LA GEOMETRIA DIVENTA UNA SCIENZA

Franