficie della sfera minore.

Dunque date due sfere aventi lo stesso centro è possibile inscrivere nella maggiore un poliedro che non tocchi la superficie della sfera minore, c. d. f.

COROLLARIO

Se in un'altra sfera inscriviamo un solido poliedro simile al solido poliedrico inscritto nella sfera $BCDE$ il solido poliedro inscritto nella sfera $BCDE$ sta al solido po-

liedro inscritto nell'altra sfera in ragione tripla di quella del diametro della sfera $BCDE$ al diametro dell'altra sfera.

Divisi i solidi in un ugual numero di piramidi ugualmente poste, le piramidi sono simili. Le piramidi simili sono tra loro in ragione tripla dei lati omologhi (XII, 7 coroll.), quindi la piramide, avente per base il quadrilatero $KBPS$ e per vertice il punto A , e la piramide ordinata nello stesso modo nell'altra sfera hanno ragione tripla di quella del lato omologo al lato omologo, cioè come il raggio AB della sfera di centro A al raggio dell'altra sfera.

Similmente ogni piramide della sfera di centro A , e ciascuna piramide, ordinata nello stesso modo, dell'altra sfera, hanno ragione tripla di quella di AB al raggio dell'altra sfera. Ma l'antecedente sta al conseguente come tutti gli antecedenti stanno a tutti i conseguenti, quindi tutto il solido poliedro inscritto nella sfera di centro A e tutto il solido poliedro inscritto nell'altra sfera hanno ragione tripla di quella di AB al raggio dell'altra sfera, cioè di quella del diametro BD al diametro dell'altra sfera,

c. d. d.

EUCLIDE dimostra che il quadrilatero $KBSP$ non tocca la sfera di raggio minore e viene a concludere che anche i quadrilateri $SPTQ$, $TQUR$ e il triangolo URO non hanno punti a comune colla sfera minore; ciò non appare evidente e CLAVIO, prima, e poi SIMSON, aggiunsero alle loro edizioni di EUCLIDE la dimostrazione di questa proprietà.

Occorre mostrare che, se due quadrilateri $KBSP$, $SPTQ$ aventi un lato uguale e tali che sia

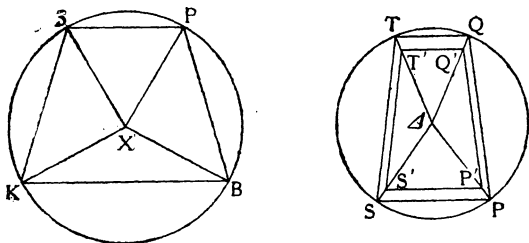
$$KS = BP = ST = PQ, \quad KS \geq KB, \quad KB > SP > TQ,$$

sono inscrutibili in circonferenze, il raggio XK del cerchio circo-

scritto al primo è maggiore del raggio ΔS del cerchio circoscritto al secondo.

Supponiamo sia $XK = \Delta S$. Ne segue che gli angoli KXS , PXB , $S\Delta T$, $P\Delta Q$ sono tutti uguali.

Ma $\widehat{KXB} > \widehat{S\Delta P}$, $\widehat{SXP} > \widehat{T\Delta Q}$; quindi la somma degli angoli in X è maggiore della somma degli angoli in Δ , cioè è maggiore di quattro retti; ciò è impossibile.



Dunque non può essere $XK = \Delta S$.

Supponiamo ora $XK < \Delta S$. Si prendano allora i segmenti $\Delta S'$, $\Delta P'$, $\Delta Q'$, $\Delta T'$ uguali a XK e si consideri il quadrilatero $SP'Q'T'$.

Poichè si ha

$$KB > SP > S'P',$$

$$SP > TQ > T'Q',$$

$$KS = ST > S'T',$$

$$PB = PQ > P'Q',$$

si giunge allo stesso assurdo trovato nel caso precedente.

Non potendo XK essere uguale o minore di ΔS , sarà

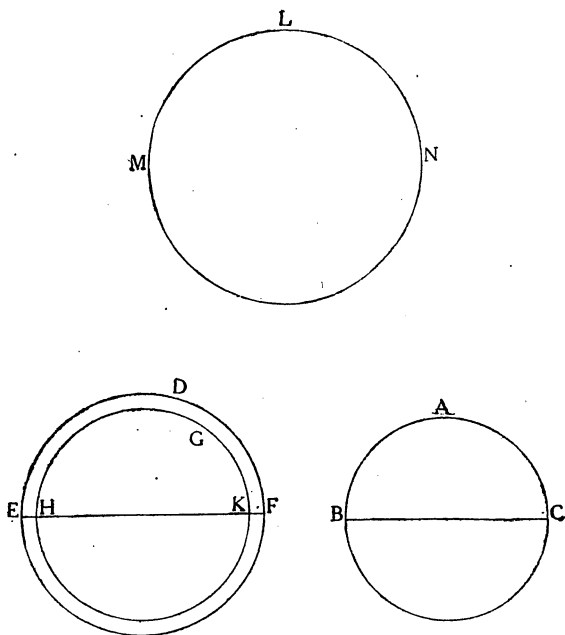
$$XK > \Delta S.$$

Le sfere stanno fra loro in ragione tripla dei rispettivi diametri.

Si immaginino le sfere ABC , DEF , di diametri BC ,

EF. Dico che la sfera *ABC* e la sfera *DEF* hanno ragione tripla di quella di *BC* ad *EF*.

Infatti la sfera *ABC* e la sfera *DEF* non abbiano ragione tripla di quella di *BC* ad *EF*; la sfera *ABC* abbia, rispetto ad una certa sfera, minore o maggiore di *DEF*, ragione tripla di quella di *BC* ad *EF*. L'abbia dapprima



rispetto alla sfera minore *GHK*, e si suppongano *DEF*, *GHK* aventi lo stesso centro. Si inscriva poi nella sfera maggiore *DEF* un solido poliedro che non tocchi colla superficie la sfera minore *GHK* (XII, 17) e anche nella

sfera ABC si inscriva un poliedro simile al poliedro inscritto nella sfera DEF .

Allora il poliedro inscritto nella sfera ABC e il poliedro inscritto nella sfera DEF hanno ragione tripla di quella di BC ad EF (XII, 17 coroll.). Ma anche la sfera ABC e la sfera GHK hanno ragione tripla di quella di BC ad EF , quindi la sfera ABC sta alla sfera GHK come il solido poliedro inscritto nella sfera ABC sta al solido inscritto nella sfera DEF .

Permutando (V, 16), la sfera ABC sta al poliedro in essa come la sfera GHK sta al poliedro nella sfera DEF .

Ma la sfera ABC è maggiore del poliedro in essa, quindi anche la sfera GHK è maggiore del poliedro nella sfera DEF (V, 14). Ma è anche minore, perchè contenuta in essa. Quindi la sfera ABC ed una sfera minore della sfera DEF non hanno ragione tripla di quella del diametro BC ad EF .

Similmente dimostreremo che neanche la sfera DEF ed una sfera minore della sfera ABC hanno ragione tripla di quella di EF a BC .

Ora dico che la sfera ABC non ha, neppure rispetto ad una sfera maggiore della sfera DEF , ragione tripla di quella di BC ad EF .

Se è possibile, la abbia rispetto alla sfera maggiore LMN . Allora, invertendo (V, 7, coroll.), la sfera LMN e la sfera ABC hanno ragione tripla di quella del diametro EF al diametro BC . Ma la sfera LMN sta alla sfera ABC come la sfera DEF sta ad una sfera minore della sfera ABC , poichè LMN è maggiore di DEF ,

come sopra si è dimostrato (XII, 2, lemma). Quindi la sfera DEF ed una sfera minore della sfera ABC avrebbero ragione tripla di quella di EF a BC : ciò che si è mostrato impossibile.

Dunque la sfera ABC ed una maggiore della sfera DEF non hanno ragione tripla di quella di BC ad EF .

Abbiamo dimostrato che non l'ha neanche rispetto ad una minore, perciò la sfera ABC e la sfera DEF hanno ragione tripla di quella di BC ad EF , c. d. d.

La determinazione del volume e della superficie della sfera costituisce forse la più bella scoperta di ARCHIMEDE, che, per desiderio dell'Autore stesso, venne ricordata con la figura d'un cilindro e d'una sfera inscritta, che il console romano MARCELLO fece scolpire nel monumento sulla sua tomba.

Il volume, che nel nostro linguaggio si dice uguale a $\frac{4}{3}\pi r^3$, è, secondo il linguaggio d'Archimede, il quadruplo del volume del cono che ha per base il cerchio massimo e per altezza il raggio. La superficie ($4\pi r^2$) è uguale a quattro volte il cerchio massimo, o anche alla superficie laterale del cilindro circoscritto.

ARCHIMEDE stesso indica nel « Metodo » in qual modo egli sia giunto a queste scoperte, usando del cosiddetto « metodo meccanico » che contiene implicitamente il concetto degli indivisibili di CAVALIERI.

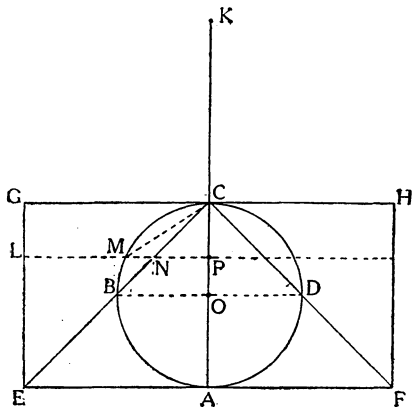
Il cerchio $ABCD$, il triangolo ECF e il rettangolo $EFGH$, ottenuti come indica la figura, ruotando intorno ad AC generano, rispettivamente, una sfera, un cono ed un cilindro.

Condotto un piano perpendicolare in P ad AC e preso $CK = AC$, si ha

$$\frac{CK}{CP} = \frac{AC}{CP} = \frac{\overline{AC}^2}{AC \cdot CP} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{MC}^2} = \frac{\overline{AF}^2}{\overline{PM}^2 + \overline{PC}^2} = \frac{\overline{PL}^2}{\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2};$$

il piano dunque taglia i tre solidi secondo cerchi tali che il cerchio del cilindro sta alla somma degli altri due in ragione inversa di CP

a CK . Immaginiamo allora che AK sia una leva col fulcro in C : il primo cerchio, lasciato ove si trova, equilibra dunque gli altri due portati parallelamente a sè stessi ad avere il centro nel punto K . Ciò è vero per tutte le sezioni dei tre corpi fatte con piani per-



pendicolari ad AC , quindi, considerando i tre solidi come riempiti dai cerchi sezione, si ha che il cilindro, lasciato ove si trova, o concentrato nel suo baricentro O , fa equilibrio al cono e alla sfera concentrati in K . Perciò

$$\text{cilindro} : (\text{cono} + \text{sfera}) = CK : CO = 2 : 1$$

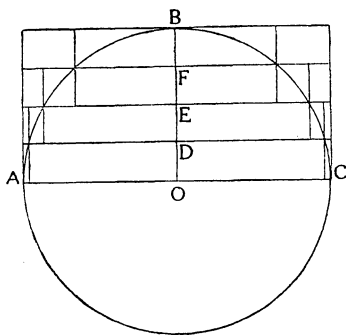
da cui si ha che la sfera è metà del cono CEF , ossia 4 volte il cono generato da BCD , od anche $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto alla sfera.

Un secondo metodo che vale a determinare il volume della sfera è quello stesso che si adopera per la piramide (V. nota a XIII, 7), dove il volume cercato si presenta come limite d'una serie di scaloidi, che qui, anzichè prismi, sono cilindri. Questo metodo si trova pure in ARCHIMEDE, per il caso più generale dell'ellissoide di rotazione (cfr. *Conoidi e Sferoidi*, Prop. XXVII).

Esso si basa sulla dimostrazione dell'uguaglianza tra il volume Ω e il volume Ψ d'un cono doppio di quello avente per base il cerchio massimo della sfera e per altezza il raggio della stessa. Supposto infatti che l'uguaglianza suddetta non sussista, e che sia (ad esempio) $\Omega > \Psi$ inscriviamo e circoscriviamo alla mezza sfera due scaloidi cilindrici V_i e V_c , in modo che la differenza $V_c - V_i$ (rappresentata dal cilindro di base dello scaloide circoscritto) sia minore della differenza $\Omega - \Psi$.

Ma è $V_c > \Omega$: segue $V_i > \Psi$.

Per mostrare che quest'ultima disuguaglianza è assurda, ARCHI-



MEDE fa vedere che lo scaloide iscritto V_i ha volume minore dei $\frac{2}{3}$ di quella del cilindro circoscritto alla mezza sfera: ma tali $\frac{2}{3}$ uguagliano il volume Ψ del cono, di cui invece V_i dovrebbe essere maggiore.

Il risultato viene dunque raggiunto col metodo di esaustione mediante il calcolo di V_i , dove interviene, sotto forma geometrica, la formula che dà la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, stabilita da ARCHIMEDE nel trattato sulle spirali (1).

Il procedimento di dimostrazione archimedeo apparirà più chiaro trasformandolo in linguaggio moderno.

(1) Per questa formula cfr. LEONARDO PISANO, *Liber quadratorum* (1225) e J. WALLIS, *Aritmetica infinitorum*, Oxoniae 1656, Prop. 21 e 23.

Il volume dello scaloide inscritto $V_i^{(n)}$, somma di n cilindri di altezza $\frac{r}{n}$, che corrisponde alla divisione del raggio r in n parti uguali, viene dato da:

$$V_i^{(n)} = \frac{n-1}{n} \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2];$$

essendo $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ e passando al limite per $n = \infty$, si trova

$$\lim_{n=\infty} V_i^{(n)} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2}{3} \pi r^3,$$

che è il volume della semisfera (cfr. per esempio ENRIQUES e AMALDI, *Geometria elementare*, solida, ed. 1932, pag. 89 e 116).

Dalla conoscenza del volume ARCHIMEDE ha desunto « per analogia » la misura della superficie, assimilando in sostanza la sfera ad una superficie poliedrica di facce piccolissime: il volume $\left(\frac{4}{3} \pi r^3\right)$ appare allora uguale a quello d'una piramide che abbia per base la superficie S e per altezza il raggio r , e invero dall'uguaglianza:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} S r,$$

si deduce:

$$S = 4\pi r^2.$$

Ora la sistemazione di tutta la teoria viene stabilita da ARCHIMEDE nel Libro I del *De sphaera et cilindro*, dove si determinano parallelamente volume e superficie. La dottrina, così sistemata, figura senza varianti essenziali nella maggior parte dei trattati moderni di geometria elementare, escluso soltanto qualcuno che la sostituisce con qualche procedimento più rapido. Perciò basterà riassumere in breve il ragionamento di ARCHIMEDE. Esso si basa sui seguenti lemmi:

1. - *Si inscriba nel cerchio un poligono regolare con un numero di lati divisibile per quattro e si faccia ruotare la figura intorno al diametro che congiunge due vertici opposti del poligono.*

Il solido generato dal poligono è uguale ad un cono che ha la base equivalente alla superficie generata dalla rotazione del poligono e l'altezza uguale all'apotema del poligono (prop. XXVI).

2. - *Il solido precedente è minore del quadruplo del cono che ha la base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al raggio (prop. XXVII), ed è maggiore del quadruplo del cono che ha base uguale al cerchio massimo della sfera che si può inscrivere nel solido e altezza uguale al raggio di questa (prop. XXXI).*

3. - *Se in un cerchio si inscrive un poligono regolare con un numero di lati divisibile per quattro e si circoscrive un poligono simile all'inscritto e si fa ruotare la figura intorno al diametro che congiunge due vertici opposti del poligono inscritto, si vengono a inscrivere e circoscrivere alla sfera due solidi che stanno tra loro come i cubi dei lati dei poligoni generatori (prop. XXXII).*

Premesso ciò, ARCHIMEDE può dimostrare che:

Ogni sfera è uguale al quadruplo del cono avente come base il cerchio massimo della sfera e per altezza il raggio della sfera.

Se la sfera S non è uguale al cono C che ha la base uguale a quattro cerchi massimi della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera, sarà maggiore o minore.

1^a *Ipotesi.* - Sia $S > C$. Si prendano due segmenti a e b ($a > b$) tali che

$$a:b < S:C$$

e inseriamo tra a e b due medie aritmetiche c e d , cioè tali che

$$a - c = c - d = d - b.$$

Si può dimostrare allora (ciò non è fatto da ARCHIMEDE, ma soltanto ammesso) che

$$a^3:c^3 < a:b.$$

Inscriviamo in un cerchio massimo della sfera un poligono regolare e circoscriviamone un altro in modo che il rapporto dei lati sia minore di $a:c$; i corpi di rotazione generati dai poligoni stanno tra loro come il cubo dei lati, quindi

$$\begin{aligned} \text{solido circosc. alla sfera}:\text{solido inscr.} &< a^3:c^3 < a:b \\ &< S:C. \end{aligned}$$

Ma ciò è assurdo, poichè il solido circoscritto alla sfera è maggiore della sfera e quello inscritto è minore del cono. Ne seguirebbe, contro il supposto, che S non è maggiore di C . Dunque non può essere $S > C$.

2° *Ipotesi*. - Sia $S < C$. Presi i segmenti a e b ($a > b$) tali che

$$a:b < C:S,$$

procedendo come nel caso precedente, si giunge ad avere

$$\text{Solido circ. alla sfera}:\text{solido inscr.} < C:S.$$

E ciò è assurdo, poichè il solido circoscritto alla sfera è maggiore di C mentre l'inscritto è minore della sfera. Dunque è $S = C$.

ARCHIMEDE determina, nello stesso libro anche la superficie della sfera, dimostrando le seguenti proposizioni:

1. - *Inscritto in un cerchio un poligono regolare, con un numero di lati divisibile per quattro, si faccia ruotare la figura intorno ad un diametro che congiunge due vertici opposti del poligono. Il solido generato dal poligono ha una superficie minore di quello della sfera generata dal cerchio* (prop. XXIII).

2. - *L'area della figura precedente inscritta nella sfera è uguale ad un cerchio che ha il quadrato del raggio equivalente al rettangolo del lato del poligono generatore e della somma dei diametri dei cerchi generati dai vertici del poligono* (prop. XXIV).

3. - *L'area della figura precedente inscritta nella sfera è minore di quattro volte il cerchio massimo* (prop. XXV).

4. - *Circoscritto ad una sfera un poligono regolare con un numero di lati divisibile per quattro, la rotazione del poligono intorno ad un diametro passante per due vertici opposti, dà luogo ad una figura che ha area maggiore di quella della sfera generata dal cerchio cui il poligono è circoscritto* (prop. XXVIII).

5. - *La figura circoscritta alla sfera ha area uguale a quella di un cerchio che ha il quadrato del raggio equivalente al rettangolo del lato del poligono e della somma dei diametri dei cerchi generati dai vertici del poligono* (prop. XXIX).

6. - *L'area della figura circoscritta alla sfera è maggiore di quattro volte il cerchio massimo della sfera (prop. XXX).*

7. - *Le figure inscritte e circoscritte alla sfera e generate da poligoni simili, hanno aree che stanno tra loro come i quadrati dei lati dei rispettivi poligoni generatori (prop. XXXII).*

Usando di queste proprietà, colla consueta riduzione all'assurdo, si deduce che:

L'area della sfera è uguale a quattro cerchi massimi

Si avverta che, essendo noto il valore approssimato di $\pi = \frac{22}{7}$ (ARCHIMEDE), si deduce per il volume della sfera di diametro d : $V = \frac{11}{21} d^3$; tale osservazione si trova già in ERONE, e questo valore è stato conservato nel Medio Evo.

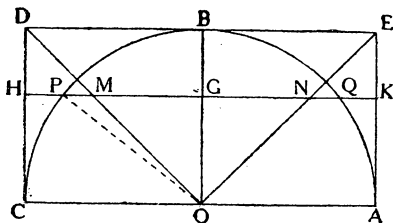
Riferiamo anche una valutazione del volume delle sfera dovuta a LUCA VALERIO (*De centro gravitatis solidorum*, 1604).

Si circoscriva ad una semisfera ABC un cilindro e si consideri il cono generato dal triangolo DOE che ruota intorno ad OB .

Seghiamo i tre solidi con un piano perpendicolare ad OB nel punto G : si ha

$$\overline{GM}^2 = \overline{OG}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{GP}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{GP}^2,$$

ossia il cerchio sezione del cono è uguale alla differenza degli altiri



due cerchi sezioni del cilindro e della sfera. Immaginiamo di togliere dal cilindro la semisfera, otterremo quel solido che GALILEO chiamava *scodella*. VALERIO mostra allora che gli scaloidi cilindrici,

con lo stesso numero di parti uguali, inscritti nel cono e nella scodella sono uguali, e poichè la differenza tra lo scaloide e il solido nel quale è inscritto, si può rendere minore di qualunque solido assegnato, i due solidi hanno ugual volume.

È facile vedere come la dimostrazione di LUCA VALERIO (e specialmente nella forma datale da CAVALIERI) si riconduce a quella esposta da ARCHIMEDE nel « Metodo ». Eppure VALERIO e CAVALIERI non dovevano conoscere l'operetta archimedeana, di cui solo recentemente fu scoperto il manoscritto da HEIBERG nella Biblioteca di Costantinopoli. Il ravvicinamento è tanto più interessante, perchè mette in luce che il processo creativo del geometra tende a ritornare quasi naturalmente alle medesime intuizioni fondamentali.

Aggiungasi che CAVALIERI ha indicato anche un'altra valutazione del volume della sfera, che costituisce un antecedente storico del procedimento elegante adoperato ai nostri giorni da G. B. HALSTED ⁽¹⁾.

Questo procedimento si può spiegare liberamente come segue: confrontiamo la sfera con un tetraedro, di cui due spigoli opposti tocchino la sfera nei loro punti di mezzo, i punti di contatto essendo gli estremi d'un diametro.

Se si prende come lunghezza degli spigoli del tetraedro $x = 2r\sqrt{\pi}$ (media proporzionale tra il diametro e la circonferenza del cerchio massimo) il volume del tetraedro, espresso come un sesto del prodotto delle lunghezze dei due spigoli opposti ortogonali per la loro distanza $2r$ (vedi nota alla XII, 7) risulta:

$$\frac{1}{6} \cdot 2r \cdot x^2 = \frac{1}{3} rx^2 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Ora l'equivalenza del nostro tetraedro e della sfera di raggio r si lascia riconoscere col principio di CAVALIERI, dimostrando che i piani paralleli ai due spigoli tangenti segano la sfera e il tetraedro rispettivamente secondo cerchi e rettangoli equivalenti. In particolare quello fra codesti piani che passa per il centro della sfera

⁽¹⁾ *The Element of Geometry*, Londra 1886, pag. 250; *Rational Geometry*, New York 1904; traduzione francese Barbarin, Parigi, 1911. V. anche l'art. di FISICHELLA nel *Period. di Mat.* 1921, pp. 101-108.

sega il tetraedro secondo un quadrato di lato $\frac{x}{2}$, equivalente al cerchio massimo. È facile verificare che dall'equivalenza di queste due sezioni particolari segue l'equivalenza di tutte le altre sezioni parallele.

La dimostrazione di VALERIO riappare leggermente trasformata da TORRICELLI, che, in luogo di confrontare il cono con la scodella (uguale a cilindro meno emisfera), confronta la emisfera al solido differenza: cilindro meno cono.

La stessa dimostrazione di VALERIO è ridotta alla massima semplicità da B. CAVALIERI, che la espone col linguaggio degli indivisibili.

L'uguaglianza dei volumi del cono e della scodella risulta senz'altro dall'uguaglianza delle sezioni fatte con piani paralleli alla base; invero la sezione fatta con un piano che disti dalla base di h è per il cono un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - h^2}$ e per la scodella una corona circolare uguale alla differenza dei due cerchi $\pi r^2 - \pi h^2$.

Abbiamo veduto come ARCHIMEDE sia arrivato intuitivamente a scoprire la superficie della sfera dopo averne determinato il volume. A rendere rigoroso questo passaggio può servire il procedimento con cui il MINKOWSKI porge una definizione semplice e suggestiva delle superficie in generale: la superficie è il limite del rapporto del volume d'uno strato compreso tra due superficie parallele e la sua altezza. Per precisare in generale questa definizione occorrerebbe indugiarsi sul concetto delle superficie parallele; ma nel caso della sfera le superficie parallele sono sfere concentriche, ciascuna delle quali s'ottiene staccando sulle normali un segmento di lunghezza costante. Allora si consideri lo strato compreso tra due superficie parallele a una sfera di raggio r , che saranno due sfere di raggio $(r + h)$ e $(r - h)$.

Il volume dello strato è dato da

$$\frac{4}{3} \pi [(r + h)^3 - (r - h)^3] = \frac{4}{3} \pi (6r^2h + h^3).$$

Il rapporto di tale volume all'altezza $2h$ dello strato è $\frac{2}{3} \pi (6r^2 + h^2)$

che per h tendente a zero, tende al limite: $\frac{2}{3} \pi \cdot 6r^2 = 4\pi r^2$.

Notiamo come, con poche modificazioni, questo metodo porga la superficie del cilindro e del cono: in quest'ultimo caso conviene ricorrere a un parallelismo obliquo.

Lo stesso metodo varrebbe anche a definire la lunghezza d'una circonferenza partendo dalla superficie del cerchio. L'importanza logica del metodo sta precisamente in ciò: che il confronto delle superficie piane a contorno curvilineo qualunque, ovvero il confronto dei solidi nello spazio, si fa sempre in base alla stessa nozione di prevalenza e suvalenza che s'introduce già nel confronto dei poligoni, e, rispettivamente, dei poliedri, senza che si esiga l'introduzione d'un nuovo concetto primitivo. Invece la lunghezza d'una linea curva, e l'area d'una superficie curva, si presentano come concetti essenzialmente nuovi, quali si desumono da un ordine di intuizioni o di esperienze fisiche irriducibili a quelle che servono per confrontare le lunghezze delle poligonali e le aree delle superficie poliedriche.

Per maggiori delucidazioni e notizie bibliografiche sugli argomenti trattati in questa nota confronta: E. G. TOGLIATTI, *Sul volume della sfera*, Period. di Mat., 1922, pag. 305; G. FISICHELLA, *Sulla teoria dell'equivalenza secondo G. B. Halsted*, Period. di Mat., 1921, pag. 101; L. BRUSOTTI, *L'area di una superficie curva nella definizione di Minkowski e nell'insegnamento della Geometria elementare*, Period. di Mat., 1922, p. 49.

LIBRO TREDICESIMO

PER CURA DI

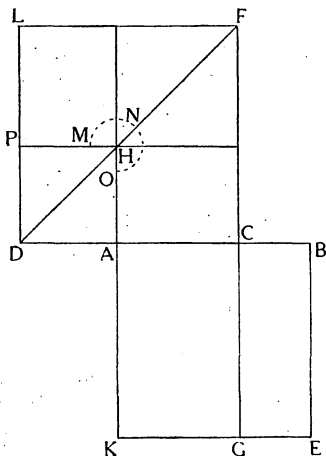
AMEDEO AGOSTINI

LIBRO XIII

1.

Se si divide una retta in media ed estrema ragione, il quadrato costruito sulla parte maggiore aumentata della metà di tutta la retta è uguale a cinque volte il quadrato della metà.

Si divida la retta AB , mediante il punto C , in media ed estrema ragione e la parte maggiore sia AC ; si prolun-



ghi la AC in AD e si prenda AD uguale a metà di AB . Dico che il quadrato di CD è cinque volte quello di DA .

Perciò si costruiscano sopra AB e DC i quadrati AE e DF ; su DF si costruisca la figura e si prolunghi FC fino in G . Ora, poichè AB è diviso da C in media ed estrema ragione, il rettangolo AB, BC è uguale al quadrato di AC (VI, term. 3; VI, 17). Ma CE è il rettangolo AB, BC ed FH il quadrato di AC , quindi CE è uguale ad FH .

E poichè BA è doppio di AD , e inoltre BA è uguale a KA ed AD è uguale ad AH , anche KA è doppio di AH . Ma KA sta ad AH , come CK sta a CH (VI, 1), quindi CK è doppio di CH . Anche la somma di LH e HC è doppia di CH , perciò KC è uguale ad LH e HC insieme.

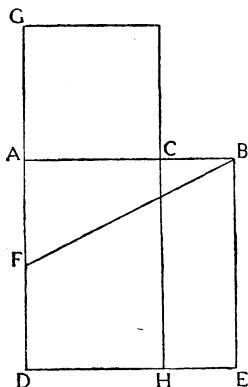
Abbiamo poi dimostrato che CE è uguale ad HF , quindi il quadrato AE è uguale al gnomone MNO . E, poichè BA è doppio di AD , il quadrato di BA è quadruplo del quadrato di AD , cioè AE è quadruplo di DH . Ma AE è uguale al gnomone MNO , quindi il gnomone MNO è pure quadruplo di AP , quindi il quadrato DF è cinque volte AP . Ma DF è il quadrato di DC e AP il quadrato di DA , quindi il quadrato di CD è cinque volte il quadrato di DA .

Dunque se si divide una retta in media ed estrema ragione, il quadrato costruito sulla parte maggiore aumentata della metà di tutta la retta è uguale a cinque volte il quadrato della metà, c. d. d.

Questa proposizione e le quattro seguenti costituiscono dei lemmi necessari per le altre proposizioni del libro e sono un complemento alla II, 11, e alla proposizione equivalente contenuta nella VI, 30.

Nelle dimostrazioni si ricorre ai metodi geometrici del II libro e non ai metodi algebrici del VI; ciò fa ritenere che queste proprietà in antichi Elementi costituissero parte delucidativa del contenuto del II libro. Con probabilità queste cinque proposizioni sono dovute ad EUOSSO, il quale, secondo la testimonianza di PROCLLO, avrebbe trovati parecchi teoremi riguardanti la sezione (aurea).

COMMANDINO dà una dimostrazione molto semplice di questa proposizione ricorrendo alla stessa figura di II, 11:



Sia AB diviso da C in media ed estrema ragione e sia AC la parte maggiore. Costruito il quadrato $ABDE$, si bisechi AD in F e si prenda $FG = FB$. Allora (II, 11) è $AG = AC$ e $FG = AC + \frac{1}{2} AB$. Poichè $AB = 2AF$, si ha

$$\overline{AB}^2 = 4\overline{AF}^2, \quad \overline{GF}^2 = \overline{FB}^2,$$

ma

$$\overline{FB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2,$$

quindi

$$\left(\overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{AB}\right)^2 = \overline{GF}^2 = 5\overline{AF}^2.$$

COMMANDINO aggiunge anche la risoluzione del problema:

Dato un segmento, trovare un segmento diviso in media ed estrema ragione che abbia il segmento dato come parte maggiore, mentre GIORDANO VITALE dimostra che

Se il quadrato di una retta è cinque volte il quadrato di una sua parte, il doppio di questa parte è maggiore della parte restante.

I vari Mss. contengono delle aggiunte, a ciascuna delle XIII, 1-5, sulla analisi e sulla sintesi delle varie proposizioni, evidentemente interpolate prima dell'epoca di TEONE. L'HEIBERG (*Euclides*, V, pag. LXXXIV) ritenne dapprima che esse fossero degli avanzi di ricerche analitiche di TEETETO o di EUDOSSO, ma più recentemente (*Hermes*, XXXVIII) fu portato ad attribuirle piuttosto ad ERONE.

All'aggiunta a questa proposizione è premessa la definizione che traduciamo liberamente:

Che cosa è l'analisi e che cosa è la sintesi:

L'analisi consiste nell'assumere come vero ciò che è richiesto e, per mezzo delle sue conseguenze, mostrare vero ciò che è stato ammesso.

La sintesi consiste nell'assumere ciò che è ammesso e, per mezzo delle sue conseguenze, mostrare vero ciò che è richiesto.

Il metodo apagogico o analitico, insieme alle forme di *analisi* e *sintesi*, si suole attribuire alle scuole di EUDOSSO e di PLATONE, ma nulla vieta di pensare che tali procedimenti logici fossero usati anche da matematici anteriori. Sulla analisi e sintesi si veda l'art. di A. SABBATINI in *Questioni riguardanti le matematiche elementari* di F. ENRIQUES, parte II.

Non riporteremo ad ogni proposizione la sintesi e l'analisi; ci basterà, come esempio, riassumere quelle che si riferiscono alla prima proposizione, tenendo presente la figura corrispondente.

Dato AB , diviso da C in media ed estrema ragione, sia AC la parte maggiore. Ammesso che sia

$$AD = \frac{1}{2} AB,$$

dico che

$$\overline{CD}^2 = 5\overline{AD}^2.$$

ANALISI - Sia

$$\overline{CD}^2 = 5\overline{AD}^2.$$

Poichè è

$$\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{CA} \cdot \overline{AD},$$

si avrà

$$\overline{CA}^2 + 2\overline{CA} \cdot \overline{AD} = 4\overline{AD}^2;$$

ma

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2\overline{CA} \cdot \overline{AD} \quad \text{e} \quad \overline{CA}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC},$$

quindi, sostituendo,

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4\overline{AD}^2,$$

ossia

$$\overline{AB}^2 = 4\overline{AD}^2.$$

Dunque

$$AD = \frac{1}{2} AB.$$

SINTESI - Essendo

$$\overline{AB}^2 = 4\overline{AD}^2 \quad \text{e} \quad \overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC},$$

si ha

$$4\overline{AD}^2 = 2\overline{AD} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2.$$

Aggiungendo ad ambo i membri il quadrato di AD , si ottiene

$$\overline{CD}^2 = 5\overline{AD}^2.$$

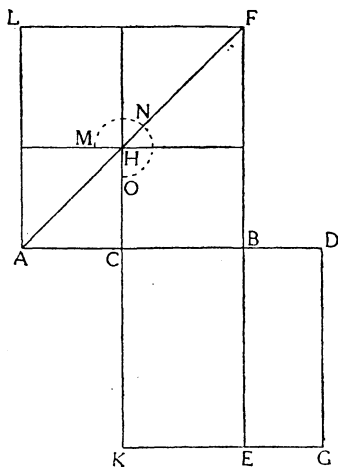
2.

Se il quadrato di una retta è uguale a cinque volte il quadrato di una parte di essa, e se si divide il doppio di questa parte in media ed estrema ragione, il segmento maggiore è la parte rimanente della retta data.

Il quadrato del segmento AB sia cinque volte il quadrato del segmento AC e il doppio di AC sia CD . Dico che, se CD è diviso in media ed estrema ragione, il maggior segmento è CB .

Si costruiscano rispettivamente su AB e CD i quadrati AF , CG , si costruisca la figura in AF e si conduca la BE .

Poichè il quadrato di AB è cinque volte il quadrato di AC , AF è cinque volte AH . Quindi il gnomone MNO è quadruplo di AH . Essendo DC doppio di CA , il qua-



drato di DC è quadruplo del quadrato di CA , cioè CG è quadruplo di AH .

Ma si è dimostrato che anche il gnomone MNO è quadruplo di AH , quindi il gnomone MNO è uguale a CG . Poichè DC è doppio di CA e inoltre poichè DC è uguale a CK e AC è uguale a CH , anche KB è doppio di BH

(VI, 1). Ora la somma di LH e HB è doppia di HB (I, 43), quindi KB è uguale a LH e HB insieme.

È poi stato dimostrato che il gnomone MNO è uguale a CG , quindi il rimanente HF è uguale a BG . Ma BG è il rettangolo CD, DB , poichè CD è uguale a DG ; e HF è il quadrato su CB ; quindi il rettangolo CD, DB è uguale al quadrato di CB . Dunque come DC sta a CB , così CB sta a BD (VI, 17).

Ma DC è maggiore di CB , quindi anche CB è maggiore di BD (V, 14). Dunque, divisa la retta CD in media ed estrema ragione, CB è la parte maggiore.

Dunque se il quadrato di una retta è uguale a cinque volte il quadrato di una parte di essa, e se si divide il doppio di questa parte in media ed estrema ragione, il segmento maggiore è la parte rimanente della retta data,

c. d. d.

LEMMA.

Che il doppio di AC sia maggiore di BC si può dimostrare così.

Non sia, e, se è possibile, sia BC doppio di CA , allora il quadrato di BC è quadruplo del quadrato di CA e quindi i quadrati di BC e CA sono insieme cinque volte il quadrato di CA . Ma, per ipotesi, anche il quadrato di BA è cinque volte il quadrato di CA , quindi il quadrato di BA è uguale alla somma dei quadrati di BC e CA , ciò che è impossibile (II, 4).

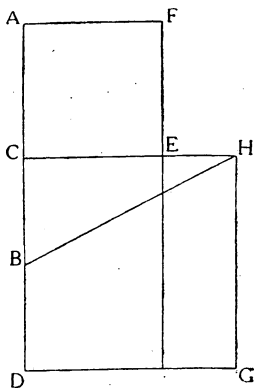
Dunque BC non è doppio di AC .

Similmente si può dimostrare che nessuna retta minore di BC è maggiore del doppio di AC , quindi si ha a maggiore ragione l'assurdo.

Dunque il doppio di AC è maggiore di CB .

Il **COMMANDINO** dimostra questa proposizione, reciproca della precedente, ricorrendo anche qui alla stessa figura di II, 11.

Sia $\overline{AB}^2 = 5\overline{AC}^2$. Si prolunghi AB fino in D , in modo che sia $CD = 2CB$. Dico che CD , diviso in media ed estrema ragione, ha la parte maggiore uguale ad AC .



Costruiti i quadrati di CD ed AC , si conduca BH . Poichè $CH = 2CB$, sarà

$$\overline{CH}^2 = 4\overline{CB}^2,$$

ma

$$\begin{aligned}\overline{BH}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{CB}^2 \\ &= 5\overline{CB}^2,\end{aligned}$$

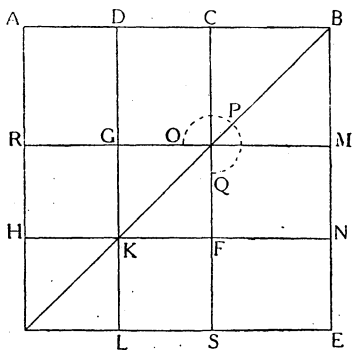
e perciò è $BH = AB$. Dunque CH è divisa da E in media ed estrema ragione (II, 11) e CE è la parte maggiore, ma $CH = CD$ e $CE = AC$, quindi AC è la parte maggiore di CD diviso in media ed estrema ragione.

HEIBERG dubita della genuinità del lemma aggiunto a questa proposizione.

3.

Se si divide una retta in media ed estrema ragione, il quadrato costruito sulla parte minore aumentata della metà della parte maggiore è uguale a cinque volte il quadrato della metà della parte maggiore.

Si divida la retta AB in media ed estrema ragione nel punto C e AC sia il segmento maggiore, si bisechi AC in D . Dico che il quadrato di BD è cinque volte il quadrato di DC .



Perciò si costruisca su AB il quadrato AE e si descriva la figura doppia.

Poichè AC è doppio di DC , il quadrato di AC è quadruplo del quadrato di DC , cioè RS è quadruplo di FG . Ma il rettangolo AB, BC è uguale al quadrato di AC (VI, term. 3; VI, 17), inoltre CE è uguale al rettangolo AB, BC , quindi CE è uguale a RS .

Essendo RS quadruplo di FG , anche CE è quadruplo di FG .

Ora, poichè AD è uguale a DC , anche HK è uguale a KF ; perciò il quadrato GF è uguale al quadrato HL . È quindi GK uguale a KL , cioè MN uguale ad NE , e quindi anche MF è uguale ad FE : si aggiunga ad ambedue CN , allora il gnomone OPQ è uguale a CE .

Si è però dimostrato che CE è quadruplo di FG , quindi il gnomone OPQ è pure quadruplo del quadrato FG . Lo gnomone OPQ insieme al quadrato FG è dunque cinque volte FG .

Ma il gnomone OPQ insieme al quadrato FG formano il quadrato DN , e DN è il quadrato su BD , e FG il quadrato su DC . Dunque il quadrato su BD è cinque volte il quadrato su DC ,
c. d. d.

La reciproca di questa proposizione:

Se un segmento è diviso in due parti disuguali in modo che il quadrato costruito sulla parte minore aumentata della metà della parte maggiore sia uguale a cinque volte il quadrato della metà della parte maggiore, il segmento è diviso in media ed estrema ragione,

è dimostrata dal CAMPANO, dal CLAVIO e dal COMMANDINO. Quest'ultimo risolve anche il problema:

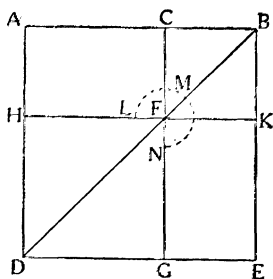
Dato un segmento qualunque, trovare quel segmento che diviso in media ed estrema ragione ha il segmento dato come parte minore.

4.

Se si divide una retta in media ed estrema ragione, la somma del quadrato costruito sull'intera retta col qua-

drato della parte minore è tripla del quadrato della parte maggiore.

Sia AB la retta divisa in media ed estrema ragione nel punto C , e AC sia il segmento maggiore. Dico che i quadrati di AB e BC sono insieme il triplo del quadrato di CA .



Costruito su AB , il quadrato $ADEB$, si tracci la figura.

Poichè AB è stato diviso in C in media ed estrema ragione e AC è la parte maggiore, il rettangolo AB, BC è uguale al quadrato di AC (VI, term. 3; VI, 17). Ma AK è il rettangolo AB, BC e HG è il quadrato di AC , quindi AK è uguale ad HG .

Essendo AF uguale ad FE , si aggiunga ad entrambi CK , allora AK è uguale a CE , quindi AK e CE insieme sono il doppio di AK . Ma AK e CE insieme sono il gnomone LMN più il quadrato CK , quindi il gnomone LMN e il quadrato CK sono insieme il doppio di AK .

Abbiamo però dimostrato che AK è uguale ad HG , quindi il gnomone LMN e i quadrati CK e HG sono tripli del quadrato HG . Ma il gnomone LMN e i quadrati

CK e HG insieme sono uguali al quadrato AE più CK , ossia ai quadrati di AB e BC , e inoltre HG è il quadrato di AC .

Dunque i quadrati di AB e BC sono insieme il triplo del quadrato di AC , c. d. d.

La proposizione si dimostra più semplicemente ricorrendo alla II, 7:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AC}^2 = 3\overline{AC}^2.$$

Sussiste la proposizione reciproca:

Se un segmento è diviso in due parti disuguali in modo che la somma del quadrato del segmento col quadrato della parte minore sia tripla del quadrato della parte maggiore, la retta è divisa in media ed estrema ragione (CLAVIO).

MAUROLICO aggiunge la notevole proprietà, riportata anche da GIORDANO VITALE:

Divisa una retta in media ed estrema ragione, si aggiunga ad essa la minor parte: il quadrato della somma è cinque volte il quadrato della parte maggiore;

Se una retta è divisa in due parti disuguali in modo che il quadrato costruito sulla retta aumentata della parte minore sia uguale a cinque volte il quadrato della parte maggiore, la retta è divisa in media ed estrema ragione.

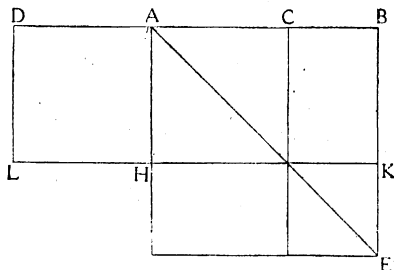
5.

Se una retta è divisa in media ed estrema ragione e ad essa si aggiunge la parte maggiore, anche la retta ottenuta è divisa in media ed estrema ragione e la parte maggiore è il segmento dato in principio.

La retta AB sia divisa in media ed estrema ragione dal punto C , la parte maggiore sia AC e AD sia uguale ad

AC. Dico che la *BD* è divisa da *A* in media ed estrema ragione e che la retta *AB* è la parte maggiore.

Si costruisca perciò su *AB* il quadrato *AE* e si descriva la figura.



Poichè *AB* è divisa in media ed estrema ragione da *C*, il rettangolo *AB, BC* è uguale al quadrato di *AC* (VI, term. 3; VI, 17). Ma *CE* è il rettangolo *AB, BC* e *CH* il quadrato di *AC*, quindi *CE* è uguale ad *HC*. Inoltre *HE* è uguale a *CE* e *DH* è uguale ad *HC*, quindi *DH* è uguale ad *HE*. Quindi tutto *DK* è uguale a tutto *AE*. Poichè *AD* è uguale a *DL*, *DK* è il rettangolo *BD, DA* e *AE* è il quadrato di *AB*, quindi il rettangolo *BD, DA* è uguale al quadrato di *AB*.

Allora *BD* sta a *BA* come *BA* sta ad *AD* (VI, 17), ma *BD* è maggiore di *BA*, quindi anche *BA* è maggiore di *AD*.

Dunque *BD* è diviso da *A* in media ed estrema ragione e *AB* è la parte maggiore, c. d. d.

La dimostrazione sarebbe immediata facendo uso della II, 11. Qualche codice porta la seguente dimostrazione dipendente dalle proprietà del V libro.

Per ipotesi è

$$AB:AC = AC:CB,$$

o, invertendo,

$$AC:AB = CB:AC.$$

Componendo

$$(AB + AC):AB = AB:AC,$$

ossia

$$DB:AB = AB:AC.$$

CAMPANO, seguito da altri commentatori, dà come scolio la dimostrazione della proposizione, di cui fa uso PAPPO nel libro V delle *Collezioni*,

Se una retta è divisa in media ed estrema ragione e si sottrae dalla parte maggiore la minore, la parte maggiore resta divisa in media ed estrema ragione e la parte maggiore è quella che è stata tolta,

alla quale CLAVIO aggiunge l'altra:

Se una retta è divisa in media ed estrema ragione e dalla metà di essa si sottrae la metà della parte maggiore, anche la metà della retta è divisa in media ed estrema ragione e la parte maggiore è la metà della parte maggiore della retta data.

Notiamo che da queste proprietà si ha subito la V, 44 di PAPPO, coincidente colla 7^a del presunto XIV libro di EUCLIDE:

Le parti delle rette divise in media ed estrema ragione sono proporzionali tra loro,

proposizione che è invertita dal BORELLI e alla quale GIORDANO VITALE aggiunge l'altra:

Se AB è diviso da C in media ed estrema ragione ed è $AC > CB$, preso in AB un punto qualunque D si divida AC con un punto E in modo che sia

$$AE:EC = AD:DB,$$

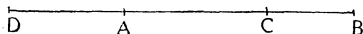
allora AD è divisa da E in media ed estrema ragione ed AE è la parte maggiore.

6.

Se una retta razionale è divisa in media ed estrema ragione, ciascuna delle parti è la linea retta irrazionale detta apotome.

Sia AB una linea retta razionale divisa da C in media ed estrema ragione e AC sia la parte maggiore. Dico che ciascuna delle rette AC , CB è la linea irrazionale detta apotome.

Si prolunghi perciò BA e si prenda AD uguale a metà di BA .



Poichè AB è divisa in media ed estrema ragione e alla parte maggiore AC si è aggiunto AD che è metà di AB , il quadrato di CD è cinque volte il quadrato di DA (XIII, 1). Il quadrato di CD ha quindi al quadrato di DA la ragione come un numero ad un numero, onde il quadrato di CD è commensurabile col quadrato di DA (X, 6).

Ma il quadrato di DA è razionale, perchè DA è razionale, essendo metà di AB che è razionale, quindi il quadrato di CD è pure razionale (X, term. 4) e anche CD è razionale.

E poichè il quadrato di CD non ha al quadrato di DA , la ragione come un numero quadrato ad un numero quadrato, CD è incommensurabile in lunghezza con DA

(X, 9), quindi CD e DA sono rette razionali commensurabili solo in potenza: dunque AC è un'apotome (X, 73).

Di nuovo, poichè AB è diviso in media ed estrema ragione e AC è la maggior parte, il rettangolo AB, BC è uguale al quadrato di AC (VI, term. 3; VI, 17). Quindi il quadrato sull'apotome AC , applicato alla linea razionale AB , produce BC come lunghezza. Ma il quadrato su un'apotome, applicato ad una linea razionale, produce in lunghezza la prima apotome (X, 97), quindi CD è una prima apotome. Anche CA si è provato che è un'apotome.

Quindi se una retta razionale è divisa in media ed estrema ragione, ciascuna delle parti è la linea irrazionale detta *apotome*,
c. d. d.

Solo nella XIII, 17 si ricorda che la maggior parte di un segmento diviso in media ed estrema ragione è un'apotome, ma in tale punto non è ricordata la XIII, 6 e nemmeno richiamato il suo enunciato: EUCLIDE poteva ritenere come evidente, per la XIII, 1, la proprietà dimostrata in questa proposizione, che qualche codice riporta come lemma della XIII, 17. Per queste ragioni l'HEATH la ritiene interpolata.

Ricordiamo che un'apotome (X, 73) è una retta della forma $a - a\sqrt{m}$, ove a è una linea razionale ed m è un numero intero o frazionario non quadrato perfetto.

7.

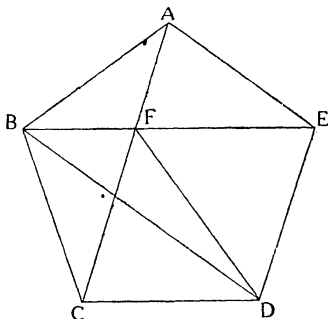
Se tre angoli, consecutivi o non consecutivi, di un pentagono equilatero sono uguali, il pentagono è equiangolo.

Nel pentagono equilatero $ABCDE$ siano dapprima

uguali tre angoli consecutivi; siano A, B, C uguali tra loro. Dico che il pentagono $ABCDE$ è equiangolo.

Si conducano perciò AC, BE, DF .

Poichè i due lati CB, BA sono rispettivamente uguali ai due lati BA, AE e l'angolo CBA è uguale all'angolo BAE , la base AC è uguale alla base BE ; il triangolo



ABC è dunque uguale al triangolo ABE e i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli che sottendono lati uguali (I, 4): cioè l'angolo BCA è uguale all'angolo BEA e l'angolo ABE è uguale all'angolo CAB , quindi il lato AF è uguale al lato BF (I, 6). Abbiamo poi dimostrato che AC è uguale a BE , quindi il rimanente FC è uguale al rimanente FE .

Ma anche CD è uguale a DE , quindi i due lati FC, CD sono uguali ai due lati FE, ED e la base FD è comune ad essi, allora l'angolo FCD è uguale all'angolo FED (I, 8). Ma si è già dimostrato che l'angolo BCA è uguale all'angolo AEB , quindi l'angolo BCD è uguale all'angolo AED . Per ipotesi però l'angolo BCD è

uguale agli angoli in A e in B , quindi anche l'angolo AED è uguale agli angoli in A e in B .

Similmente si dimostra che anche l'angolo CDE è uguale agli angoli in A , B , C ; dunque il pentagono $ABCDE$ è equiangolo.

Ora gli angoli uguali dati non siano consecutivi; siano uguali gli angoli nei vertici A , C , D . Dico ancora che il pentagono $ABCDE$ è equiangolo.

Si conduca BD .

Poichè i due lati BA , AE sono uguali ai lati BC , CD e contengono angoli uguali, la base BE è uguale alla base BD ; il triangolo ABE è dunque uguale al triangolo BCD e i rimanenti angoli sono uguali ai rimanenti angoli che sottendono lati uguali (I, 4). L'angolo AEB è quindi uguale all'angolo CDB . Ma l'angolo BED è uguale all'angolo BDE , quindi il lato BE è uguale al lato BD (I, 6). L'angolo AED è quindi uguale all'angolo CDE . Ma l'angolo CDE è, per ipotesi, uguale agli angoli in A e in C , quindi l'angolo AED è anche uguale agli angoli in A e in C .

Per la stessa ragione anche l'angolo ABC è uguale agli angoli in A , C , D . Dunque il pentagono $ABCDE$ è equiangolo, c. d. d.

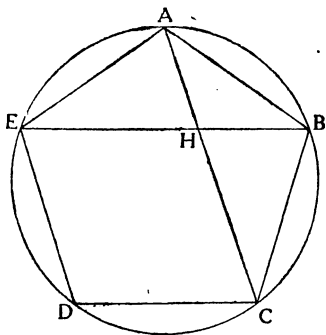
Questa proposizione servirà per dimostrare la XIII, 17.

8.

In un pentagono equilatero ed equiangolo le rette, sottese da due angoli consecutivi, si tagliano tra loro in media

ed estrema ragione e le loro parti maggiori sono uguali al lato del pentagono.

Nel pentagono equilatero ed equiangolo $ABCDE$ le rette AC , BE sottese da due angoli consecutivi, come A e B , si seghino nel punto H . Dico che ambedue sono divise in media ed estrema ragione dal punto H e che le loro parti maggiori sono uguali al lato del pentagono.



Si circoscriva al pentagono $ABCDE$ il cerchio $ABCDE$ (IV, 14). Poichè le due rette EA , AB sono uguali alle AB , BC e comprendono angoli uguali, la base BE è uguale alla base AC ; il triangolo ABE è dunque uguale al triangolo ABC e i rimanenti angoli saranno uguali agli angoli rimanenti che sottendono lati uguali (I, 4). Quindi l'angolo BAC è uguale all'angolo ABE , onde l'angolo AHE è doppio dell'angolo BAH (I, 32). Ma anche l'angolo EAC è doppio dell'angolo BAC , essendo l'arco EDC doppio dell'arco CB (III, 28; VI, 33), quindi l'an-

golo HAE è uguale all'angolo AHE e perciò la retta HE è uguale ad EA , cioè ad AB (I, 6).

E poichè AB è uguale ad AE , anche l'angolo ABE è uguale all'angolo AEB (I, 5).

Ma si è dimostrato che \widehat{ABE} è uguale a \widehat{BAH} , quindi anche l'angolo BEA è uguale a \widehat{BAH} . L'angolo ABE è poi comune ai triangoli ABE e ABH , onde il rimanente angolo BAE è uguale al rimanente angolo AHB (I, 32). Il triangolo ABE è dunque equiangolo al triangolo ABH ; si ha quindi la proporzione BE sta a BA , come AB sta a BH (VI, 4). Ma AB è uguale ad EH , quindi BE sta ad EH , come EH sta ad HB . Ma BE è maggiore di EH , quindi anche EH è maggiore di HB (V, 14).

Dunque BE è diviso in media ed estrema ragione da H e la parte maggiore HE è uguale al lato del pentagono.

Similmente si dimostra che anche AC è diviso da H in media ed estrema ragione e che la sua parte maggiore CH è uguale al lato del pentagono, c. d. d.

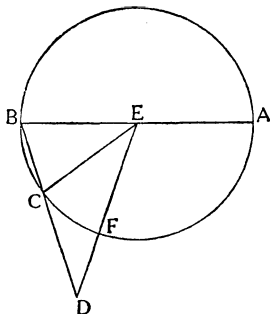
9.

Se si sommano tra loro il lato dell'esagono e quello del decagono inscritti nello stesso circolo, l'intera retta è divisa in media ed estrema ragione e la sua parte maggiore è il lato dell'esagono.

Sia ABC il cerchio; sia BC il lato del decagono inscritto nel cerchio e CD quello dell'esagono, i quali siano posti sulla stessa retta. Dico che l'intera retta BD è divisa

in media ed estrema ragione e che CD è la sua parte maggiore.

Si prenda il centro E del cerchio (III, 1), si conducano le EB , EC , ED e si prolunghi BE fino in A .



Poichè BC è il lato del decagono equilatero, l'arco ACB è cinque volte l'arco BC e quindi l'arco AC è quadruplo di CB . Ma l'arco AC sta a CB , come l'angolo AEC sta all'angolo CEB (VI, 33), quindi \widehat{AEC} è quadruplo di \widehat{CEB} . E poichè l'angolo EBC è uguale all'angolo ECB (I, 5), l'angolo AEC sarà doppio di \widehat{ECB} (I, 32).

Essendo la retta EC uguale a CD , poichè ciascuna di esse è uguale al lato dell'esagono inscritto nel cerchio ABC (IV, 15, coroll.), l'angolo CED è uguale all'angolo CDE (I, 5), quindi l'angolo ECB è doppio dell'angolo EDC (I, 32).

Ma si è dimostrato che \widehat{AEC} è doppio di \widehat{ECB} , quindi l'angolo AEC è quadruplo di \widehat{EDC} . Si è poi anche dimostrato che \widehat{AEC} è quadruplo di \widehat{BEC} , quindi l'angolo

EDC è uguale all'angolo BEC . L'angolo EBD è comune ai due triangoli BEC , BED , quindi il rimanente angolo BED è uguale al rimanente \widehat{ECB} (I, 32), onde il triangolo EBD è equiangolo al triangolo EBC . Si avrà allora la proporzione: BD sta a BE , come BE sta a BC (VI, 4). Ma BE è uguale a CD , quindi BD sta a DC , come DC sta a CB . Ma BD è maggiore di DC , quindi DC è pure maggiore di CB (V, 14).

Dunque la retta BD è divisa in media ed estrema ragione e DC è la sua parte maggiore, c. d. d.

Il COMMANDINO ed il CLAVIO notano che la proprietà data dalla 4^a prop. del preteso libro XIV di EUCLIDE:

Se si divide il lato dell'esagono in media ed estrema ragione, la parte maggiore è il lato del decagono,

è conseguenza immediata dello scolio aggiunto alla XIII, 5.

Algebricamente, il lato x del decagono inscritto in un cerchio di raggio r è dato dall'equazione

$$(r + x)x = r^2$$

da cui

$$x = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

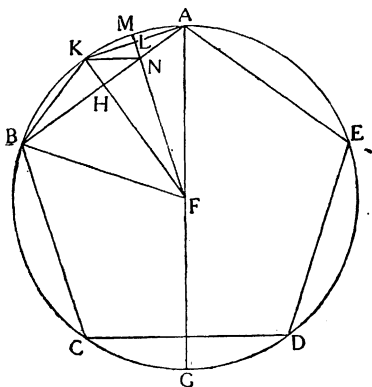
10.

Se un pentagono equilatero è inscritto in un cerchio, il quadrato del lato del pentagono è uguale ai quadrati del lato dell'esagono e del lato del decagono inscritti nello stesso cerchio.

Sia $ABCDE$ il cerchio e $ABCDE$ il pentagono equilatero inscritto nel cerchio $ABCDE$. Dico che il qua-

drato del lato del pentagono $ABCDE$ è uguale ai quadrati del lato dell'esagono e del lato del decagono inscritti nel cerchio $ABCDE$.

Si prenda perciò il centro F del cerchio (III, 1); condotta la AF , la si prolunghi fino al punto G ; si conduca FB e per F si tracci la FH , perpendicolare ad AB e pro-



lungata fino a K ; si conducano AK , KB e per F si tracci la FL perpendicolare ad AK e prolungata fino ad M ; infine si tracci KN .

Poichè l'arco $ABCG$ è uguale all'arco $AEDG$, e in essi ABC è uguale ad AED , il rimanente arco CG è uguale al rimanente GD . Ma CD appartiene al pentagono, quindi CG appartiene al decagono.

Allora, poichè FA è uguale ad FB ed FH è perpendicolare, l'angolo AFK è uguale all'angolo KFB (I, 5; I, 26). Perciò anche l'arco AK è uguale all'arco KB (III, 26) e quindi l'arco AB è doppio dell'arco BK e la

retta AK è il lato del decagono. Per la stessa ragione anche AK è doppio di KM .

Ora l'arco AB è doppio dell'arco BK e l'arco CD è uguale all'arco AB , quindi anche l'arco CD è doppio dell'arco BK . Ma l'arco CD è pure doppio di CG , quindi l'arco CG è uguale all'arco BK . Ma BK è doppio di KM , come lo è KA , quindi anche CG è doppio di KM . Anche l'arco CB è doppio dell'arco BK , perchè l'arco CB è uguale a BA . Tutto l'arco GB è quindi doppio di BM e perciò l'angolo GFB è doppio dell'angolo BFM (VI, 33). Anche l'angolo GFB è doppio di \widehat{FAB} , poichè l'angolo FAB è uguale ad \widehat{ABF} , quindi l'angolo BFN è uguale ad \widehat{FAB} .

Ma l'angolo \widehat{ABF} è comune ai due triangoli ABF e BFN , quindi l'angolo rimanente AFB è uguale al rimanente angolo BNF (I, 32) e il triangolo ABF risulta equiangolo al triangolo BFN ; allora AB sta a BF come FB sta a BN (VI, 43), ossia il rettangolo AB, BN è uguale al quadrato di BF (VI, 17).

Di nuovo, poichè AL è uguale ad LK ed LN è comune e perpendicolare, il lato KN è uguale al lato AN (I, 4), e l'angolo LKN è uguale ad \widehat{LAN} . Ma l'angolo \widehat{LAN} è uguale a \widehat{KBN} , quindi \widehat{LKN} è uguale a \widehat{KBN} . Inoltre l'angolo in A è comune ai due triangoli AKB e AKN , quindi il rimanente angolo AKB è uguale al rimanente angolo KNA , e perciò il triangolo KBA è equiangolo al triangolo KNA ; allora BA sta ad AK come KA sta ad AN (VI, 4), cioè il rettangolo BA, AN è uguale al quadrato di AK (VI, 17).

Ma si è anche dimostrato che il rettangolo AB, BN è uguale al quadrato di BF , quindi il rettangolo AB, BN insieme col rettangolo BA, AN , cioè il quadrato di BA (II, 2), è uguale al quadrato di BF più il quadrato di AK .

Ma BA è il lato del pentagono, BF quello dell'esagono (IV, 15 coroll.) e AK quello del decagono.

Dunque il quadrato del lato del pentagono è uguale ai quadrati del lato dell'esagono e del decagono inscritti nello stesso cerchio, c. d. d.

Se r è il raggio del cerchio, abbiamo visto (nota alla XIII, 9) che

$$AK = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

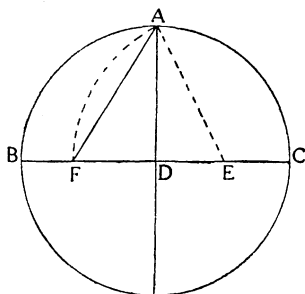
quindi, indicando con l_5 il lato del pentagono regolare, è

$$l_5^2 = r^2 + r^2 \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4},$$

da cui

$$l_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Con questa proposizione si può giustificare la costruzione del lato del pentagono e del decagono regolari dovuta a TOLOMEO (*Almagesto*, I, 1; cfr. nota alla IV, 11):



Condotti i diametri AD , BC perpendicolari tra loro, si divida DC per metà in E e si prenda $EF = EA$: dico che AF è il lato del pentagono e DF quello del decagono regolari inscritti nel cerchio.

Poichè CD è diviso per metà da E e ad esso si è aggiunto DF , si ha (II, 6)

$$CF \cdot DF + \overline{DE}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{EA}^2;$$

ma

$$\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2,$$

quindi

$$CF \cdot DF + \overline{DE}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DA}^2,$$

ossia

$$\overline{CF} \cdot \overline{DF} = \overline{AD}^2 = \overline{DC}^2.$$

È dunque

$$CF : DC = DC : DF,$$

ossia CF è diviso da D in media ed estrema ragione, ma CD è il lato dell'esagono inscritto nel cerchio, quindi DF è il lato del decagono (XIII, 9).

Inoltre, essendo

$$\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AF}^2,$$

per la XIII, 10, il segmento AF è il lato del pentagono.

Da questa proposizione si ha anche facilmente :

La somma dei quadrati del lato del pentagono regolare e della diagonale del pentagono stesso, è uguale a cinque volte il quadrato del raggio del cerchio circoscritto al pentagono,

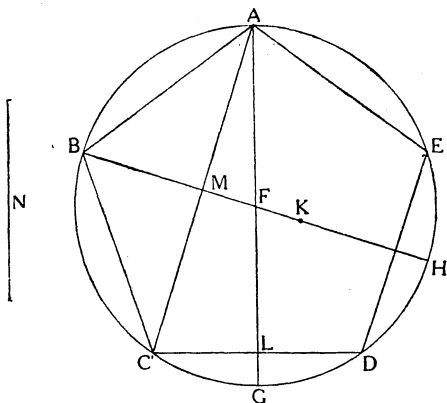
proprietà che costituisce la 3^a proposizione del preteso libro XIV di EUCLIDE.

11.

Se in un cerchio che ha il raggio razionale si inscrive un pentagono equilatero, il lato del pentagono è la retta irrazionale detta minore.

Nel cerchio $ABCDE$ avente il diametro razionale, si inscriva il pentagono equilatero $ABCDE$. Dico che il lato del pentagono è la linea retta irrazionale detta minore.

Preso il centro F del cerchio, si conducano AF , FB e si prolunghino fino ai punti G , H , si tracci AC e si ponga FK uguale alla quarta parte di AF .



Essendo AF razionale, anche FK è razionale; ma BF è pure razionale, quindi tutto BK è razionale. Poichè l'arco ACG è uguale all'arco ADG e in essi ABC è uguale ad AED , il rimanente CG è uguale al rimanente GD , e se conduciamo AD , concludiamo che gli angoli in L sono retti, e CD è doppio di CL (I, 4). Per la stessa ragione, anche gli angoli in M sono retti e AC è doppio di CM .

Poichè l'angolo ALC è uguale all'angolo AMF e l'angolo LAC è comune ai due triangoli ACL e AMF , il rimanente \widehat{ACL} è uguale al rimanente \widehat{MFA} (I, 32):

il triangolo ACL è quindi equiangolo col triangolo AMF e quindi (VI, 4) si ha la proporzione LC sta a CA , come MF sta ad FA , e, prendendo i doppi degli antecedenti, il doppio di LC sta a CA , come il doppio di MF sta ad FA . Ma il doppio di MF sta ad FA come MF sta alla metà di FA , quindi il doppio di LC sta a CA come MF sta alla metà di FA . Prendendo ora la metà dei conseguenti, si ha che il doppio di LC sta alla metà di CA , come MF sta alla quarta parte di FA . Ma DC è il doppio di LC , CM è metà di CA e FK è la quarta parte di FA , quindi DC sta a CM come MF sta ad FK .

Componendo, la somma di DC e CM sta a CM come MK sta a FK (V, 18), quindi il quadrato della somma di DC e CM sta al quadrato di CM come il quadrato di MK sta al quadrato di FK .

Ora, se la retta sottesa da due lati del pentagono, come la AC , è tagliata in media ed estrema ragione, la parte maggiore è uguale al lato del pentagono, cioè a DC (XIII, 8), inoltre il quadrato della parte maggiore aumentata della metà dell'intero è cinque volte il quadrato della metà dell'intero (XIII, 1); allora essendo CM metà di AC , il quadrato della somma di DC e CM è uguale a cinque volte il quadrato di CM .

Ma abbiamo già dimostrato che il quadrato della somma DC e CM , sta al quadrato di CM come il quadrato di MK sta al quadrato di KF , quindi il quadrato di MK è cinque volte il quadrato di KF . Ma il quadrato di KF è razionale, poichè è razionale il diametro; quindi il quadrato di MK è razionale, ed MK è pure razionale.

BF è quadruplo di FK , quindi BK è cinque volte KF e il quadrato di BK è venticinque volte il quadrato di KF . Ma il quadrato di MK è cinque volte il quadrato di KF , quindi il quadrato di BK è cinque volte il quadrato di KM e perciò il quadrato di BK non sta al quadrato di KM come un numero quadrato ad un numero quadrato e quindi BK è incommensurabile in lunghezza con KM (X, 9), mentre ciascuno dei quadrati è razionale. Dunque BK e KM sono linee rette razionali commensurabili solo in potenza.

Ma se da una retta razionale si sottrae una retta razionale che è commensurabile solo in potenza colla prima, il rimanente è irrazionale e precisamente un'apotome, quindi MB è un'apotome e MK è annessa ad essa (X, 73).

Dico, ora, che MB è un'apotome quarta. Sia il quadrato di N uguale alla differenza tra il quadrato di BK e il quadrato di KM , allora il quadrato di BK è uguale alla somma del quadrato di KM con quello di N . Poichè KF è commensurabile con FB , componendo, anche KB è commensurabile con FB (X, 15). Ma BF è commensurabile con BH , quindi BK è commensurabile con BH (X, 12). E poichè il quadrato di BK è cinque volte il quadrato di KM , il quadrato di BK sta al quadrato di KM nel rapporto come cinque ad uno. Quindi, convertendo, il quadrato di BK ha al quadrato di N il rapporto come cinque a quattro (V, 19, por.), e questo non è come un numero quadrato ad un numero quadrato, quindi BK è incommensurabile con N (X, 9).

Allora la differenza tra il quadrato di BK e il qua-

drato di KM è maggiore del quadrato di una retta incommensurabile con BK .

Poichè il quadrato di tutto BK supera il quadrato dell'annessa KM del quadrato di una retta incommensurabile con BK , e inoltre tutto BK è commensurabile con la linea razionale BH , di cui è parte, allora MB è un'apotome quarta (X, term. III, 4).

Ma il rettangolo contenuto da una linea razionale e da una quarta apotome è irrazionale e la sua radice quadrata è l'irrazionale detta minore (X, 94).

Il quadrato di AB è uguale al rettangolo HB , BM , poichè, condotta la AH , il triangolo ABH è equiangolo col triangolo ABM (VI, 8), e HB sta a BA come AB sta a BM (VI, 4).

Dunque il lato AB del pentagono è la retta irrazionale detta minore, c. d. d.

Dalla prima parte della dimostrazione risulta che

$$\overline{MK}^2 = 5\overline{KF}^2$$

e quindi, essendo $KF = \frac{1}{4}r$,

$$MK = \frac{\sqrt{5}}{4}r;$$

inoltre è anche

$$\overline{BK}^2 = 5\overline{MK}^2,$$

è perciò

$$BM = BK - MK = \frac{5}{4}r - \frac{\sqrt{5}}{4}r,$$

cioè BM è un'apotome avente per annessa MK (X, 73).

EUCLIDE dimostra quindi che BM è un'apotome quarta cioè è della forma

$$mr - \frac{mr}{\sqrt{1+n}},$$

ove m ed n sono numeri razionali ed r è una linea razionale.

Dall'essere

$$\overline{BA}^2 = BH \cdot BM,$$

si ha

$$BA = r\sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{5}{4}} r - \frac{\sqrt{5}}{4} r \right] = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

ossia

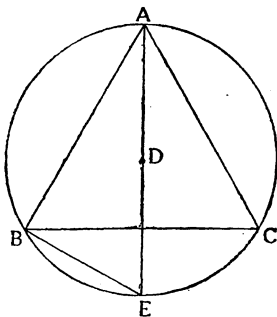
$$BA = \frac{r}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \frac{r}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}};$$

dunque BA è una linea irrazionale minore (X, 76).

12.

Se un triangolo equilatero è inscritto in un cerchio, il quadrato del lato del triangolo è triplo del quadrato del raggio del cerchio.

Sia ABC un cerchio e ABC il triangolo equilatero inscritto in esso. Dico che il quadrato di un lato del trian-



golo ABC è triplo del quadrato del raggio del cerchio.

Preso il centro D del cerchio ABC , si conduca AD prolungandolo fino in E , e si tracci BE .

Poichè il triangolo ABC è equilatero, l'arco BEC è la terza parte della circonferenza del cerchio ABC . L'arco BE è allora la sesta parte della circonferenza del cerchio, quindi la retta BE è il lato dell'esagono, ossia è uguale al raggio DE (IV, 15, Por.).

Poichè AE è doppio di DE , il quadrato di AE è quadruplo del quadrato di ED , cioè del quadrato di BE . Ma il quadrato di AE è uguale ai quadrati di AB e BE (III, 31; I, 47), quindi i quadrati di AB e BE insieme sono quadrupli del quadrato di BE ; quindi, *separando*, il quadrato di AB è triplo del quadrato di BE . Ma BE è uguale a DE , quindi il quadrato di AB è triplo del quadrato di DE .

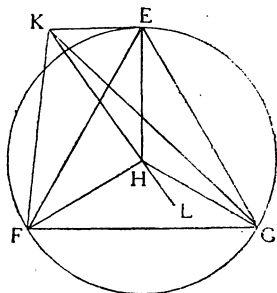
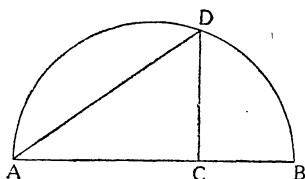
Dunque il quadrato del lato del triangolo è triplo del quadrato del raggio, c. d. d.

13.

Costruire una piramide inscritta in una data sfera e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato del lato della piramide.

Sia AB il diametro della sfera data e lo si divida nel punto C in modo che AC sia doppio di CB ; si descriva su AB il semicerchio ADB ; si conduca CD perpendicolare nel punto C alla AB e si tracci DA . Condotto il cer-

chio EFG di raggio uguale a DC , si inscriba nel cerchio EFG il triangolo equilatero EFG (IV, 2). Preso il centro H del cerchio (III, 1), si traccino le EH , HF , HG ; da H si conduca HK perpendicolare al piano del cerchio EFG (XI, 12) e sulla HK si prenda HK uguale ad AC ; si conducano KE , KF , KG .



Poichè HK è perpendicolare al piano del cerchio EFG , è anche perpendicolare a tutte le rette che l'intersecano e che stanno sul piano EFG (XI, term. 5). Ciascuna delle rette HE , HF , HG l'intersecano, quindi HK è perpendicolare alle rette HE , HF , HG .

Poichè AC è uguale ad HK e CD è uguale ad HE e comprendono angoli retti, la base DA è uguale alla base KE (I, 4). Per la stessa ragione ciascuna delle KF , KG è uguale a DA , quindi KE , KF , KG sono uguali tra loro.

Essendo AC doppio di CB , AB è tripla di BC ; ma, come dimostreremo dopo (v. lemma), AB sta a BC come il quadrato di AD sta al quadrato di DC , quindi il quadrato di AD è triplo del quadrato di DC . Ma anche il quadrato di FE è triplo del quadrato di EH (XIII, 12)

e DC è uguale ad EH , quindi DA è uguale a EF . Si è poi dimostrato che DA è uguale a ciascuna delle rette KE , KF , KG , quindi ciascuna delle EF , FG , GE è uguale a ciascuna delle rette KE , KF , KG e i quattro triangoli EFG , KEF , KFG , KGE sono equilateri.

Dunque si è costruita una piramide con quattro triangoli equilateri; il triangolo EFG è la sua base e il punto K il vertice.

Occorre ora inscrivere la nella sfera data e mostrare che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato dal lato della piramide.

Perciò si conduca KL per diritto a KH e si faccia HL uguale a CB .

Poichè AC sta a CD come CD sta a CB (VI, 8, coroll.) e inoltre poichè AC è uguale a KH , CD è uguale ad HE e CB ad HL , si ha che KH sta ad HE come EH sta ad HL ; il rettangolo KH , HL è quindi uguale al quadrato di EH (VI, 17). Ma ciascuno degli angoli KHE , EHL è retto, quindi il semicerchio descritto su KL passa anche per E (VI, 8; III, 31). Ora, restando KL fisso, se si fa ruotare il semicerchio fino a ritornare nella posizione da cui si è mosso, esso passerà anche pei punti F e G , poichè, condotte le FL , LG , gli angoli in F e in G risultano retti. La piramide è dunque inscritta nella sfera data, poichè il diametro KL della sfera è uguale al diametro AB della sfera data, e inoltre si è fatto KH uguale ad AC e HL uguale a CB .

Dico poi che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato del lato della piramide.

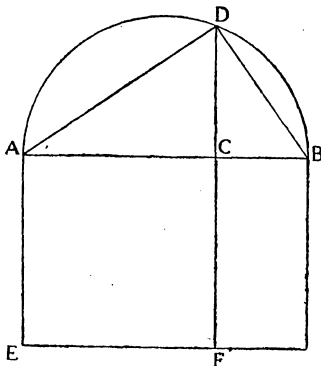
Infatti, poichè AC è doppio di CB , AB è triplo di BC , e, *convertendo*, BA è una volta e mezzo AC . Ma AB sta ad AC come il quadrato di BA sta al quadrato di AD , quindi il quadrato di BA è una volta e mezzo il quadrato di AD .

Ma BA è il diametro della sfera data, e AD è uguale al lato della piramide. Dunque il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato del lato della piramide, c. d. d.

LEMMA.

Si deve dimostrare che AB sta a BC come il quadrato di AD sta al quadrato di DC .

Si riprenda la figura del semicerchio usata sopra e, condotto DB , si descriva il quadrato EC di AC e si completi il parallelogrammo FB .



Poichè il triangolo DAB è equiangolo col triangolo DAC , si ha che BA sta ad AD come DA sta ad AC

(VI, 8; VI, 4), quindi il rettangolo BA, AC è uguale al quadrato di AD (VI, 17). E poichè AB sta a BC come EB sta a BF (VI, 1) ed EB è il rettangolo BA, AC (essendo EA uguale ad AC) e BF è il rettangolo AC, CB , segue che AB sta a BC come il rettangolo BA, AC sta al rettangolo AC, CB .

Ma il rettangolo BA, AC è uguale al quadrato di AD e il rettangolo AC, CB è uguale al quadrato di DC , perchè la perpendicolare DC è media proporzionale tra i segmenti AC, CB della base, essendo l'angolo ADB retto (VI, 8, coroll.).

Dunque AB sta a BC come il quadrato di AD sta al quadrato di DC , c. d. d.

Poichè è

$$\overline{BA}^2 = \frac{3}{2} \overline{AD}^2,$$

indicando con r il raggio della sfera, il lato AD del tetraedro inscritto è

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}r = \frac{2}{3}r\sqrt{6}.$$

L'HEATH ritiene il lemma una interpolazione, insieme alle parole « come dimostreremo dopo » di pg. 275.

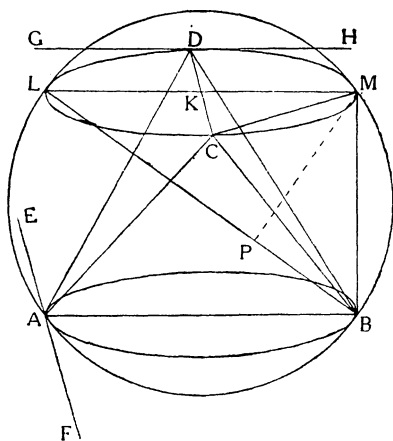
EUCLIDE in questa costruzione e nelle seguenti non costruisce effettivamente il poliedro regolare inscritto in una data sfera; egli determina, dato il diametro della sfera, il lato del poliedro regolare e, costruitolo, mostra che ad esso si può circoscrivere una sfera uguale alla data. Le costruzioni dei poliedri in una data sfera sono date da PAPPO (*Collezioni*, III, 142-162) il quale determina sulla sfera le sezioni circolari che contengono i vertici del poliedro: in queste costruzioni PAPPO ricorre a proprietà della sfera che non si trovano dimostrate negli *Elementi* euclidei, e che occorre ricer-

care in opere particolari come la *Sferica* di TEODOSIO. Riteniamo perciò interessante riportare queste costruzioni che procedono per sintesi ed analisi. Riferiamo ora la iscrizione del tetraedro.

Analisi.

Supponiamo risoluto il problema e siano A, B, C, D i vertici del tetraedro inscritto nella sfera.

Conduciamo per A la FE parallela allo spigolo CD : la EF formerà angoli uguali con AC e AD e risulterà perpendicolare ad AB (PAPPO, III, 140). Poichè EF è parallela alla base DC del triangolo equilatero ADC , essa è tangente al cerchio circoscritto al triangolo, e, perchè è perpendicolare ad AB , è tangente anche alla sezione della sfera ottenuta col piano passante per AB e per EF ; dunque EF è tangente alla sfera.



Per le stesse ragioni anche la GH , parallela ad AB condotta per D , è tangente alla sfera e inoltre la sezione ottenuta col piano per le rette CD e GH è parallela ed uguale alla sezione per AB .

Pel centro K di questa sezione conduciamo, nel piano della sezione, LM perpendicolare a CD , e quindi parallela ad AB , e conduciamo BL e BM .

Poichè BM è perpendicolare tanto ad AB che ad LM , BL è il diametro della sfera.

Condotto MC , si ha

$$\overline{LM}^2 = 2\overline{MC}^2,$$

e poichè $BC = AB = LM$, si avrà

$$\overline{BC}^2 = 2\overline{MC}^2.$$

Essendo BM perpendicolare al piano della sezione LM , essa è perpendicolare anche a CM , e si ha

$$\overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MC}^2,$$

quindi $BM = MC$. Ma è $BC = LM$ e perciò

$$\overline{LM}^2 = 2\overline{BM}^2.$$

E poichè l'angolo LMB è retto, si ha

$$\overline{BL}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MB}^2 = \frac{3}{2}\overline{LM}^2.$$

Sintesi

Si conducano nella sfera due sezioni circolari parallele aventi il diametro d' in modo che, essendo d il diametro della sfera, sia

$$d'^2 = \frac{2}{3}d^2.$$

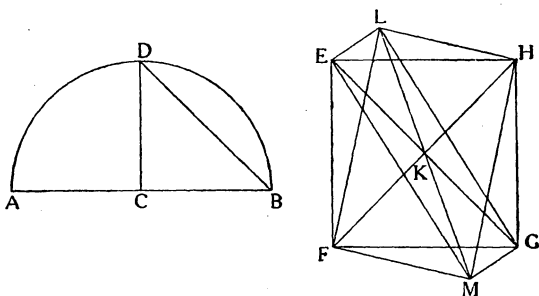
Per fare questo basterà prendere sopra un diametro LB della sfera un punto P in modo che $LP = 2PB$ e condurre PM perpendicolare al diametro e intersecante la sfera in M . Pei punti M ed A si conducano le sezioni perpendicolari ad MB e in queste sezioni si traccino i diametri paralleli BA e ML . (Si avrà allora $\overline{LM}^2 : \overline{LB}^2 = LP : LB = 2 : 3$).

Nella sezione LM si mandi pel centro K la CD perpendicolare ad LM : i punti A, B, C, D sono i vertici del tetraedro regolare richiesto.

14.

Costruire un ottaedro inscritto in una sfera, come nel caso precedente, e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è doppio del quadrato del lato dell'ottaedro.

Sia AB il diametro della sfera data, bisecato questo in C , si descriva su AB il semicerchio ADB ; condotta per C la CD perpendicolare ad AB , si conduca DB . Si prenda il quadrato $EFGH$ avente ciascun lato uguale a DB e, tracciate le HF, EG , dal punto K si innalzi la KL perpendicolare al piano del quadrato $EFGH$ (XI, 12) prolungandola dall'altra parte del piano in KM . Sulle rette



KL, KM si prendano rispettivamente KL e KM uguali a ciascuna delle EK, FK, GK, HK e quindi si conducano $LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH$.

Poichè KE è uguale a KH e l'angolo EKH è retto, il quadrato di HE è doppio del quadrato di EK (I, 47). E ancora, poichè LK è uguale a KE e \widehat{LKE} è retto, il quadrato di EL è doppio del quadrato di EK (I, 47).

Ma si è dimostrato che il quadrato di HE è pure doppio del quadrato di EK , quindi il quadrato di LE è uguale al quadrato di EH e perciò LE è uguale ad EH .

Per la medesima ragione LH è uguale ad HE , quindi il triangolo LEH è equilatero.

Similmente si può dimostrare che ciascuno dei rimanenti triangoli, aventi per base i lati del quadrato $EFGH$ e i punti L, M per vertici, sono equilateri, quindi si è costruito un ottaedro limitato da otto triangoli equilateri.

Occorre ora inscrivere nella sfera data e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è doppio del quadrato del lato dell'ottaedro.

Essendo le tre rette LK, KM, KE uguali tra loro, il semicerchio descritto su LM passa anche per E . Per la stessa ragione se, restando LM fisso, si fa ruotare il semicerchio fino a ritornare nella posizione da cui si è mosso, esso passa anche pei punti F, G, H , e si è così inscritto l'ottaedro in una sfera.

Ora dico che è inscritto nella sfera data.

Infatti, poichè LK è uguale a KM , KE è comune, e comprendono angoli retti, la base LE è uguale alla base EM (I, 4).

E poichè l'angolo LEM è retto, essendo in un semicerchio (III, 31), il quadrato di LM è doppio del quadrato di LE (I, 47). Ancora, poichè AC è uguale a CB , AB è doppio di BC ; ma AB sta a BC come il quadrato di AB sta al quadrato di BD , quindi il quadrato di AB è doppio del quadrato di BD . Si è poi dimostrato che il quadrato di LM è doppio del quadrato di LE , inoltre il qua-

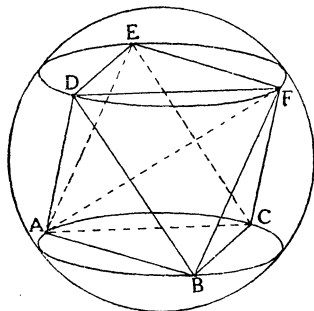
drato di DB è uguale al quadrato di LE , poichè si è fatto EH uguale a DB , quindi il quadrato di AB è uguale al quadrato di LM , e perciò AB è uguale ad LM . Ma AB è il diametro della sfera data, quindi LM è uguale al diametro della sfera data.

Dunque si è iscritto l'ottaedro nella sfera data e si è dimostrato nello stesso tempo che il quadrato del diametro della sfera è doppio del quadrato del lato dell'ottaedro,
c. d. d.

PAPPO determina le due sezioni uguali e parallele della sfera data, circoscritte a due faccie opposte dell'ottaedro, nel seguente modo:

Analisi

Abbiasi l'ottaedro di vertici A, B, C, D, E, F , circoscritto alla sfera. I piani delle faccie opposte ABC, DEF determinano sulla sfera i cerchi sezione ABC, DEF .



Poichè i lati DA, DB, DE, DF sono uguali, i punti A, B, E, F stanno sopra un cerchio della sfera che ha D per polo; ed essendo $AB = BF = FE = EA$, il quadrilatero $ABFE$ è un quadrato inscritto nel cerchio suddetto e quindi AB è parallelo ad EF .

Similmente DE risulta parallelo a BC e DF parallelo ad AC .

Dunque i cerchi ABC , DEF sono in piani paralleli e sono uguali perchè sono uguali i triangoli equilateri inscritti in essi.

Poichè ABC e DEF sono sezioni parallele ed uguali della sfera ed EF , AB sono corde uguali e parallele, poste da banda opposta rispetto alla congiungente i centri delle due sezioni, AF è un diametro della sfera.

Ma $AE = EF$, quindi

$$\overline{AF}^2 = 2\overline{FE}^2,$$

e, se d' è il diametro del cerchio DEF , è (XIII, 12)

$$d'^2 = \frac{4}{3}\overline{EF}^2,$$

Indicando allora con d il diametro della sfera, si ha

$$d^2 : d'^2 = 3 : 2.$$

Ma d è dato, quindi è determinato anche d' , come pure sono determinate le due sezioni ABC , DEF .

Sintesi

Si conducano nella sfera due sezioni uguali e parallele di diametro d' in modo che, essendo d il diametro della sfera data,

$$d^2 = \frac{3}{2}d'^2.$$

Si inscriva in una delle due sezioni il triangolo equilatero ABC e nell'altra sezione, da banda opposta rispetto alla congiungente dei due centri, si conduca la corda EF parallela ed uguale ad AB .

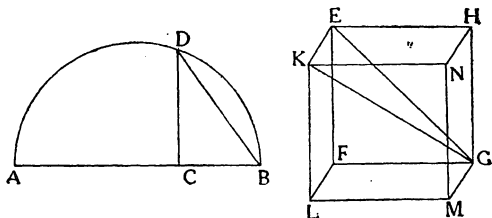
Si completi quindi il triangolo equilatero DEF .

$ABCDEF$ è l'ottaedro richiesto.

Dalla costruzione di EUCLIDE risulta che il lato dell'ottaedro inscritto nella sfera di raggio r è $r\sqrt{2}$.

sfera data, e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è triplo del quadrato del lato del cubo.

Preso AB come diametro della sfera data, lo si divida in C in modo che AC sia doppio di CB ; descritto su AB il semicerchio ADB , da C si innalzi CD perpendicolare ad AB e si conduca DB . Costruito il quadrato $EFGH$ avente i suoi lati uguali a DB , da E, F, G, H si innalzino le EK, FL, GM, HN perpendicolari al piano del quadrato



$EFGH$ e su ciascuna delle EK, FL, GM, HN si prendano rispettivamente EK, FL, GM, HN uguali ad una qualunque delle rette EF, FG, GH, HE ; si traccino poi le KL, LM, MN, NK . Si è quindi costruito un cubo FN , perchè limitato da sei quadrati uguali.

Occorre dimostrare che è inscritto nella sfera data e che il quadrato del diametro della sfera è triplo del quadrato del lato del cubo.

Si conducano ancora KG ed EG . Essendo KE perpendicolare al piano EG , e perciò anche alla retta EG (XI, term. 3), l'angolo KEG è retto e quindi il semicerchio su KG passa per il punto E . Inoltre, poichè GF è per-

pendicolare a ciascuna delle rette FL , FE , essa è perpendicolare al piano FK e, se si conduce FK , GF risulta perpendicolare anche ad FK ; per questa ragione il semicerchio descritto su GK passa anche per F . Similmente, passa anche per gli altri vertici del cubo.

Ora, se, restando KG fisso, il semicerchio ruota ritornando nella posizione da cui si è mosso, il cubo resta inscritto in una sfera.

Dico che esso è inscritto nella sfera data.

Infatti, poichè GF è uguale ad FE e l'angolo in F è retto, il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF . Ma EF è uguale ad EK , quindi il quadrato di EG è doppio del quadrato di EK , perciò i quadrati di GE ed EK , cioè il quadrato di GK (I, 47) è triplo del quadrato di EK . E poichè AB è triplo di BC e inoltre AB sta a BC come il quadrato di AB sta al quadrato di BD , il quadrato di AB è triplo del quadrato di BD . Si è poi dimostrato che il quadrato di KG è triplo del quadrato di KE , e si è fatto KE uguale a DB , quindi KG è uguale ad AB . Ma AB è il diametro della sfera data, quindi anche KG è uguale al diametro della sfera data.

Dunque il cubo è stato inscritto nella sfera data; nello stesso tempo si è dimostrato che il quadrato del diametro della sfera è triplo del quadrato del lato del cubo, c. d. d.

Se r è il raggio della sfera, il lato del cubo inscritto in essa è dunque dato da

$$\frac{2}{\sqrt{3}} r.$$

Esaminiamo la costruzione data da PAPP.

Analisi.

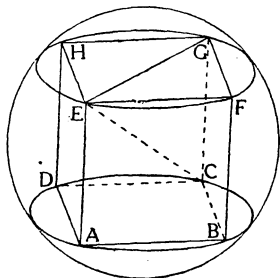
Il cubo inscritto nella sfera data abbia i vertici A, B, C, D, E, F, G, H . I piani delle faccie $ABCD, EFGH$ determinano sulla sfera due sezioni uguali, perchè sono uguali i quadrati inscritti in esse. CE sarà quindi un diametro della sfera. Si conduca EG .

Si ha allora

$$\overline{EG}^2 = 2\overline{EH}^2 = 2\overline{CG}^2,$$

ed essendo \widehat{CGE} retto,

$$\overline{CE}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2 = \frac{3}{2}\overline{EG}^2.$$



Ma EC è dato, quindi restano determinati EG , i cerchi $ABCD, EFGH$ ed anche i quadrati inscritti in essi.

Sintesi

Si costruiscano nella sfera due sezioni parallele aventi il diametro d' tale che, essendo d il diametro della sfera,

$$d'^2 = \frac{2}{3}d^2.$$

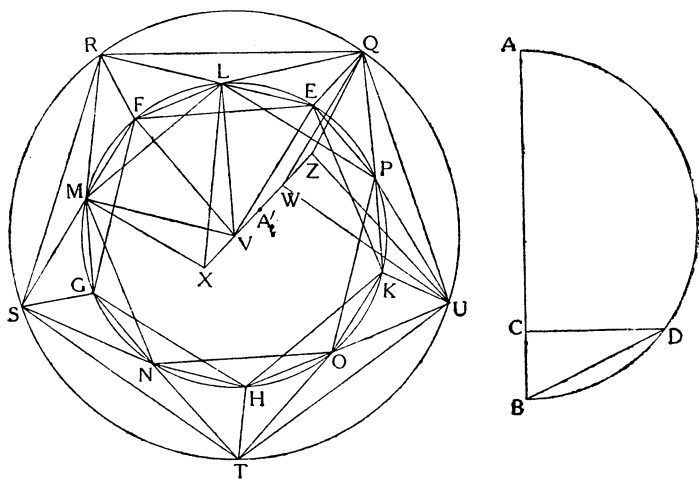
Si inscriva in una delle sezioni il quadrato $ABCD$ e nell'altra si conduca FG uguale e parallelo a BC . Si completi quindi il quadrato $EFGH$.

Gli otto vertici dei due quadrati costruiti sono quelli del cubo richiesto.

16.

Costruire un icosaedro circoscritto, come per le figure precedenti, in una sfera, e dimostrare che il lato dell'icosaedro è quella linea irrazionale detta minore.

Sia AB il diametro della sfera data, lo si divida in C in modo che AC sia quadruplo di CB . Descritto su AB il semicerchio ADB , si conduca per C la CD perpendicolare ad AB e si tracci DB . Descritto il cerchio $EFGHK$ con raggio uguale a DB , in esso si inscriva il pentagono equilatero ed equiangolo $EFGHK$ (IV, 11), si bise-



chino gli archi EF , FG , GH , HK , KE nei punti L , M , N , O , P e si conducano LM , MN , NO , OP , PL , EP . Il pentagono $LMNOP$ è quindi equilatero e la retta EP è il lato del decagono.

Ora dai punti E, F, G, H, K si innalzino EQ, FR, GS, HT, KU perpendicolari al piano del cerchio ed uguali al raggio del cerchio $EFGHK$; si traccino $QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ$.

Poichè ciascuna delle rette EQ, KU è perpendicolare allo stesso piano, EQ è parallelo a KU (XI, 6). Ma sono anche uguali e poichè le congiungenti le estremità di rette uguali e parallele, sono pure uguali e parallele (I, 33), anche QU è uguale e parallelo ad EK . Ma EK è il lato di un pentagono equilatero, perciò anche QU è lato del pentagono inscritto nel cerchio $EFGHK$.

Per la stessa ragione QR, RS, ST, TU sono lati del pentagono inscritto nel cerchio $EFGHK$, quindi il pentagono $QRSTU$ è equilatero.

QE è lato dell'esagono, EP è lato del decagono e l'angolo QEP è retto, quindi PQ è lato del pentagono, poichè il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma del quadrato del lato dell'esagono col quadrato del lato del decagono inscritti nello stesso cerchio (XIII, 10). Per la stessa ragione anche PU è lato del pentagono. Ma anche QU è lato del pentagono, quindi il triangolo QPU è equilatero. Per la medesima ragione, ciascuno dei triangoli QLR, RMS, SNT, TOU è pure equilatero.

E poichè dimostrammo che ciascuna delle QL, QP è lato del pentagono e che anche LP è lato del pentagono, il triangolo QLP è equilatero. Per la stessa ragione ciascuno dei triangoli LRM, MSN, NTO, OUP è equilatero.

Si prenda ora il centro V del cerchio $EFGHK$ e da V si conduca VZ perpendicolare al piano del cerchio, prolungandola nell'altra direzione in VX ; su di essa si prenda VW uguale al lato dell'esagono, VX e WZ uguali al lato del decagono e si conducano QZ , QW , UZ , EV , LV , LX , XM .

Ora, poichè ciascuna delle VW , QE è perpendicolare al piano del cerchio, VW è parallela a QE (XI, 6), ma sono anche uguali, quindi EV e QW sono uguali e parallele (I, 33). Essendo EV lato dell'esagono, anche QW è lato dell'esagono. Poichè QW è il lato dell'esagono, WZ è il lato del decagono e \widehat{QWZ} è retto (XI, term. 3; I, 29), QZ è il lato del pentagono (XIII, 10). Per la stessa ragione UZ è lato del pentagono, poichè, se conduciamo VK , WU , questi sono uguali ed opposti e il raggio VK è il lato dell'esagono (IV, 15, coroll.) e anche WU è quindi lato dell'esagono.

WZ è lato del decagono e l'angolo UWZ è retto, quindi UZ è lato del pentagono (XIII, 10). Ma anche QU è lato del pentagono, quindi il triangolo QUZ è equilatero. Per la stessa ragione ciascuno dei triangoli aventi QR , RS , ST , TU per basi e il punto Z per vertice è equilatero.

Inoltre, poichè VL è il lato dell'esagono, VX è il lato del decagono e \widehat{LVX} è retto, LX è il lato del pentagono (XIII, 10).

Per la stessa ragione, se si conduce MV , lato dell'esagono, anche MX risulta lato del pentagono. Ma pure LM è lato del pentagono, quindi il triangolo LMX è equila-

tero. Similmente si può dimostrare che ciascuno dei triangoli aventi per base MN , NO , OP , PL e il punto X per vertice, è equilatero.

Dunque si è costruito un icosaedro racchiuso da venti triangoli equilateri.

Occorre ora inscrivere nella sfera data e dimostrare che il lato dell'icosaedro è la linea retta irrazionale detta *minore*.

Poichè VW è il lato dell'esagono e WZ il lato del decagono, VZ è diviso da W in media ed estrema ragione e VW è la parte maggiore (XIII, 9), perciò ZV sta a VW come VW sta a WZ . Ma VW è uguale a VE e WZ è uguale a VX , quindi ZV sta a VE come VE sta a VX . Essendo \widehat{ZVE} ed \widehat{EVX} retti se si conduce EZ , l'angolo XEZ è retto per la similitudine dei triangoli XEZ , VEZ .

Per la stessa ragione, ZV sta a VW come VW sta a WZ , ma ZV è uguale a XW e VW a WQ , quindi XW sta a WQ come WQ sta a WZ . Perciò, condotto QX , l'angolo in Q è retto (VI, 8) e quindi il semicerchio descritto su XZ passa anche per Q (III, 31). Ora restando XZ fisso, se si fa ruotare il semicerchio fino a ritornare nella posizione da cui si è mosso, esso passa per Q e pei rimanenti vertici dell'icosaedro: l'icosaedro è stato quindi inscritto in una sfera.

Dico che è stato inscritto nella sfera data.

Perciò si bisechi VW in A' . Poichè VZ è diviso da W in media ed estrema ragione e ZW è la parte minore, il quadrato di ZW aumentato della metà della parte

maggiore, cioè WA' , è cinque volte il quadrato della metà della parte maggiore (XIII, 3), quindi il quadrato di ZA' è cinque volte il quadrato di WV .

Ma ZX è doppio di ZA' e VW è doppio di $A'W$, quindi il quadrato di ZX è cinque volte il quadrato di WV .

Essendo AC quadruplo di CB , allora AB è cinque volte BC . Ma AB sta a BC come il quadrato di AB sta al quadrato di BD (VI, 8; V, term. 9), quindi il quadrato di AB è cinque volte il quadrato di BD . Si è dimostrato che il quadrato di ZX è cinque volte il quadrato di VW ; inoltre DB è uguale a VW , perchè ambedue uguali al raggio del cerchio $EFGHK$, quindi AB è uguale a XZ .

Ma AB è il diametro della sfera data, quindi anche XZ è uguale al diametro della sfera data.

Dunque l'icosaedro è stato inscritto nella sfera data.

Dico ora che il lato dell'icosaedro è la linea irrazionale detta *minore*.

Infatti, poichè il diametro della sfera è irrazionale e il quadrato di esso è cinque volte il quadrato del raggio del cerchio $EFGHK$, anche il raggio del cerchio $EFGH$ è razionale ed è quindi razionale anche il suo diametro.

Ma se un pentagono equilatero è inscritto in un cerchio che ha il diametro razionale, il lato del pentagono è la linea irrazionale detta *minore*. Il lato del pentagono $EFGHK$ è il lato dell'icosaedro, quindi il lato dell'icosaedro è la linea irrazionale detta *minore*, c. d. d.

COROLLARIO

Da ciò è manifesto che il quadrato del diametro della sfera è cinque volte il quadrato del raggio del cerchio mediante il quale è stato costruito l'icosaedro, e che il diametro della sfera è composto del lato dell'esagono e di due lati del decagono inscritti nello stesso cerchio.

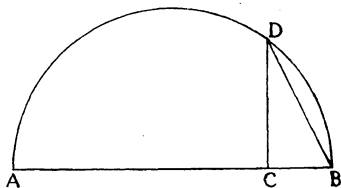
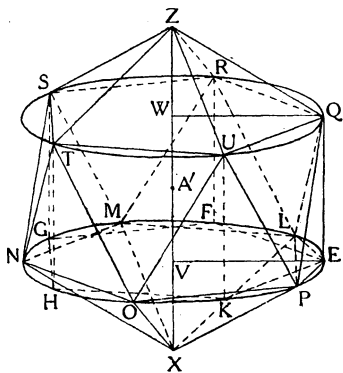
Nella figura di EUCLIDE l'icosaedro risulta poco evidente e poco chiara la costruzione per la dimostrazione; riportiamo quindi la figura colla rappresentazione dell'icosaedro nella posizione consueta, che permette di seguire più chiaramente il ragionamento euclideo.

Dal semicerchio di diametro AB si ha

$$AB:BC = \overline{AB}^2 : AB \cdot BC = \overline{AB}^2 : \overline{BD}^2,$$

ma è $AB = 5BC$, quindi

$$\overline{AB}^2 = 5\overline{BD}^2,$$



ossia, indicando con r il raggio della sfera, il raggio BD della sezione della sfera contenente cinque vertici dell'icosaedro è dato da

$$\frac{2}{\sqrt{5}} r.$$

Allora (XIII, 10) il lato del pentagono inscritto in detta sezione è

$$\frac{r}{\sqrt{5}} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

ossia

$$\frac{r}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})}.$$

Ma il lato del pentagono è una linea irrazionale *minore* (XIII, 11) ed è anche il lato dell'icosaedro, quindi il lato dell'icosaedro inscritto nella sfera di raggio r è la linea irrazionale *minore*

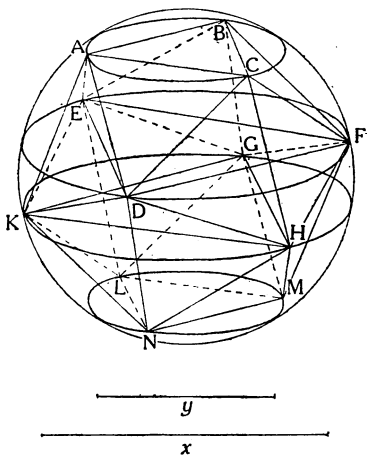
$$\frac{r}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})} = \frac{r}{5} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} - \frac{r}{5} \sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})}.$$

PAPPO dà la seguente costruzione nella quale determina nella sfera quattro sezioni circolari a due a due uguali passanti ciascuna per tre vertici dell'icosaedro.

Analisi

Supponiamo già inscritto nella sfera l'icosaedro di vertici $A, B, C, D, E, F; G, H, K; L, M, N$.

Poichè le corde BA, BC, BF, BG, BE della sfera uscenti da B sono uguali, i punti A, C, F, G, E stanno in un piano.



Ma $AC = CF = FG = GE = EA$, quindi il poligono $ACFGE$ è un pentagono equilatero ed equiangolo.

Per la stessa ragione anche $BCDEK$, $ABFHD$, $ABGKL$, $ACHNK$ sono dei pentagoni regolari.

Conduciamo EF ed HK .

Nel pentagono $ACFGE$ il lato AC è parallelo ad EF , nel pentagono $AKNHC$ il lato AC è parallelo ad HK , quindi HK ed EF sono paralleli.

Inoltre nel pentagono $LKDHM$, HK è parallelo ad LM .

Similmente BC , ED , GH , LN sono paralleli tra loro, come pure AB , GK , MN sono tra loro paralleli.

Poichè BC è uguale e parallelo ad LN e BA ad MN , i cerchi ABC e LMN sono uguali e paralleli. Anche i cerchi DEF , KGH sono uguali e paralleli, perchè i triangoli DEF , KGH inscritti in essi sono paralleli e inoltre uguali perchè ciascun lato di essi è una diagonale di pentagoni uguali.

Nei cerchi DEF , KGH , le corde EF , HK sono parallele e stanno da banda opposta rispetto alla congiungente i centri, quindi FK è un diametro della sfera e l'angolo FEK è retto.

Se nel pentagono $GEACF$ si divide EF in media ed estrema ragione, la parte maggiore è il lato AC (XIII, 8); quindi (XIII, 9)

$EF : AC =$ lato esagono : lato decagono nello stesso cerchio, inoltre

$$\overline{EF}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{EK}^2 = \overline{FK}^2,$$

dunque (XIII. 10) FK (diametro della sfera), EF e AC sono rispettivamente i lati del pentagono, dell'esagono e del decagono inscritti nello stesso cerchio.

Ma FK è dato, quindi sono dati anche EF e AC e si possono determinare i raggi dei cerchi EFD , ACB .

Infatti, indicando con r ed r' i rispettivi raggi, si ha

$$r^2 = \frac{1}{3} \overline{EF}^2, \quad r'^2 = \frac{1}{3} \overline{AC}^2,$$

Sintesi

Se d è il diametro della sfera, si prendano due segmenti x e y in modo che d , x , y siano tra loro, rispettivamente, nel rapporto

dei lati del pentagono, dell'esagono e del decagono inscritti nello stesso cerchio.

Si determinino nella sfera quattro sezioni circolari parallele, due aventi il raggio r tale che

$$r^2 = \frac{1}{3} x^2,$$

e siano DEF , KGH , e le altre due ABC , LMN aventi un raggio r , tale che

$$r'^2 = \frac{1}{3} y^2.$$

Nei primi due cerchi si conducano i lati EF , HK dei triangoli equilateri inscritti in modo che risultino paralleli e opposti alla congiungente i centri. Negli altri due si conducano i lati AC , LM dei triangoli equilateri inscritti paralleli tra loro e in modo che AC , EF siano da banda opposta rispetto alla congiungente i centri e altrettanto sia per LM e HK .

Si completi quindi la figura.

PAPPO dimostra anche che

$$(\text{diam. sfera})^2 = 3 (\text{lato del pent. in } DEF)^2.$$

Per costruzione si ha

$$KF:FE = p:h,$$

ove p e h sono i lati del pentagono e dell'esagono regolari inscritti nello stesso cerchio DEF .

Ma $FE:h =$ il lato di un triangolo equilatero sta a quello dell'esagono inscritto nello stesso cerchio, ossia

$$FE:h = \sqrt{3}:1,$$

per cui

$$KF:p = \sqrt{3}:1,$$

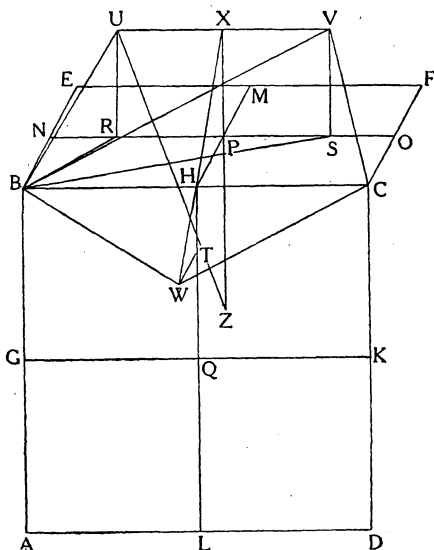
quindi

$$\overline{KF}^2 = 3p^2.$$

17.

Costruire un dodecaedro, inscriverlo, come per le figure precedenti, in una sfera, e dimostrare che il lato del dodecaedro è la linea irrazionale detta apotome.

Siano $ABCD$, $CBEF$ due faccie perpendicolari tra loro del cubo precedente (XIII, 15), si bisechino nei punti G , H , K , L , M , N , O i lati AB , BC , CD , DA , EF , EB , FC e congiunti GK , HL , MH , NO , si dividano NP , PO , HQ in media ed estrema ragione ri-



spettivamente nei punti R , S , T e RP , PS , TQ siano le loro parti maggiori; dai punti R , S , T si innalzino RU , SV , TW perpendicolari ai piani del cubo, esternamente

al cubo, e uguali ad RP , PS , TQ ; si conducano poi UB , BW , WC , CV , VU .

Dico che il pentagono $UBWCV$ è equilatero, sta in un piano e inoltre è equiangolo.

Perciò si traccino RB , SB , VB . Poichè NP è stata divisa in media ed estrema ragione in R ed RP è la parte maggiore, i quadrati di PN ed NR insieme sono il triplo del quadrato di RP (XIII, 4). Ma PN è uguale ad NB e PR è uguale ad RU , quindi i quadrati di BN , NR sono insieme il triplo del quadrato di RU . Il quadrato di BR è però uguale ai quadrati di BN ed NR insieme (I, 47), quindi il quadrato di BR è triplo del quadrato di RU e i quadrati di BR ed UR sono insieme il quadruplo del quadrato di RU .

Ma il quadrato di BU è uguale alla somma dei quadrati di BR ed RU , quindi il quadrato di BU è quadruplo del quadrato di RU , e quindi BU è doppio di RU . Anche VU è doppio di UR , perchè SR è doppio di PR , cioè di RU , quindi BU è uguale ad UV .

Similmente si può dimostrare che ciascuna delle rette BW , WC , CV è uguale a ciascuna delle rette BU , UV .

Dunque il pentagono $BUVCW$ è equilatero.

Ora dico che esso è in un piano.

Perciò per P si conduca, esternamente al cubo, la PX parallela alle RU , SV e si traccino XH , HW ; dico che XHW è una retta.

Poichè HQ è diviso da T in media ed estrema ragione e QT è la parte maggiore, si ha che HQ sta a QT , come QT sta a TH . Ma HQ è uguale ad HP e QT è uguale

a ciascuna delle rette TW , PX , quindi HP sta a PX come WT sta a TH . Ora HP è parallela a TW , perchè perpendicolari al piano BD (XI, 6), e TH è parallela a PX , perchè perpendicolari al piano BF (XI, 6). Ma se due triangoli congiunti per un vertice, come XPH , HTW , hanno due lati proporzionali a due lati e i lati corrispondenti paralleli, i lati rimanenti sono sulla medesima retta (VI, 32); quindi XH è sulla stessa retta con HW .

Ma ogni retta è in un piano (XI, 1), dunque il pentagono $UBWCV$ è in un piano.

Ora dico che è anche equiangolo.

Essendo la NP divisa da R in media ed estrema ragione e PR è la parte maggiore, inoltre essendo PR uguale a PS , anche NS è divisa da P in media ed estrema ragione ed NP è la parte maggiore (XIII, 5); quindi i quadrati di NS , SP sono insieme tripli del quadrato di NP (XIII, 4). Ma NP è uguale ad NB e PS è uguale ad SV , quindi i quadrati di NS , SV sono insieme tripli del quadrato di NB , e perciò la somma dei quadrati di VS , SN , NB è il quadruplo del quadrato di NB .

Ma il quadrato di SB è uguale alla somma dei quadrati di SN , NB , quindi i quadrati di BS , SV , cioè, essendo l'angolo VS retto, il quadrato di BV , è quadruplo del quadrato di NB ; dunque VB è doppio di NB . Anche BC è doppio di NB , quindi BV è uguale a BC .

Poichè i due lati BU , UV sono uguali ai due lati BW , WC e la base BV è uguale alla base BC , l'angolo BUV è uguale all'angolo BWC (I, 8).

Similmente possiamo dimostrare che anche l'angolo

UVC è uguale a \widehat{BWC} ; quindi i tre angoli BWC , BUV , UVC sono uguali tra loro. Ma se in un pentagono equilatero tre angoli sono uguali tra loro, il pentagono è equiangolo (XIII, 7), quindi il pentagono $BUVCW$ è equiangolo. Si è dimostrato che è anche equilatero, quindi il pentagono $BUVCW$ è equilatero ed equiangolo ed è costruito sopra un lato BC del cubo.

Ma, se facciamo la stessa costruzione su ciascuno dei dodici lati del cubo, veniamo a costruire una figura solida che è racchiusa da dodici pentagoni equilateri ed equiangoli, che è chiamata dodecaedro.

Si è poi richiesto che sia inscritto nella sfera data e che si dimostri che il lato del dodecaedro è la linea irrazionale detta *apotome*.

Perciò si prolunghi XP e il prolungamento sia PZ ; la PZ interseca la diagonale del cubo e queste si segano tra loro, come abbiamo dimostrato nel penultimo teorema del libro undicesimo (XI, 38). Si seghino in Z , allora Z è il centro della sfera che comprende il cubo e ZP è metà del lato del cubo.

Si conduca UZ .

Ora, poichè NS è divisa da P in media ed estrema ragione ed NP è la parte maggiore, i quadrati di NS , SP sono insieme il triplo del quadrato di NP (XIII, 4). Ma NS è uguale ad XZ , perchè NP è uguale a PZ e XP è uguale a PS . Inoltre PS è uguale anche ad XU , poichè è uguale ad RP , quindi i quadrati di ZX , XU sono insieme il triplo del quadrato di NP .

Ma il quadrato di UZ è uguale alla somma dei quadrati

di ZX e XU , quindi il quadrato di UZ è triplo del quadrato di NP .

Il quadrato del raggio della sfera che comprende il cubo è pure triplo del quadrato della metà del lato del cubo, poichè, come si è visto quando si è costruito il cubo e si è inscritto il cubo in una sfera, si è dimostrato che il quadrato del diametro della sfera è triplo del lato del cubo (XIII, 15). Ma ciò che è detto del tutto, vale anche per le metà, e NP è metà del lato del cubo, quindi UZ è uguale al raggio della sfera che racchiude il cubo. Essendo Z il centro della sfera che racchiude il cubo, il punto U è sulla superficie della sfera.

Similmente possiamo dimostrare che ciascuno dei rimanenti vertici del dodecaedro è sulla superficie della sfera; dunque il dodecaedro è stato inscritto nella sfera data.

Ora dico che il lato del dodecaedro è la linea irrazionale detta *apotome*.

Infatti, poichè NP è stato diviso in media ed estrema ragione ed RP è la parte maggiore, e poichè PO è stato diviso in media ed estrema ragione e PS è la parte maggiore, anche tutto NO è diviso in media ed estrema ragione ed RS è la parte maggiore.

Infatti, poichè NP sta a PR come PR sta ad RN , lo stesso è dei doppi, poichè le parti hanno lo stesso rapporto delle loro equimultiple (V, 15). Quindi NO sta ad RS come RS sta alla somma di NR e SO . Ma NO è maggiore di RS , quindi RS è maggiore della somma di NR e SO : dunque NO è stato diviso in media ed estrema ragione e RS è la parte maggiore.

Ma RS è uguale ad UV , quindi, essendo NO diviso in media ed estrema ragione, UV è la parte maggiore.

E poichè il diametro della sfera è razionale e il quadrato di esso è triplo del quadrato del lato del cubo, anche NO , che è il lato del cubo, è razionale. Ma se si divide una linea razionale in media ed estrema ragione, ciascuna delle parti è irrazionale *apotome* (XIII, 6), quindi UV , che è il lato del dodecaedro, è irrazionale *apotome*.

COROLLARIO

Da ciò è manifesto che, se il lato del cubo è diviso in media ed estrema ragione, la parte maggiore è il lato del dodecaedro.

EUCLIDE considera il cubo inscritto sulla sfera e, per costruire il dodecaedro, determina il pentagono regolare che ha per diagonale il lato del cubo.

Ora, indicando con l il lato del cubo e con a quello del pentagono, applicando il teorema di TOLOMEO (figura della XIII, 8) si ha

$$l^2 = la + a^2,$$

da cui

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l,$$

ma (nota alla XIII, 11), indicando con r il raggio della sfera,

$$l = \frac{2}{\sqrt{3}} r,$$

quindi il lato del dodecaedro inscritto nella sfera di raggio r è

$$a = \frac{r}{\sqrt{3}} (\sqrt{5}-1) = \frac{r}{3} (\sqrt{15}-\sqrt{3}).$$

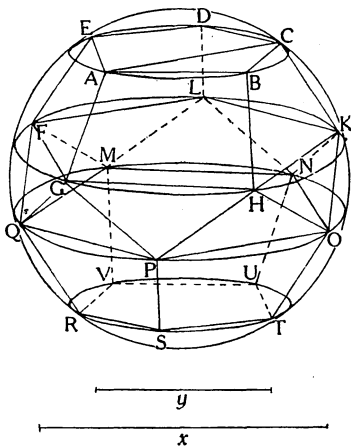
Per costruire il dodecaedro, PAPPo determina quattro sezioni parallele della sfera, passanti ciascuna per cinque vertici del poliedro, nel modo seguente:

Analisi

Abbiassi inscritto nella sfera il dodecaedro di vertici A, B, C, D, E ; F, G, H, K, L ; M, N, O, P, Q ; R, S, T, U, V .

Poichè ED è parallelo ad FL e AE ad FG , i piani $ABCDE$, $FGHKL$ risultano paralleli.

Ora PA è parallelo a BH e BH è parallelo ad OC , quindi PA ed OC sono paralleli e sono anche uguali; allora anche PO e AC sono paralleli e ST ed ED sono pure paralleli.



Similmente sono parallele fra loro le coppie di rette DC, RS ; EA, TU ; AB, UV ; BC, VR .

I piani $ABCDE$, $RSTUV$ sono paralleli e i cerchi $ABCDE$, $RSTUV$ sono uguali essendo uguali i pentagoni regolari inscritti in essi.

Così, per la stessa ragione, anche i cerchi $FGHKL$, $MNOPQ$ sono uguali. Ora CL e OU sono paralleli tra loro, essendo ciascuno parallelo a KN , quindi i punti L, C, O, U sono in un piano; inoltre LC, CO, OU, UL sono uguali essendo diagonali di pen-

tagoni uguali, ed essendo il quadrilatero $LCOU$ inscritto in un cerchio, $LCOU$ è un quadrato.

Allora, essendo $LC = LF$ perchè diagonali di pentagoni uguali, è

$$\overline{OL}^2 = 2\overline{LC}^2 = 2\overline{LF}^2.$$

Ma \widehat{OLF} è retto, poichè OP ed LF sono corde uguali e parallele di due sezioni uguali e parallele della stessa sfera, quindi

$$\overline{OF}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{FL}^2$$

e, per la precedente,

$$\overline{OF}^2 = 3\overline{FL}^2.$$

Ma OF è il diametro della sfera, perchè PO ed FL sono lati paralleli dei pentagoni e da banda opposta rispetto alla congiungente i centri. Supponiamo allora che p , t , h siano i lati, rispettivamente, del pentagono, del triangolo e dell'esagono regolari inscritti nel cerchio $FGHKL$ e sia d il diametro della sfera.

Per la relazione precedente si ha

$$OF : FL = d : p = \sqrt{3} : 1,$$

ma (XIII, 12)

$$d : p = t : h,$$

ossia

$$d : t = p : h.$$

Siano ora d' , p' , h' rispettivamente i lati del decagono, del pentagono e dell'esagono inscritti in un cerchio qualunque.

Poichè, se si divide FL in media ed estrema ragione, la parte maggiore è ED (XIII, 8), si ha (XIII, 9)

$$FL : ED = h' : d'.$$

Ma il rapporto $FL : ED$ è quello dei lati dei pentagoni regolari inscritti nei cerchi $FGHKL$, $ABCDE$ ed è allora uguale al rapporto dei lati dei triangoli equilateri inscritti negli stessi cerchi: quindi

$$t : \text{lato triang. equil. in } ABCD = h' : d'.$$

Ma

$$d : t = p : h = p' : h',$$

quindi, per uguaglianza,

$$d: \text{lato del triang. equil. in } ABCDE = p' : d',$$

poichè d è dato, restano quindi determinati i lati dei triangoli equilateri inscritti nei cerchi $ABCDE$ e $FGHKL$ e quindi i raggi di questi cerchi.

Sintesi.

Si prendano due segmenti x e y in modo che d , x , y stiano nel rapporto dei lati del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari inscritti nello stesso cerchio.

Si determinino allora nella sfera due sezioni parallele aventi i raggi r ed r' tali che

$$r^2 = \frac{1}{3}x^2, \quad r'^2 = \frac{1}{3}y^2.$$

Siano rispettivamente, $FGHKL$, $ABCDE$ queste sezioni: si conducano allora, dall'altra parte del centro della sfera, le sezioni uguali e parallele ad esse $MNOPQ$, $RSTUV$.

Nei primi due cerchi si inscrivano i pentagoni regolari in modo che i lati dell'uno risultino paralleli a quelli dell'altro.

Negli altri due cerchi si inscrivano pure i pentagoni regolari coi lati paralleli, in maniera che i lati ST , PO risultino paralleli ad ED e FL , ma giacciono da banda opposta a questi rispetto alla congiungente i centri delle sezioni circolari.

I vertici dei pentagoni così costruiti sono quelli del dodecaedro inscritto nella sfera data, come risulta dall'analisi.

PAPPO nota che la costruzione dei quattro cerchi contenenti ciascuno cinque vertici del dodecaedro è uguale a quella dei quattro cerchi contenenti ciascuno tre vertici dell'icosaedro e che quindi lo stesso cerchio è circoscritto ai pentagoni del dodecaedro e ai triangoli dell'icosaedro inscritti nella stessa sfera.

Ricordiamo infine una relazione metrica che torna utile nella rappresentazione del dodecaedro e dell'icosaedro col metodo di Monge: Ricorrendo alle XIII, 10, si può dimostrare che i piani $ABCDE$, $RSTUV$, che contengono due faccie opposte del dodecaedro; distano, rispettivamente, dai piani $FGHKL$, $MNOPQ$ di

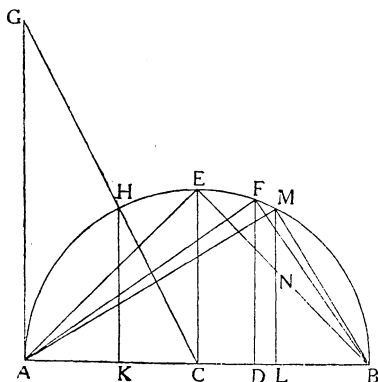
un segmento uguale al lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio circoscritto ad una faccia del dodecaedro, mentre i piani $FGHKL$, $MNOPQ$ hanno una distanza uguale al lato del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio. Per l'osservazione di PAPPÒ riferita sopra, tale proprietà vale anche pei quattro piani che contengono i vertici dell'icosaedro.

18

Trovare i lati delle cinque figure e confrontarli tra loro.

Sia AB il diametro della sfera data, lo si divida in C in modo che AC sia uguale a CB , e in D in modo che AD sia doppio di DB . Descritto su AB il semicerchio AEB , da C e D si innalzino CE , DF perpendicolari ad AB e si conducano AF , FB , EB .

Poichè AD è doppio di DB , allora AB è triplo di DB ; quindi, convertendo, BA è una volta e mezza AD . Ma essendo il triangolo AFB equiangolo col triangolo AFD , BA sta ad AD come il quadrato di BA sta al qua-



drato di AF (V, term. 9; VI, 8), quindi il quadrato di BA è una volta e mezza il quadrato di AF .

Anche il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezza il quadrato del lato della piramide (XIII, 13), e AB è il diametro della sfera, quindi AF è uguale al lato della piramide.

Ora, AD è doppio di DB , quindi AB è triplo di BD . Ma AB sta a BD come il quadrato di AB sta al quadrato di BF (VI, 8; V. term. 9), quindi il quadrato di AB è triplo del quadrato di BF .

Anche il quadrato del diametro della sfera è triplo del quadrato del lato del cubo (XIII, 15), e AB è il diametro della sfera, quindi BF è il lato del cubo.

Essendo AC uguale a CB , è AB doppio di BC ; ma AB sta a BC come il quadrato di AB sta al quadrato di BE , quindi il quadrato di AB è doppio del quadrato di BE .

Anche il quadrato del diametro della sfera è doppio del quadrato del lato dell'ottaedro (XIII, 14); e AB è il diametro della sfera data, quindi BE è il lato dell'ottaedro.

Dal punto A si conduca AG perpendicolare ad AB , si faccia AG uguale ad AB , si conduca GC e da H si tracci HK perpendicolare ad AB .

Essendo GA uguale ad AB , sarà GA doppio di AC , e poichè GA sta ad AC come HK sta a KC (VI, 4), anche HK è doppio di KC . Dunque il quadrato di HK è quadruplo del quadrato di KC ; e la somma dei quadrati di HK e KC , cioè il quadrato di HC , è cinque volte il

quadrato di KC (I, 47). Ma HC è uguale a CB , quindi il quadrato di BC è cinque volte il quadrato di CK .

E poichè AB è doppio di CB e AD è doppio di BD , il rimanente BD è doppio del rimanente DC . Quindi BC è triplo di CD e il quadrato di BC è nove volte il quadrato di CD . Ma il quadrato di BC è cinque volte il quadrato di CK , quindi il quadrato di CK è maggiore del quadrato di CD e perciò CK è maggiore di CD .

Si prenda CL uguale a CK e da L si conduca LM perpendicolare ad AB e si tracci MB .

Poichè il quadrato di BC è cinque volte il quadrato di CK , e AB è doppio di BC e KL doppio di CK , il quadrato di AB è cinque volte il quadrato di KL .

Anche il quadrato del diametro della sfera è cinque volte il quadrato del raggio del cerchio nel quale è stato costruito l'icosaedro (XIII, 16, coroll.), e AB è il diametro della sfera, quindi KL è il raggio del cerchio sul quale è stato costruito l'icosaedro: KL è il lato dell'esagono inscritto in detto cerchio (IV, 15, coroll.).

Il diametro della sfera è formato dal lato dell'esagono e da due lati del decagono inscritti nello stesso cerchio (XIII, 16, coroll.), quindi, essendo AB il diametro della sfera, KL il lato dell'esagono e AK uguale a LB , ciascuna delle rette AK , LB è il lato del decagono inscritto nel cerchio sul quale è stato costruito l'icosaedro.

Essendo LB lato del decagono e ML quello dell'esagono, poichè ML è uguale a KL (essendo uguale anche ad HK e avendo la stessa distanza dal centro) e ciascuna delle rette HK , KL è doppia di KC , si ha che MB è il

lato del pentagono (XIII, 10). Ma il lato del pentagono è il lato dell'icosaedro, (XIII, 16), quindi MB è il lato dell'icosaedro.

Poichè FB è il lato del cubo, lo si divida in N in media ed estrema ragione ed NB sia la parte maggiore; NB è allora il lato del dodecaedro (XIII, 17, coroll.).

Si è dimostrato che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezza il quadrato del lato AF della piramide, è doppio del quadrato del lato BE dell'ottaedro e triplo del quadrato del lato FB del cubo, quindi di quelle parti di cui il quadrato del diametro della sfera ne contiene sei, il quadrato del lato della piramide ne conterrà quattro, il quadrato del lato dell'ottaedro tre, e il quadrato del lato del cubo due.

Il quadrato del lato della piramide è quindi quattro terzi del quadrato del lato dell'ottaedro e il doppio del quadrato del lato del cubo; e il quadrato del lato dell'ottaedro è una volta e mezzo il quadrato del lato del cubo. I suddetti lati delle tre figure, cioè della piramide, dell'ottaedro e del cubo, sono quindi tra loro in rapporto razionale.

I due rimanenti, cioè il lato dell'icosaedro e il lato del dodecaedro, non sono tra loro in rapporto razionale come accade per i lati precedenti, poichè sono, uno, l'irrazionale minore (XIII, 16) e l'altro un'apotome (XIII, 17).

Che il lato MB dell'icosaedro sia maggiore del lato NB del dodecaedro, lo possiamo dimostrare così: essendo il triangolo FDB equiangolo col triangolo FAB (VI, 8), si ha che DB sta a BF come BF sta a BA (VI, 4), e, se tre rette sono proporzionali, la prima sta alla terza

come il quadrato della prima sta al quadrato della seconda (V, term. 9; VI, 20, coroll.), quindi DB sta a BA come il quadrato di DB sta al quadrato di BF , e, inversamente, AB sta a BD come il quadrato di FB sta al quadrato di BD . Ma AB è triplo di BD , quindi il quadrato di FB è triplo di quello di BD . Poichè AD è doppio di DB , il quadrato di AD è quadruplo del quadrato di DB , quindi il quadrato di AD è maggiore del quadrato di FB ; allora AD è maggiore di FB e a maggiore ragione AL è maggiore di FB . Ma KL è la parte maggiore di AL diviso in media ed estrema ragione, essendo LK lato dell'esagono e KA lato del decagono (XIII, 9), ed NB è la parte maggiore di FB diviso in media ed estrema ragione, quindi KL è maggiore di NB . Ma KL è uguale ad LM , quindi LM è maggiore di NB .

Dunque MB , che è il lato dell'icosaedro è, a maggior ragione, maggiore di NB che è il lato del dodecaedro,
c. d. d.

Ora dico che *non si può costruire nessuna altra figura solida, oltre alle cinque suddette, racchiusa da poligoni equilateri ed equiangoli uguali tra loro.*

Infatti, un angolo solido non si può costruire con due triangoli, o con altre due figure piane (XI, term. 11). Con tre triangoli si costruisce l'angolo della piramide, con quattro quello dell'ottaedro e con cinque quello dell'icosaedro. Con sei triangoli equilateri ed equiangoli, congiunti nello stesso punto, non si può formare un angolo solido, perchè l'angolo del triangolo equilatero vale due terzi del-

l'angolo retto e sei sono uguali a quattro retti; di qui l'impossibilità, poichè ogni angolo solido è racchiuso da angoli la cui somma è minore di quattro angoli retti (XI, 21). Per la stessa ragione non si può costruire un angolo solido con più di sei angoli piani.

L'angolo del cubo è racchiuso da tre quadrati, ma con quattro è impossibile racchiudere un angolo solido, poichè si hanno di nuovo quattro retti.

L'angolo del dodecaedro è racchiuso da tre pentagoni equilateri ed equiangoli, ma con quattro è impossibile formare un angolo solido, poichè l'angolo del pentagono equilatero vale un angolo retto e un quinto, i quattro angoli valgono dunque più di quattro retti: quindi è impossibile.

Per la stessa ragione non si possono avere angoli solidi racchiusi da altre figure poligonali.

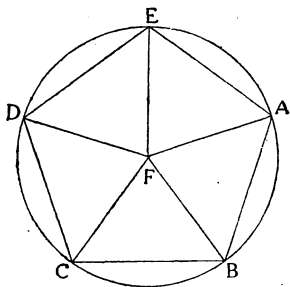
Dunque non si può costruire nessuna altra figura solida, oltre alle cinque suddette, racchiusa da figure equilatero ed equiangole, c. d. d.

LEMMA

Che l'angolo del pentagono equilatero ed equiangolo valga un angolo retto ed un quinto si può dimostrare così:

Sia $ABCDE$ un pentagono equilatero ed equiangolo e $ABCDE$ il cerchio circoscritto ad esso. Preso il centro F (III, 1), si conducano FA, FB, FC, FD, FE . Queste bisecano gli angoli in A, B, C, D, E del pentagono. Gli angoli in F sono uguali ed insieme uguali a quattro retti, quindi ciascuno di essi, come l'angolo AFB , è uguale ad

un retto meno un quinto; allora i rimanenti angoli FAB , ABF sono insieme uguali ad un angolo retto e un quinto (I, 32).



Ma l'angolo FAB è uguale all'angolo FBC , dunque tutto l'angolo ABC del pentagono è un angolo retto e un quinto,

c. d. d.

EUCLIDE presenta i lati di tutti i poliedri regolari in una sola figura e i risultati che consegue si possono riassumere, come si è già visto nelle note precedenti, in linguaggio algebrico, colle formole

$$\text{lato del tetraedro} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r,$$

$$\text{lato dell'ottaedro} = \sqrt{2} r,$$

$$\text{lato del cubo} = \frac{2}{\sqrt{3}} r,$$

$$\text{lato dell'icosaedro} = \frac{r}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})},$$

$$\text{lato del dodecaedro} = \frac{r}{3} (\sqrt{15} - \sqrt{3}),$$

ove r è il raggio della sfera in cui i poliedri sono inscritti.

Inoltre EUCLIDE mostra che, indicando con t , o , c rispettivamente i lati del tetraedro, dell'ottaedro e del cubo inscritti nella sfera di diametro d ,

$$d^2 = \frac{3}{2} t^2 = 2o^2 = 3c^2,$$

ossia

$$d^2 : t^2 : o^2 : c^2 = 6 : 4 : 3 : 2.$$

Da ultimo dimostra che il lato dell'icosaedro è maggiore del lato del dodecaedro.

Uno scolio al XII libro degli *Elementi* ⁽¹⁾ asserisce: « In questo libro si costruiscono i cosiddetti cinque corpi platonici, i quali però non sono dovuti a PLATONE, poichè tre di essi (il cubo, la piramide e il dodecaedro) sono dovuti ai Pitagorici e l'ottaedro e l'icosaedro a TEETETO ».

Ora è certo che il cubo, il tetraedro, l'ottaedro erano noti agli Egiziani, mentre si sono rintracciati esemplari di dodecaedri di bronzo, o altra materia, risalenti ad epoca anteriore a PITAGORA: i pitagorici non scoprirono certamente i detti poliedri, ma dovettero occuparsi della costruzione razionale di essi.

TEETETO scrisse un'opera sui poliedri, forse la prima sull'argomento, che non è giunta a noi. Anche ARISTEO avrebbe scritto sopra il confronto dei poliedri regolari, argomento trattato, circa un secolo dopo, da IPSICLE la cui opera si trova comunemente inclusa nelle edizioni degli *Elementi* come libro XIV (Cfr. Appendice). Come IPSICLE anche APOLLONIO avrebbe trattato del confronto del dodecaedro coll'icosaedro inscritti nella medesima sfera.

Nuovi contributi alla teoria dei poliedri regolari furono apportati da uno o più anonimi (secondo TANNERY ed HEIBERG intorno al VI sec. d. C.): i risultati conseguiti furono riportati da alcuni editori come libro XV degli *Elementi* (Cfr. Appendice). Notevoli tra questi risultati le determinazioni della misura dei diedri dei cinque poliedri regolari.

(1) *Euclidis opera omnia*, ed. HEIBERG, V, pg. 654.

Nel Rinascimento si occuparono in modo particolare dei poliedri regolari: PIERO DELLA FRANCESCA (nel *Libellus de corporibus regularibus*, inserito, senza il nome dell'autore, nella *Divina proportio* (1509) di LUCA PACIOLI), ALBERTO DÜRER, il quale espose come si potevano costruire materialmente i cinque poliedri regolari: costruzioni queste che si trovano riportate in quasi tutti i trattati di geometria elementare, specialmente pratica od intuitiva.

Come ci riferisce PAPP0 (*Collezioni*, lib. I), ARCHIMEDE si occupò della determinazione di quei poliedri che hanno uguali tutti gli angoloidi, ma non tutte le faccie e che vengono detti *poliedri semiregolari*. ARCHIMEDE riuscì a determinare 13 nuovi corpi limitati da poligoni regolari, ma non tutti della stessa specie: tre di essi sono limitati da tre specie di poligoni, tutti gli altri da due specie solamente (cfr. A. MARONI, *Poliedri regolari, semiregolari e simmetrici* in *Period. di mat.*, 3 (1923), p. 292).

Da un punto di vista superiore, la teoria dei poliedri regolari e semiregolari riesce illuminata dalla considerazione dei *gruppi finiti di rotazioni della sfera in sè stessa*. L'analisi di questi gruppi, che corrispondono a gruppi di sostituzioni lineari della variabile complessa, ossia a gruppi (reali, o complessi) di omografie sopra la retta, ha condotto F. KLEIN a cinque tipi di gruppi:

- 1) *gruppo ciclico* Γ_n , cioè gruppo della *piramide regolare*;
- 2) *gruppo diedrico* Γ_{2n} , o della *doppia piramide regolare*, poliedro costituito da due piramidi regolari eguali, unite per le basi;
- 3), 4), 5) *gruppi dei poliedri regolari* Γ_{12} , Γ_{24} , Γ_{60} , relativi al: *tetraedro, ottaedro e cubo, icosaedro e dodecaedro*.

L'ottaedro e il cubo, e similmente l'icosaedro e il dodecaedro, essendo polari l'uno dell'altro rispetto ad una sfera (inscritta o circoscritta), rispondono al medesimo gruppo di 24 e, rispettivamente, di 60 rotazioni. (Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, pg. 206-220).

CLAVIO riporta (Cfr. Appendice) il modo di calcolare il numero degli spigoli e dei vertici dei poliedri regolari: il numero degli spigoli di un poliedro regolare è dato dalla metà del prodotto del

numero delle faccie per il numero dei lati di ciascuna faccia, mentre il numero dei vertici è dato dal prodotto del numero delle faccie del poliedro per il numero dei vertici di ciascuna faccia diviso per il numero delle faccie che concorrono in un vertice.

Si deve ad EULERO (1758) la dimostrazione della relazione, già nota a CARTESIO,

$$V + F = s + 2,$$

ove V è il numero dei vertici di un poliedro, F quello delle faccie ed s il numero degli spigoli.

Per primo L'HUILIER mostrò (1812) che il teorema di CARTESIO-EULERO non è valido per tutti i poliedri ma solo per i poliedri semplicemente connessi (cfr. A. MARONI, *Il teorema di Descartes-Eulero*, in *Period. mat.*, I (1920), p. 337). I poliedri che soddisfano alla relazione suddetta vengono, perciò, detti *poliedri euleriani*.

Tra le varie proprietà dei poliedri euleriani ci limitiamo a ricordare che:

Il numero delle condizioni necessarie per determinare un poliedro euleriano, di una data specie, è uguale al numero dei vertici,

Il numero delle condizioni necessarie affinché due poliedri euleriani della stessa specie siano simili è uguale al numero degli spigoli meno uno.

Per maggiori particolari sui poliedri e sopra le questioni che si riattaccano ad essi, rinviamo il lettore all'art. *I poliedri* di L. BRUSOTTI in *Enciclop. delle mat. el.*, vol. II.

APPENDICE

1. Il contenuto del cosiddetto XIV libro.

La generalità degli editori fa seguire ai tredici libri di EUCLIDE altri due libri (1), che alcuni ritennero di composizione euclidea. Un esame attento del contenuto e della forma mostra però ad evidenza che essi sono da attribuirsi ad autori posteriori (2).

Il cosiddetto libro XIV è dovuto ad IPSICLE, matematico alessandrino che la maggioranza degli storici fa vivere intorno al 150, o 130 a. C.. Scopo principale del libro è la determinazione dei rapporti tra le superficie e tra i volumi dei poliedri regolari inscritti nella stessa sfera, argomento di cui aveva già trattato APOLLONIO in un'opera andata dispersa. Le dimostrazioni sono rigorose e la forma, pur avvicinandosi a quella euclidea, è meno elegante e meno snella di questa. Le varie proposizioni non portano numerazione e sono intercalate con lemmi di geometria piana: noi le riassumeremo qui in termini moderni, numerandole progressivamente per comodità.

Il libro, che è anche notevole per le notizie storiche che contiene, ha inizio col seguente proemio:

« O Protarco, Basilide di Tiro, venendo in Alessandria, « fu raccomandato a mio padre e durante il suo soggiorno ebbe « con lui molte conversazioni causate dal comune interesse verso « le matematiche. Una volta, discutendo insieme sul libro scritto « da APOLLONIO sopra il confronto del dodecaedro e dell'icosaedro « inscritti nella medesima sfera e sulla questione quale sia il rap-

(1) Il testo critico è dato da J. L. HEIBERG in *Euclidis opera omnia - Elementa*, vol. V, Lipsiae 1888.

(2) G. KLUGE, *De Euclidis Elementorum Libris qui feruntur XIV et XV*. Dissertatio, Lipsiae 1891. - G. FRIEDLEIN, *De Hypsicla mathematico*, Bull. di Bibl. (Boncompagni), VI (1873), p. 493.

« porto che intercede tra essi, giudicarono che la trattazione di
 « questa questione fatta da APOLLONIO in quel libro non fosse
 « esatta, e perciò, come mi diceva mio padre, lo emendarono e lo
 « scrissero di nuovo. Più tardi ebbi fra le mani un altro libro pub-
 « blicato da APOLLONIO, che conteneva la dimostrazione esatta
 « della questione suddetta e fui grandemente attratto dalle sue
 « ricerche sul problema. Ora il libro pubblicato da APOLLONIO è
 « accessibile a tutti, ammirevole per la accurata elaborazione. Ciò
 « che ritenni necessario aggiungere ad esso, come commento, ho
 « stabilito di dedicarlo a te, d'una parte perchè competente, a ca-
 « gione della tua conoscenza di tutte le matematiche e specialmente
 « della Geometria, onde avere così un giudizio sicuro su ciò che
 « io scrissi, dall'altra perchè tu accoglierai benevolmente questa
 « mia disquisizione, e per l'amicizia tua verso mio padre e per le
 « tue amichevoli attenzioni verso di me. Ma è ormai tempo di
 « terminare questo preambolo e che dia inizio al mio trattato.

A questa prefazione seguono subito le proposizioni seguenti:

PROP. 1 - *L'apotema del pentagono regolare inscritto in un cerchio è uguale alla semisomma del lato dell'esagono e del lato del decagono inscritti nello stesso cerchio.*

Da questa proposizione e dalla XIII, 12, IPSICLE deduce come corollario che *l'apotema del triangolo equilatero è metà del raggio circoscritto al triangolo.*

PROP. 2 - *Il pentagono del dodecaedro e il triangolo dell'icosaedro, inscritti nella stessa sfera, sono inscrittibili in uno stesso cerchio.*

IPSICLE fornisce qui la seguente notizia storica:

« Ciò è dimostrato da ARISTEO nella sua opera intitolata *Con-*
 « *fronto delle cinque figure.* APOLLONIO, invece, nella seconda
 « edizione della sua opera sul confronto del dodecaedro coll'ico-
 « saedro, dimostra che la superficie del dodecaedro sta a quella
 « dell'icosaedro come il dodecaedro stesso sta all'icosaedro, perchè
 « la perpendicolare condotta dal centro della sfera al pentagono
 « del dodecaedro e al triangolo dell'icosaedro è la stessa ».

La dimostrazione della proposizione è fondata sul lemma seguente:

In un pentagono regolare il quadrato costruito sulla diagonale più il quadrato costruito sul lato è uguale a cinque volte il quadrato costruito sul raggio del cerchio circoscritto al pentagono.

PROP. 3 - *La superficie del dodecaedro è uguale a trenta volte il rettangolo del lato del pentagono del dodecaedro e dell'apotema del pentagono stesso.*

PROP. 4 - *La superficie dell'icosaedro è uguale a trenta volte il rettangolo del lato del triangolo dell'icosaedro e dell'apotema del triangolo stesso.*

La verità di queste due proposizioni è ora di verifica immediata, ed è evidente che da esse segue subito la seguente proprietà:

PROP. 5 - *La superficie del dodecaedro sta a quella dell'icosaedro come il rettangolo del lato del pentagono del dodecaedro e della sua apotema sta al rettangolo del lato del triangolo dell'icosaedro e della sua apotema.*

Da questa proposizione IPSICLE deduce la seguente, ove i poliedri considerati si intendono inscritti nella stessa sfera:

PROP. 6 - *La superficie del dodecaedro sta a quella dell'icosaedro come lo spigolo del cubo sta a quello dell'icosaedro.*

PROP. 7 - *Diviso un segmento qualunque in media ed estrema ragione, il segmento il cui quadrato è uguale alla somma dei quadrati costruiti sul segmento dato e sulla sua parte maggiore, sta al segmento il cui quadrato è uguale alla somma dei quadrati costruiti sul segmento dato e sulla sua parte minore, come lo spigolo del cubo sta allo spigolo dell'icosaedro inscritto nella stessa sfera.*

Assumendo il segmento diviso in media ed estrema ragione come lunghezza unitaria e indicando con x la parte maggiore e con y la parte minore, la proposizione dimostra che

$$\frac{\text{lato esaedro}}{\text{lato icosaedro}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$$

PROP. 8 - *Il lato del cubo sta al lato dell'icosaedro come il volume del dodecaedro sta al volume dell'icosaedro, intendendosi i solidi inscritti nella medesima sfera.*

A questa segue il lemma:

Divisi due segmenti in media ed estrema ragione, il primo segmento sta alla sua parte maggiore, come il secondo segmento sta alla sua parte maggiore.

Chiude il libro un riassunto delle proprietà dimostrate sui poliedri.

Per riassumere i risultati sopra i poliedri regolari contenuti nel XIII libro di EUCLIDE e in questo libro di IPSICLE, indichiamo con l_k , S_k , V_k , R_k rispettivamente lo spigolo, la superficie, il volume e il raggio del cerchio circoscritto del poliedro regolare di k faccie inscritto in una sfera di raggio r .

EUCLIDE ci dà i seguenti risultati

$$l_4 = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad l_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}, \quad l_8 = r\sqrt{2}, \quad l_{12} = 2r\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{12}}.$$

$$l_{20} = 2r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Avendosi poi

$$S_4 = \frac{8r^2}{\sqrt{3}}, \quad S_6 = 8r^2, \quad S_8 = 4\sqrt{3}r^2,$$

$$S_{12} = 2r^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}, \quad S_{20} = 2r^2\sqrt{3(5-\sqrt{5})},$$

$$V_4 = \frac{8r^3}{9\sqrt{3}}, \quad V_6 = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}, \quad V_8 = \frac{8r^3}{3},$$

$$V_{12} = \frac{4r^3}{3}\sqrt{\frac{5(3+\sqrt{5})}{6}}, \quad V_{20} = \frac{2r^3}{3}\sqrt{2(5+\sqrt{5})},$$

$$R_4 = \frac{2\sqrt{2}r}{3}, \quad R_6 = \sqrt{\frac{2}{3}}r, \quad R_8 = \sqrt{\frac{2}{3}}r,$$

$$R_{12} = \frac{r}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5}}, \quad R_{20} = \frac{r}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5}},$$

si verificano subito le proprietà riferite da IPSICLE :

$$R_{12} = R_{20} \text{ (PROP. 2), } \frac{l_6}{l_{20}} = \frac{S_{12}}{S_{20}} = \frac{V_{12}}{V_{20}} \text{ (PROP. 6, 8),}$$

e si deduce inoltre che sussistono anche le seguenti proprietà :

$$R_6 = R_8, \quad \frac{l_4}{l_8} = \frac{S_6}{S_8}, \quad \frac{S_4}{S_6} = \frac{V_6}{V_8}.$$

che non sappiamo se erano note ai matematici Greci.

2. Il contenuto del cosiddetto XV libro

Il libro che veniva riportato come XV è di gran lunga inferiore al cosiddetto XIV libro per importanza del contenuto e per la forma spesso incompleta e talvolta errata. Tale libro fu ritenuto da molti come opera di IPSICLE, ma i difetti accennati, insieme allo stile e alle forme linguistiche diverse, mostrano l'erroneità di tale attribuzione, dovuta, più che altro, alla affinità degli argomenti trattati. Minuti studi filologici ⁽¹⁾ hanno poi condotto alla convinzione che le tre parti, nelle quali si può dividere il libro, secondo l'argomento trattato, sono state composte in epoche diverse non ben precisate che vanno dal I sec. a. C. al VI sec. d. C.

La *prima parte* riguarda la iscrizione dei poliedri regolari in altri poliedri regolari. In essa sono risolti i problemi dell'iscrizione del tetraedro regolare, del cubo, dell'ottaedro, del cubo, del dodecaedro regolare rispettivamente in un cubo, in un ottaedro, in un cubo, in un ottaedro, in un icosaedro regolare; intendendo che un solido è iscritto in un altro quando i vertici del primo stanno sulle faccie, o sugli spigoli del secondo.

La parola iscrizione va quindi intesa qui in modo diverso, caso per caso; e poichè il redattore enuncia le questioni sotto forma di problema, questi era logicamente più esatto se enunciava

(1) G. KLUGE, op. cit.

le questioni risolte sotto forma di teoremi, trattandosi di riconoscere che:

I punti di mezzo degli spigoli di un ottaedro sono i vertici di un cubo;

I centri delle faccie di un cubo sono i vertici di un ottaedro regolare;

I centri delle faccie di un ottaedro regolare sono i vertici di un cubo;

I centri delle faccie di un icosaedro sono i vertici di un dodecaedro regolare.

Nella *seconda parte* del libro si determina il numero degli spigoli e delle faccie dei poliedri regolari.

Il calcolo è fatto solo per l'icosaedro e il dodecaedro, ma è enunciata una regola generale che permette il calcolo anche per gli altri poliedri: il numero degli spigoli di un poliedro regolare è dato dal semiprodotto del numero delle faccie del poliedro pel numero dei lati di ogni faccia, mentre il numero dei vertici si ottiene dividendo il prodotto del numero delle faccie del poliedro e del numero dei vertici di ogni faccia, pel numero delle faccie che formano l'angolo solido di un vertice del poliedro considerato.

La *terza parte* tratta della determinazione del rettilineo dei diedri di ciascun poliedro regolare.

Le costruzioni indicate per ottenere i rettilinei dei diedri dei singoli poliedri (escluso il cubo i cui diedri sono retti) si possono riassumere come segue:

Per il tetraedro, si congiunga il punto di mezzo di uno spigolo con gli estremi dello spigolo opposto;

Per l'ottaedro, si congiunga il punto di mezzo di uno spigolo coi vertici dell'ottaedro che non sono opposti ai vertici nei quali termina lo spigolo prescelto;

Per l'icosaedro, si congiunga il punto di mezzo di uno spigolo coi vertici opposti ad esso, appartenenti alle faccie che hanno quello spigolo in comune;

Pel dodecaedro, si congiunga il punto di mezzo di uno spigolo coi punti di mezzo delle diagonali parallele a detto spigolo e appar-

tenenti alle faccie che hanno quello spigolo comune (una costruzione più semplice di quella indicata si ha congiungendo il punto di mezzo di uno spigolo coi vertici opposti delle faccie che hanno quello spigolo in comune).

Il compilatore di questa terza parte si dice debitore di queste costruzioni (quasi tutte fondate sulla proprietà delle mediane di un triangolo equilatero di essere anche altezze) al suo maestro ISIDORO che si vuole individuare con ISIDORO di Mileto (VI sec. d. C.), l'architetto della chiesa di S. Sofia a Costantinopoli ⁽¹⁾.

(1) P. TANNERY, *Mémoires scientifiques*, I, Paris 1912, p. 64.

INDICE DEGLI AUTORI

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
ABOUL WAFÀ			AMIOT		
IV prop. 16	I	314	I prop. 26	I	99
XI introd.	IV	63	VI » 2	II	84
ABEL			XI » 26	IV	102
X introd.	III	13	XII » 2	IV	161
(v. Ruffini-Abel)			ANARIZIO		
ABU'L DSCHUD			Introduzione	I	19
IV prop. 16	I	316	I prop. 6	I	63
AGATARCO			I » 10	I	71
XI introd.	IV	9	I prop. 34	I	112
AGNESI			I » 48	I	138
IV prop. 16	I	318	II » 1	I	149
AGOSTINI			III » 22	I	234
IV prop. 16 (n)	I	315	IV » 1	I	268
XI » 35	IV	133	IV » 3	I	273
XII » 35	IV	168	VII » 3	II	183
ALBIRUNI			VII » 19	II	215
IV » 16	I	316	X introd.	III	11
AMALDI U.			X prop. 2	III	28
I term. 4	I	30	ANASSAGORA		
I » 7	I	32	Introduzione	I	15
I » 8-9	I	34-35	XI introd.	IV	9
I noz. com. 1-8	I	50	ANASSIMANDRO		
I princ.	I	51	Introduzione	I	14
I prop. 36	I	117	I term. 10-14	I	36
VI » 31	II	160	II » 2	I	145
XI » 1	IV	41	ANASSIMENE		
(v. Enriques-Amaldi)			Introduzione	I	14
			II term. 2	I	145

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
ANSELMO D'AOSTA			ARCHIMEDE		
I postulati	I	43	X prop. 1	III	21-22
APASTAMBA			XI introd.	IV	13
I prop. 48	I	136	XII prop. 2	IV	149-50
APOLLONIO			XII » 2	IV	154-55
Introduzione	I	15-20	XII » 2	IV	157-63
I term. 4	I	30	XII » 2	IV	166
I » 8-9	I	33	XII » 7	IV	182-83
I noz. com. 1-8	I	49	XII » 10	IV	199
I prop. 10	I	70	XII » 10	IV	200-203
I » 23	I	90	XII » 18	IV	231-239
I » 44	I	128	XIII » 18	IV	314
III » 17	I	226	(v. Eudosso-Archimede)		
IV » 1	I	268	ARCHITA DI TARANTO.		
VI » 3	II	90	XI introd.	IV	9
XI introd.	IV	13-14	ARISTEO		
XI term.	IV	31	XI introd.	IV	10-11
XI » 18	IV	35-36	XIII prop. 18	IV	313
XIII » 18	IV	313	Appendice	IV	318
Appendice	IV	317-18	ARISTOTELE		
ARCHIMEDE			Introduzione	I	15
Introduzione	I	15-20	I term. 2	I	29
I term. 4	I	30	I » 3	I	29
I prop. 20	I	86	I » 10-14	I	36
III » 17	I	224	I postulati	I	42
IV » 1	I	268	I noz. com.	I	47
IV » 16	I	314	I prop. 5	I	60
V introd.	II	1	I » 6	I	63
V term. 2	II	7	I » 29	I	104
V » 4	II	9	I » 32	I	109
V » 5	II	14	V term. 2	II	5-6
IX prop. 35	II	350	V » 3	II	8
X introd.	III	7	V » 8	II	17

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
ARISTOTELE			BERTINI		
VII term. 2	II	167	V term. 2	II	7
X introd.	III	4	prop. 18		57
X prop. 1	III	23	BERTOT		
X » 2	III	28	XII prop. 2	IV	161
XI term.	IV	21	BERTRAND		
XI » 14	IV	34	I term. 8-9	I	33
ARMAND			XI introd.	IV	18-19
I term. 8-9	I	33	XI term.	IV	23-24
ARTOM			XI »	IV	31
VI prop. 29	II	151	XI prop. 1	IV	41
ATENEIO			XI » 2	IV	42
I prop. 48	I	135	XI » 4	IV	47
AUGUST			XI » 4	IV	50
II prop. 4 (con.)	I	154	XI » 17	IV	75
AUTOLICO DA PITANE			XI » 18	IV	78
XI introd.	IV	13	XI » 19	IV	80
BALTZER			XI » 26	IV	104
Introduzione	I	24	XII » 7	IV	188
I term. 8-9	I	34	BETTI e BRIOSCHI		
I prop. 26	I	99	VI prop. 16	II	120
III » 13	I	209	XI » 26	IV	100
XII » 2	IV	163	BHÂSKARA		
BAROZZI			I prop. 48	I	139
Introduzione	I	19	IV » 16	I	315
BARROW J.			IV » 16 (n)	I	315
Introduzione	I	22	BIASI		
V introd.	II	2	VI prop. 16	II	119
V prop. 11		44	BIOT		
VII » 18		212	I prop. 48 (n)	I	136
BERNSTEIN			BOEZIO		
I prop. 48	I	139	IX prop. 9	II	313

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
BOLYAI			BORELLI		
I term. 7	I	32	Introduzione	I	22
I post. 5	I	46	I prop. 8	I	68
I princ.	I	51	III term. 1	I	185
I prop. 36	I	116	IV prop. 2	I	271
III » 10	I	206	IV » 3	I	273
XI » 1	IV	41	V term. 5	II	14
BOLZANO			IX prop. 19	II	338
III prop. 16	I	220	XIII » 5	IV	256
BOMBELLI			BORTOLOTTI E.		
II prop. 1	I	148	I term. 22'	I	40
IV » 16	I	317	II prop. 1	I	148
VII » 2	II	181	V term. 3 (n)	II	8
Nota risoluz. equaz. cub. (n)			VII » 2	II	168
	III	333	VII prop. 2	II	181
BOMPIANI			Nota risoluz. equaz. cubiche		
III prop. 36	I	259		III	333
BONCOMPAGNI			BOSONI		
Nota risoluz. equaz cubiche			II prop. 1	I	148
	III	334	BOURLET		
BONNESEN			I term. 23	I	41
Introd.	I	24	BRANDES		
V introd.	II	3	I prop. 48	I	139
V prop. 24	II	70	BRETSCHNEIDER		
X introd.	III	4	I prop. 23	I	90
BONOLA			BRIANCHON		
Introduzione	I	23	III prop. 36	I	259
I post. 5	I	46	BRIOSCHI		
I » 29	I	104	(v. Betti e Brioschi)		
BOREL			BRUSOTTI		
Introduzione	I	24	XII prop. 18	IV	240
I term. 23	I	41	XIII » 18	IV	315

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
BÜR			CAMPANO		
I prop. 48	I	136	XI prop. 23	IV	92
CALÒ B.			XI » 31	IV	118
XII prop. 2	IV	168	XI » 34	IV	127
CAMERER			XIII » 3	IV	252
Introduzione	I	22	XIII » 5	IV	256
CAMPANO			CAMUS		
Introduzione	I	20	XI introd.	IV	19
II prop. 4	I	155	CANDALLA		
III term. 6	I	187	Introduzione	I	21
III prop. 16	I	217	I prop. 4	I	57
III » 35	I	255	II » 7	I	162
IV » 5	I	283	III » 16	I	217
IV » 10	I	294	IV » 16	I	314
V term. 4	II	8	V term. 1	II	5
V » 5	II	13	V » 2	II	6
V » 6	II	16	V » 4	II	8
V prop. 5	II	32	VI » 4	II	78
V » 18	II	57	CANTOR G.		
VI term. 4	II	77	III prop. 16	I	220
VI prop. 31	II	160	V introd.	II	3
VII postul.	II	185	VII term. 2	II	168
VII prop. 2	II	181	VII post.	II	175
VII » 16	II	206	VII prop. 2	II	181
VII » 19	II	215	VII » 16	II	207
IX » 9	II	315	IX » 9	II	314
IX » 16	II	332	X » 1	III	24
IX » 19	II	338	CANTOR M.		
X » 2	III	29	I prop. 48	I	316
X » 9	III	46	I » 48 (n)	I	136
X » 10	III	48	IV » 16	I	314
X » 21	III	73	X » 2	III	26
XI term.	IV	33			

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
CAPELLI			CAVALIERI		
VII prop. 16	II	207	XI introd.	IV	16
CARDANO			XI »	IV	18
III prop. 16	I	217-19	XII prop. 7	IV	182
III » 17	I	225	XII » 7	IV	184
IV » 16	I	316	XII » 7	IV	185
IX » 36	II	356	XII » 18	IV	231
X introd.	III	12	XII » 18	IV	238
Nota risoluz. equaz. cubiche			XII » 18	IV	239
	III	335	CEVA		
CARNOT			III prop. 17	I	226
III prop. 36	I	259	CHASLES		
CARVALLO			VI prop. 4 (n)	II	95
IX prop. 36	II	355	X introd. (n)	III	6
CASSINA			XII prop. 1	IV	145
XII prop. 2	IV	168	CHISINI		
CATALDI			I prop. 37	I	119
Introduzione	I	21	XII » 2	IV	150
I term. 23	I	40	XII » 2	IV	167
V » 3	II	8	(vedi Enriques-Chisini)		
VII prop. 2	II	181	CHÓU		
X introd.	III	12	I prop. 48	I	136
X prop. 3	III	32	CHRISTENSEN		
CATTANEO NOVARESE			X introd.	III	13
I term. 22	I	40	CIERMANS		
CAUCHY			XI prop. 4	IV	47
III prop. 16	I	219	CLAIRAUT		
VII term. 19	II	173	Introduzione	I	24
XI introd.	IV	19	XI introd.	IV	17
XI term.	IV	29	XI »	IV	19
XI »	IV	30	XI term.	IV	32
XI prop. 4	IV	49	XII prop. 7	IV	185

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
CLAVIO			CLAVIO		
Introduzione (n)	I	20	X prop. 23	III	81
»	I	21	X » 31	III	105
I prop. 8	I	68	X » 66	III	204
I » 26	I	96	XI » 1	IV	40
II » 5	I	157	XI » 9	IV	60
II » 13	I	179	XI » 13	IV	68
III » 16	I 217-19		XI » 14	IV	69
III » 17	I 222-25		XI » 16	IV	74
III » 21	I	232	XI » 20	IV	82
IV » 1	I	269	XI » 21	IV	83
IV » 5	I	283	XI » 22	IV	86
IV » 9	I	291	XI » 25	IV	98
IV » 11	I	299	XI » 28	IV	107
IV » 16	I	313	XI » 29	IV	111
V term. 3	II	7	XI » 30	IV	113
V prop. 18	II	57	XI » 31	IV	118
VI » 1	II	81	XI » 34	IV	127
VI » 3	II	91	XI » 34	IV	128
VI » 11	II	107	XI » 36	IV	136
VI » 18	II	128	XII » 2	IV	180
VI » 20	II	134	XII » 10	IV	199
VI » 23	II	139	XII » 17	IV	227
VI » 26	II	144	XIII » 3	IV	252
VI » 31	II	160	XIII » 4	IV	254
IX » 19	III	338	XIII » 5	IV	256
X » 1	III	24	XIII » 9	IV	264
X » 9	III	46	XIII » 18	IV	314
X » 10	III	47			
X » 11	III	49	CLIFFORD		
X » 16	III	59	I term. 23	I	41
X » 20	III	71	COMBEROUSSE		
X » 21	III	74	(v. Rouché e Comberousse)		

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
COMMANDINO			COSSALI		
Introd. (n)	I	20-21	X introd.	III	13
II prop. 13	I	179	COURNOT		
IV » 1	I	269	VI prop. 2	II	85
IV » 1	II	81	CRELLE		
IV » 23	II	138	I term. 7	I	32
IX » 15	II	330	I prop. 26	I	99
IX » 19	II	338	III » 17	I	227
X » 5	III	36	CREMONA		
X » 19	III	69	Introduzione	I	24
X » 21	III	74	I prop. 26	I	99
X » 25	III	85	CURTZE		
X » 38	III	124	Introduzione	I	20
X » 72	III	221	D'ALEMBERT		
XI term. 24	IV	37	XI introd.	IV	18
XI prop. 9	IV	60	DEAHNA		
XI » 13	IV	68	I term. 7	I	32
XI » 14	IV	69	DE BOUVELLES		
XI » 22'	IV	86	I term. 8-9	I	35
XI » 23	IV	94	DECHALES		
XI » 25	IV	98	Introduzione	I	22
XI » 34	IV	127	DEDEKIND		
XII » 2	IV	180	V introd.	II	3
XII » 10	IV	199	V term. 5	II	12
XIII » 1	IV	246	VII » 2	II	168
XIII » 2	IV	250	VII post.	II	175
XIII » 3	IV	252	VII prop. 16	II	208
XIII » 9	IV	264	IX » 9	I	314
CONTI			X introduz.	III	5-7-12
I prop. 9	I	69	DE LA HIRE		
V term. 5	II	12	III prop. 17	I	223
X introd.	III	12	VI » 3	II	91

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
DAL FERRO			DESARGUES		
Nota risoluz. equaz. cubiche			VI prop. 30	II	159
	III	335	DESCARTES		
DELLA FRANCESCA			I postulati	I	43
XIII prop. 18	IV	314	IX prop. 36	II	355
DEMOCRITO			XII » 2	IV	167
Introduzione	I	15	XIII » 18	IV	315
I term. 10-14	I	36	DE ZOLT		
I noz. com.	I	47	I noz. com. 1-8	I	50
III prop. 16	I	216	DICKSON		
X introd.	III	4	IX prop. 36	II	355
XI »	IV	9	DINOSTRATO		
XI »	IV	10	XII prop. 2	IV	158
XI »	IV	16	DIOCLE		
XII prop. 7	IV	182	Introduzione	I	16
XII » 10	IV	199	DIOFANTO		
DE MORGAN			I prop. 18	I	140
I prop. 11	I	73	VII term. 19	II	173
I » 30	I	105	X prop. 17	III	65
III term. 9	I	188	Nota risoluz. equaz. cubiche		
III prop. 2	I	192		III	333
III » 7	I	199	DIOGENE LAERZIO		
III » 8	I	202	I prop. 48	I	135
DE PAOLIS			DIRICHLET		
Introduzione	I	24	VII prop. 16	II	206
IV prop. 10	I	295	VII » 31	II	232
VI » 30	II	159	DU BOYS REYMOND		
DEPARCIEUX			III prop. 16	I	220
XI prop. 26	IV	102	X » 1	III	24
DESARGUES			DU CHÂTELET, marchesa		
I term. 8-9	I	34	XI introd.	IV	17
VI prop. 4	II	94	DUHAMEL		
VI » 16	II	117	Introduzione	I	23

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
DUHAMEL			ENRIQUES		
I prop. 6	I	64	VII post. 16	II	208
I » 36	I	116	X introd. (n)	III	12
V introd.	II	3	X prop. 1	III	24
XI prop. 31	IV	117	XI introd.	IV	19
DÜRER			XII prop. 1	IV	145
IV prop. 16	I	314	XII » 2	IV	150
XIII » 18	IV	314	XII » 2	IV	168
ENOPIDE DI CHIO			XII » 7	IV	182
I prop. 12	I	75	XIII » 1	IV	246
I » 23	I	90	ENRIQUES-AMALDI		
ENRIQUES			Introduzione	I	24
Introduz. (n)	I	17	I princip.	I	50
Introduzione	I	24	I prop. 9	I	69
I term.	I	27	I » 10	I	71
I » 7	I	32	I » 11	I	74
I » 23	I	41	I » 12	I	76
I nota ai postulati	I	43	III » 17	I	222
I postulati	I	44	V introd. (n)	II	3
I » 5	I	46	V term. 2	II	7
I noz. com.	I	48	VI prop. 2	II	83
I » 1-8	I	49	VI » 4	II	94
I princ.	I	51	VI » 9	II	104
I prop. 6	I	65	XI term.	IV	25
III » 16	I	220	XI »	IV	33
IV prop. 16	I	323	XI prop. 3	IV	45
V introd.	II	3	XI » 9	IV	60
V term. 2	II	6	XI » 18	IV	18
V » 5	II	10	XI » 21	IV	84
VI » 1 (n)	II	76	XI » 26	IV	104
VII » 2	II	168	XII » 2	IV	162
VII » 7 (n)	II	169	XII » 18	IV	234
VII post.	II	176			

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
ENRIQUES-CHISINI			EUDOSSO		
III prop. 36	I	259	I noz. com. (n)	I	48
VII » 3	II	184	I prop. 48	I	137
X » 4	III	34	V introd.	II	2
XIII » 18	IV	314	V term. 2	II	6
EPSTEIN			V » 3	II	7
I prop. 48	I	139	V » 4	II	9
ERATOSTENE			V » 5	II	12
Introduzione	I	16	VI prop. 4	II	94
ERONE			VI » 29	II	155
IV prop. 4	I	277	VII term. 2	II	167
IV » 4 (n)	I	277	X introd.	III	7
IV » 16	I	314	X prop. 1	III	22
VII » 3	II	183	X » 9	III	45
VII » 19	II	215	XI introd.	IV	9
X » 1	III	23	XI »	IV	10
XI introd.	IV	14	XI »	IV	12
XI term.	IV	21	XI »	IV	16
XI »	IV	22	XII prop. 2	IV	149
XI »	IV	26	XII » 2	IV	158
XI »	IV	31	XII » 10	IV	200
XI » 12	IV	32-33	XIII » 1	IV	245-46
XI » 14	IV	34	(v. Eudosso-Archimede)		
XII prop. 18	IV	236	EUDOSSO-ARCHIMEDE		
XIII » 1	IV	246	I prop. 36	I	116
EUDEMO			V term. 4	II	9, 10
I prop. 15	I	79	V » 5	II	15
I » 23	I	90	X introd.	III	8
I » 26	I	96	X prop. 1	III	23
I » 32	I	108	EULERO		
I » 44	I	127	I prop. 48	I	140
EUDOSSO			III » 17	I	226
Introduzione	I	15-17	VII term. 19	II	173

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
EULERO			FIBONACCI LEONARDO (Pisano)		
IX term. 20	II	340	XI term. 13	IV	33
IX » 36	II	355	XII prop. 18	IV	233
XI term.	IV	30	FILONE		
XII prop. 7	IV	185	I prop. 8	I	68
XIII » 18	IV	315	FINEO ORONZIO		
FAIFO FER			IV prop. 16	I	313
Introduzione	I	24	FINK		
I prop. 43	I	126	III prop. 17	I	222
I » 45	I	130.	FISICHELLA		
VI » 9	II	104	XII prop. 18	IV	238
VII » 16		206	XII » 18	IV	240
XI » 26	IV	102	FLAUTI		
XII » 2	IV	162	Introduzione	I	22
FERMAT			I term. 8-9	I	32
I prop. 48	I	140	I prop. 7	I	66
VII term. 19	II	173	II » 13	I	179
IX prop. 35	II	350	FOURIER		
IX » 36	II	356	I term. 7	I	32
X » 17	III	65	FRAJESE		
FERRARI			XI introd.	IV	19
IV prop. 16	I	317	XI term.	IV	27
FIBONACCI LEONARDO (Pisano)			XI prop. 26	IV	104
Introduzione	I	20	FRIEDLEIN		
I term. 8-9	I	35	Introduzione	I	19
I » 22'	I	39	X introd.	III	3
I prop. 48	I	139	Appendice	IV	317
V introd.	II	3	GALILEI GALILEO		
IX prop. 35	II	351	III prop. 16	I	218-19
X introd.	III	12	V term. 5	II	12
Nota risoluz. equaz. cubiche	III	333	VI » 4	II	77
XI introd.	IV	15	XII prop. 18	IV	237

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
GAULTIER LA TOUR				GIORDANO NEMORARIO	
III prop. 36	I	259		III prop. 17	I 224
XII » 1	IV	145		IV » 16	I 314
GAUSS				GIORDANO VITALE	
I term. 4	I	30		Introduzione	I 22
I » 7	I	31		I term. 23	I 40
I post. 5	I	46		I prop. 8	I 68
I princip.	I	51		IV » 5	I 282-83
I prop. 48	I	140		IV » 11	I 299
IV » 16		322		V term. 4	II 8
VII term. 19	II	173		VI » 4	II 78
GEMINO				VI prop. 16	II 116
Introduzione	I	16-20		XI » 14	IV 69-71
I post. 5	I	46		XI » 16	IV 74
GERBERTO				XI » 19	IV 79
I term. 8-9	I	33		XI » 20	IV 82
GERGONNE				XI » 22	IV 86
XII prop. 7	IV	185		XI » 30	IV 113
GERWIEN				XI » 34	IV 128
I prop. 36	I	116		XII » 2	IV 180
GHERARDO DA CREMONA				XIII » 1	IV 246
Introduzione	I	19		XIII » 4	IV 254
V »	II	3		XIII » 5	IV 256
GIAMBILICO				GIOVANNI DA PALERMO (Pa-	
VII term. 2	II	167		normita)	
VII » 10	II	170		X introd.	III 12
IX prop. 9	II	313		Nota risoluz. equaz. cubiche	
IX » 36	II	355			III 334
GIGLI				GIRARD	
Nota risoluz. equaz. cubiche				I prop. 48	I 141
	III	335		GLORIOSI	
GIORDANO NEMORARIO				III prop. 16	I 218
III prop. 16	I	216			

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
GÖPEL			HEATH		
I prop. 48	I	138	I prop. 11	I	73
GRANDI			I » 25	I	93
XI prop. 1	IV	40	I » 48	I	140
GRASSMANN			II » 2	I	150
V term. 2	II	7	II » 9	I	168
VI prop. 16	II	116	III term. 3	I	186
VII term. 2	II	168	III » 7	I	187
VII prop. 16	II	208	III » 9	I	188
X » 1	III	23	III prop. 7	I	199
GREGORIO DI S. VINCENT			III » 16	I	216
III prop. 17	I	223	IV » 11	I	300
GREGORY			V » 3	II	27
Introduzione	I	22	V » 9	II	40
IV prop. 11 (n)	I	297	V » 18	II	57
XII » 2	IV	167	V » 20	II	60
GUARDUCCI			V » 21	II	63
I prop. 4	I	58	VI » 3	II	89
VI term. 1	II	76	VI » 15	II	112
HACKS			VI » 16	II	121
IX prop. 20	II	340	VI » 22	II	137
HADAMARD			VII » 14	II	202
Introduzione	I	24	VII » 15	II	204
HALSTED			VII » 19	II	214
Introduzione	I	24	VII » 33	II	236
XII prop. 18	IV	238	X introd.	III	13
XII » 18	IV	240	X prop. 5	III	35
HEATH			XI » 3	IV	45
Introduzione	I	23	XI » 4	IV	48
I term. 4	I	30	XI » 35	IV	132
I » 8-9	I	33	XII » 2	IV	158
I prop. 5	I	60	XII » 7	IV	182
I » 6	I	63	XII » 8	IV	191

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
HEATH			HELMHOLTZ		
XIII prop. 6	IV	258	VII prop. 16	II	208
XIII » 13	IV	278	HILBERT		
HEIBERG			I prop. 4	I	58
Introduzione	I	17-19	I » 9	I	69
IV prop. 3 (n)	I	274	I » 10	I	71
IV » 5	I	283	VI term. 1	II	76
IV » 15	I	310	HOBBS		
V term. 5	II	13	I postulati	I	44
V » 13	II	19	HOPPE		
V prop. 3	II	27	VI prop. 16	II	117
V » 7	II	36	HOÜEL		
VII » 14	II	202	Introduzione	I	23
VII » 19	II	214	I prop. 6	I	64
VII » 27	II	226	HUYGENS		
VII » 33	II	236	IV prop. 16	I	318
X » 115	III	331	XII » 2	IV	163
XI introd.	IV	15	XII » 2	IV	165-66
XI term.	IV	31	IPPARCO		
XI prop. 7	IV	56	Introduzione	I	16
XI » 20	IV	82	IV prop. 16	I	314
XI » 22	IV	86	IPPASO		
XI » 24	IV	96	X introd.	III	3
XI » 33	IV	122	IPPOCRATE DI CHIO		
XI » 34	IV	127	I noz. com. (n.)	I	47
XI » 34	IV	128	III prop. 20	I	231
XII » 12	IV	214	IV » 1	I	268
XII » 18	IV	238	VI » 31	II	160
XIII » 1	IV	246	X » 1	III	23
XIII » 18	IV	313	XII » 2	IV	149
Appendice	IV	317	IPSICLE		
HELMHOLTZ			Introduzione (n)	I	17
I noz. com. 18	I	49	IV prop. 11	I	299

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
IPSICLE			LEGENDRE		
XI introd.	IV	14	Introduzione	I	24
XIII prop. 18	IV	313	I term. 4	I	30
Appendice	IV	317	I » 22	I	39
»	IV	318-21	I post. 5	I	46
ISIDORO DI MILETO			I prop. 8	I	68
Appendice	IV	323	» 17	I	83
JUNGE			I » 20	I	86
I term. 8-9	I	35	I » 22	I	89
III prop. 17	I	223	I » 26	I	96
KEPLERO			I » 26	I	99
IV prop. 16	I	317	I » 32	I	108
KLEIN			III » 10	I	206
I term. 23	I	41	III » 13	I	209
I prop. 48	I	141	VI » 2	II	84
VI » 29	II	156	VII term. 19	II	173
X introd.	III	13	XI introd.	IV	18
XIII prop. 18	IV	314	XI »	IV	19
KLUGE			XI term.	IV	24
Appendice	IV	317	XI »	IV	27-29
KRONECKER			XI » 11	IV	32
VII prop. 16	II	208	XI prop. 2	IV	42
LACROIX			XI » 3	IV	44
I term. 8-9	I	34	XI » 4	IV	49
LAMBERT			XI » 4	IV	50-51
X prop. 2	III	27	XI » 6	IV	55
XII » 2	IV	168	XI » 8	IV	59
LEBESGUE			XI » 9	IV	60
IX prop. 36	II	355	XI » 17	IV	75
LECCHI			XI » 19	IV	80
VI introd.	IV	17	XI » 21	IV	83
			XI » 26	IV	100-03
			XI » 28	IV	107

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
LEGENDRE			LINDEMANN		
XI prop. 35	IV	132	X prop. 2	III	27
XII » 2	IV	152-53	XII prop. 2	IV	168
XII » 2	IV	159	LOBATCHEFSKY		
XII » 2	IV	163	I term. 7	I	32
XII » 7	IV	188	I post. 5	I	46
XII » 15	IV	219	XI prop. 1	IV	41
LEHMUS			LOCKE		
III prop. 17	I	227	I noz. com. 1-8	I	49
LEIBNIZ			LORIA		
I term. 4	I	30	Introduzione	I	23-24
I » 8-9	I	35	IV prop. 1 (n.)	I	268
I postulati	I	44	VI » 2	II	85
I noz. com. 1-8	I	49	XI introd.	IV	12
III prop. 16	I	220	LUCA VALERIO		
III » 17	I	223	XI introd.	IV	15
LEONARDO DA VINCI			XII prop. 18	IV	237-39
I prop. 36	I	115	MAGNUS		
I » 48	I	139	III prop. 17	I	226
IV » 16	I	314	MARCELLO		
LEONARDO PISANO (v. Fibonacchi)			XII prop. 18	IV	231
LEONE			MARIANI		
I noz. com. (n)	I	48	IV prop. 16	I	314
VI prop. 27 (n.)	II	145	MARONI		
LEUCIPPO			XIII prop. 18	IV	314
Introduzione	I	15	XIII » 18	IV	315
L'HUILIER			MAUROLICO		
XIII prop. 18	IV	315	II prop. 5	I	157
LIETZMANN			II » 6	I	159
I prop. 48	I	138-39	II » 7	I	162
			VII postul.	II	175
			IX prop. 9	II	313
			XI introd.	IV	16

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
MAUROLICO			NASIR EDDIN		
XI introd.	IV	18	XI prop. 26	IV	102
XI term.	IV	26	NATUCCI		
XII prop. 1	IV	145	XI prop. 4	IV	51
XIII » 4	IV	254	XII prop. 7	IV	185
MENECMO			NEOCRIDE		
XI introd.	IV	10	I noz. com. (n)	I	48
MENELAO			NESSELMANN		
I prop. 25	I	93	X introd.	III	13
XI introd.	IV	13	NEWTON		
XI term.	IV	27	III prop. 16	I	219
XI prop. 26	IV	101	V introd.	II	3
MENGE			V term. 5	II	14
Introduzione	I	17-19	NICOLA DA CUSA		
(vedi Heiberg)			XII prop. 2	IV	167
MÉRAY			NICOMACO		
Introduzione	I	24	V term. 8	I	17
I term. 23	I	41	VII » 10	II	170
XI prop. 26	IV	102	VII » 19	II	173
MINKOWSKI			IX prop. 9	II	313
XII prop. 18	IV	239	IX » 36	II	355
XII » 18	IV	240	NICOMEDE		
MÖBIUS			Introduzione	I	16
I term. 8-9	I	34	NOCCO		
I » 8-9	I	35	IX prop. 36	II	355
I » 10-14	I	36	NONIO		
MOIGNO			IV prop. 16	I	313
III prop. 16	I	219	NOTARI		
MONGE			X introd.	III	13
III prop. 36	I	259	OZANAM		
XII » 1	IV	145	Introduzione	I	22
NASIR EDDIN			I prop. 26	I	96
XI introd.	IV	15			

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
PACIOLI LUCA			PARMENIDE		
I term. 22	I	40	I term. 4	I	30
IV prop. 16	I	314	I » 10-14	I	36
X introd.	III	12	I prop. 10	I	71
XIII prop. 18	IV	314	PASCAL		
PAMFILA			VI prop. 16	II	120
III prop. 31	I	246	PASCH		
PAPPO			I princ.	I	51
Introduzione	I	16-19	PEANO		
I prop. 5	I	61	VII term. 2	II	168
I » 6	I	63	VII post.	II	175
I » 34	I	113	VII prop. 12	II	199
III » 17	I	224	VII » 15	II	204
IV » 1	I	269	VII » 16	II	208
VI » 3	II	88	VII » 18	II	212
VI » 4	II	94	VIII » 25	II	296
VI » 16	II	120	IX » 4	II	305
VI » 23	II	138	IX » 5	II	306
X introd.	III	6	IX » 9	II	313
XI »	IV	14	XII » 2	I ✓	160
XI term.	IV	23	PELETIER		
XI prop. 4	IV	50	Introduzione	I	21
XIII » 5	IV	256	I prop. 3	I	55
XIII » 13	IV	278	I » 4	I	57
XIII » 13	IV	279	I » 5	I	61
XIII » 16	IV	293	II » 4	I	155
XIII » 17	IV	302	II » 10	I	172
XIII » 17	IV	305-06	II » 13	I	179
XIII » 18	IV	314	III » 16	I	217
PARMENIDE			III » 17	I	224
Introduzione	I	14	IV » 3	I	273
I term. 1	I	28	IV » 5	I	283
			IV » 9	I	291

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
PELETIER			PLATONE		
IV prop. 10	I	294	I term. 4	I	30
IV » 16	I	312	I » 10-14	I	36
VI » 13	II	109	I postulati	I	42
PEROUSIN			I noz. com.	I	47
IX prop. 36	II	356	IV prop. 9	I	291
PERSEO			X introd.	III	4
Introduzione	I	16	X prop. 1	III	23
PESCARINI RAJOLA			X » 9	III	45
VI prop. 16	II	117	X » 28	III	96
PETRUS RAMUS			(Lemma 2)		
I post. 3	I	45	XI introd.	IV	9-10
III prop. 19	I	230	XI term.	IV	21
PIERI			XI »	IV	31
IX prop. 9	II	316	XIII prop. 1	IV	246
PIERRE DE LA RAMÉE (vedi			XIII » 18	IV	313
« Petrus Ramus »)			PLAYFAIR		
PITAGORA			Introduzione	I	22
Introduzione	I	14	I prop. 30	I	105
I prop. 48	I	135	VI » 16	II	124
I » 48	I	140	PLUTARCO		
IV » 11	I	298	I prop. 48	I	135
V introd.	II	2	VI » 25	II	142
VI » 25	II	142	PODETTI		
VII term. 19	II	172	V term. 5 (n)	II	16
X introd.	III	3	PONCELET		
X prop. 28	III	96	I term. 10-14	I	36
(Lemma 2)			III prop. 36	I	259
XIII prop. 18	IV	313	VI » 4	II	95
PLATONE			XII » 1	IV	145
Introduzione	I	15	PORFIRIO		
» (n.)	I	20	Introduzione	I	19

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
POSIDONIO			PROCLO		
I term. 22	I	39	I prop. 15	I	80
I » 23	I	40	I » 23	I	90
I post. 5	I	46	I » 25	I	93
PRESTET			I » 26	I	96
VII prop. 31	II	233	I » 28	I	102
IX » 36	II	356	I » 30	I	105
PROCISSI			I » 31	I	106
XII prop. 2	IV	162	I » 32	I	108-09
PROCLO			I » 34	I	112-13
Introduzione	I	16-19	I » 36	I	115
I term. 1	I	28	I » 44	I	127
I » 2	I	29	I » 48	I	135
I » 3	I	29	I » 48	I	137-38
I » 4	I	30	I » 48	I	140
I » 8-9	I	34	III » 2	I	192
I » 17	I	38	III » 16	I	216-17
I » 22	I	39	IV » 15	I	310
I » 23	I	40	IV » 16 (n)	I	312
I postulati	I	42	VI » 2	II	85
I post. 5	I	46	VI » 31	II	160
I noz. com.	I	47	X introd.	III	3
I » (n)	I	47	X prop. 1	III	22
I noz. com. 1-8	I	49	XI introd.	IV	13
I prop. 5	I	60-61	XIII prop. 1	IV	245
I » 6	I	63	PROTAGORA		
I » 7	I	66	Introduzione	I	15
I » 8	I	68	RÉTHY		
I » 9	I	69	I prop. 36	I	116
I » 10	I	70-72	REY PASTOR		
I » 11	I	73	VII prop. 16	II	208
I » 12	I	75	RICCARDI		
I » 15	I	79	Introduzione	I	18

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
RICCATI			SANNIA-D'OVIDIO		
III prop. 17	I	226	XI prop. 26	IV	103
ROBERVAL			XII » 2	IV	163
I noz. com. 1-8	I	49	XII » 2	IV	167
ROUCHÉ COMBEROUSSE			SANSONE		
Introduzione	I	24	XII prop. 7	IV	185
XI prop. 26	IV	103	SCARPIS		
XII » 2	IV	167	I prop. 48	I	141
RUFFINI-ABEL			SCHMIDT		
Nota risol. equaz. cubiche			Introduzione	I	19
	III	335	I term. -89	I	34
RUFINI			SCHOPENHAUER		
I prop. 29	I	104	I noz. com. 18	I	50
I » 36	I	115	SCHOOTEN		
V introd. (n)	II	2	Introduzione	I	23
X prop. 1 (n)	III	21	I term. 8-9	I	34
XII » 7	IV	150	IX prop. 36	II	356
XII » 7	IV	182	XII » 2	IV	162
SABBATINI			SCHRÖDER		
III prop. 17	I	227	VII prop. 16	II	207
II » 36	I	259	SCHWAB		
XIII » 1	IV	246	XII prop. 2	IV	161
SACCHERI			XII » 2	IV	167
Introduzione	I	22	SCHWENTER		
I term. 4	I	30	XII prop. 1	IV	145
I » 22	I	39-40	SECLHOFF		
I post. 5	I	46	IX prop. 36	II	356
I prop. 17	I	83	SEGNER		
I » 32	I	108	XI introd.	IV	19
V » 18	II	57	XI term.	IV	27
VI term. 4	II	77	XI prop. 26	IV	101
SALADINI			XI » 28	IV	107
III prop. 17	I	226			

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
SEGNER			SIMSON		
XII prop. 2	IV	166	VI prop. 2	II	83
SESTO EMPIRICO			VI » 3	II	88
I prop. 10	I	72	VI » 9	II	104
SEVERI			VI » 16	II	120
XII prop. 2	IV	159	X » 5	III	36
SIMON			XI introd.	IV	16
Introduzione	I	23-24	XI term.	IV	27-28
I prop. 13	I	77	XI »	IV	30
I » 15	I	80	XI prop. 2	IV	42
III term. 3	I	186	XI » 3	IV	44
SIMPLICIO			XI » 7	IV	56
Introduzione	I	20	XI » 8	IV	59
SIMSON			XI » 20	IV	82
Introduzione	I	22	XI » 23	IV	93-94
I term. 7	I	31	XI » 24	IV	96
I » 8-9	I	32	XI » 25	IV	98
I prop. 7	I	66	XI » 26	IV	100
I » 32	I	109	XI » 26	IV	102
II » 13	I	179	XI » 31	IV	118
II » 14	I	181	XI » 33	IV	122
III term. 1	I	185	XI » 34	IV	127-28
III prop. 1	I	190	XII » 17	IV	227
III » 35	I	255	SNELLIIO		
IV » 4	I	276	XI prop. 26	IV	102
IV » 5	I	282-83	XII » 2	IV	163
V term. 2	II	5	XII » 2	IV	167
V prop. 8	II	39	SOCRATE		
V » 9	II	40	Introduzione	I	15
V » 10	II	42	X introd.	III	5
V » 18	II	57	XI »	IV	9
V » 20	II	60	SPINOZA		
V » 21	II	63	I postulati	I	43

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
STAUDT			TACQUET		
III prop. 31	I	246	XI introd.	IV	15-17
VI » 4	II	95	XI prop. 4	IV	47
XI » 3	IV	45	XII » 2	IV	151
XII » 7	IV	185	XII » 2'	IV	161
STEINER			XII » 7	IV	186
I term. 10-14	I	36	XII » 7	IV	188
III prop. 17	I	226	XII » 10	IV	199
III » 22	I	234	XII » 11	IV	207
XII » 7	IV	185	XII » 12	IV	214
STEVIN			TALETE		
X introd.	III	12	Introduzione	I	14
STIEFEL			I term. 8-9	I	33
X introd.	III	11	I » 17	I	38
X prop. 2	III	30	I prop. 5	I	60
X » 7	III	40	I » 15	I	79
X » 9	III	46	I » 26	I	96
X » 21	III	73	III prop. 31	I	246
X » 23	III	81	VI » 2	II	83
X » 42	III	134	VII term. 2	II	167
X 2 ^a serie di			TANNERY		
definizioni	III	148	I term. 1	I	28
X prop. 54	III	168	I noz. com.	I	47
STOLZ			I prop. 10	I	72
V introd.	II	3	I » 26	I	96
V term. 2	II	7	VII term. 2	II	167
V » 4	II	9	XI introd.	IV	11
X term. 4	III	17	XI »	IV	13
X prop. 1	III	21	XIII prop. 18	IV	313
SYLVESTER			Appendice	IV	323
IX prop. 36	II	355	TARTAGLIA		
			Introduzione	I	21
			I term. 22	I	39-40

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
TARTAGLIA			TEODOSIO		
I prop. 32	I	109	XIII prop. 13	IV	279
IV » 5	I	283	TEONE		
IV » 10	I	294	Introduzione	I	16
IV » 16	I	319	»	I	17
IX » 36	II	356	»	I	19
X introd.	III	12	I prop. 48	I	140
Nota risol. equaz. cubiche			II » 4	I	154
	III	335	II » 13	I	179
XI prop. 14	IV	69	IV » 16 (n)	I	312
XI » 20	IV	80	V term. 13	II	19
XI » 21	IV	83	V prop. 4	II	29
XI » 34	IV	127	V » 7	II	36
XI » 34	IV	128	VI term. 4	II	77
XII » 7	IV	185	VII » 2	II	168
TAYLOR			VII » 10	II	170
IV prop. 11	I	300	VII » 19	I	173
TEETETO			VII prop. 27	II	226
Introduzione	I	15	IX » 35	II	351
»	I	17	X introd.	III	7
X introd.	III	4	XI term.	IV	21
X prop. 9	III	45	XIII prop. 1	IV	246
X » 11	III	49	TEUDIO		
XIII prop. 1	IV	246	I noz. com. (n)	I	48
XIII » 18	IV	313	THIBAUT		
TELLKAMPF			X prop. 2	III	27
III prop. 17	I	222	TODHUNTER		
TEODORO			Introduzione	I	23
X Introd.	II	4	I prop. 6	I	63
X prop. 9	III	45	I » 26	I	99
TEODOSIO			III term. 3	I	186
XI introd.	IV	13	IV prop. 5	I	282
XI term. 14	IV	34			

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
TOGLIATTI			VAILATI		
XII prop. 18	IV	240	I postulati	I	42-43
TOLOMEO			I »	I	44
Introduzione	I	16	VI prop. 16	II	120
I prop. 28	I	102	VI » 30	II	159
IV » 11	I	299	VALERIO MASSIMO		
VI » 16	II	122	Introd. (n)	I	20
X introd.	III	7	VANDERMONDE		
XIII prop. 10	IV	267	IV prop. 16	I	322
XIII » 17	IV	302	VER ECKE		
THOMSON			XI Introd.	IV	13
X introd.	III	6	VERONESE		
TORRICELLI			Introduzione	I	24
I term. 22	I	40	I term. 7	I	32
XII prop. 18	IV	239	I » 8-9	I	34
TROPFKE			I princ.	I	51
Introduzione	I	23	III prop. 16	I	220
I term. 8-9	I	34	X » 1	III	24
III prop. 17	I	222-23	XI term. 11	IV	31
XII » 1	IV	145	VIETA		
XII » 2	IV	166	I post. 3	I	45
TUCIDIDE			III prop. 16	I	218
I prop. 37	I	119	IX » 35	II	350
TURCHETTI			XI » 26	IV	102
XI term.	IV	29	XII » 2	IV	162
VACCA			VITALI		
Introduzione	I	23	I prop. 12	I	75
I prop. 30	I	105	III » 13	I	209
I » 48 (n)	I	136	III » 16	I	220
IX » 9	II	313	V introd.	II	3
Nota risoluz. equaz cubiche	III	333	X prop. 1	III	24
			VIVIANI		
			Introduzione	I	22

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
VIVIANI			ZAPPELLONI		
I prop. 5	I	61	VI prop. 16	II	124
III » 16	I	218	VII term. 2	II	168
V term. 5 (n)	II	13	VII post.	II	176
VOEGELIN			IX prop. 9	II	316
III prop. 17	I	222	IX » 16	II	332
VOGT			Nota risoluz. equaz. cubiche		
X prop. 2	III	26		III	333
WALLIS			ZARISKI		
I post. 5	I	46	VII term. 2	II	168
I prop. 48	I	139	IX prop. 9	II	316
III » 16	I	219	X introd.	III	4
VII » 31	II	232	ZENODORO		
IX » 35	II	351	Introduzione	I	16
XII » 18	IV	233	I prop. 37	I	119
WIPPER			ZENONE		
I prop. 48	I	138	Introduzione	I	14
WOEPCKE			I term. 1	I	28
IV prop. 16 (n)	I	314	I prop. 10	I	71
IV » 16 (n)	I	316	V term. 4	II	9
X introd.	III	6	IX prop. 35	II	350
WOLDEGK WELAND			X prop. 1	III	21
III prop. 17	I	223	XII » 7	IV	182
WOLFF			ZEUTHEN		
Introduzione	I	22	Introduzione	I	23
I prop. 26	I	99	I term. 8-9	I	33
XII » 2	IV	166	I postulati	I	42
ZACHARIAS			I » (n)	I	42
Introduzione	I	24	I post. 4	I	45
ZAMBERTI			I princ.	I	51
Introduzione	I	20	I prop. 26	I	96
III term. 6	I	187	I » 48	I	137
VI » 2	II	76	II » 1	I	148

	Vol.	pag.		Vol.	pag.
ZEUTHEN			ZEUTHEN		
II prop. 9	I	168	VII prop. 4	II	185
II » 14	I	181	VII » 15	II	204
V introd.	II	3	VII » 19	II	214
V term. 3	II	8	VII » 27	II	226
V » 4	II	9	VIII » 2	II	255
V prop. 8	II	39	VIII » 7	II	265
V » 20	II	61	VIII » 17	II	282
V » 24	II	70	X introd.	III	4-6
V » 25	II	71	X prop. 1	III	22
VII term. 4	II	168	X » 3	III	32
VII » 20	II	173	X » 17	III	64

INDICE

PREFAZIONE	Pag. 5
LIBRO XI:	
INTRODUZIONE	» 9
Termini	» 21
Proposizioni	» 39
LIBRO XII:	
Proposizioni	» 143
LIBRO XIII:	
Proposizioni	» 243
APPENDICE	» 317
INDICE DEGLI AUTORI	» 325

18062

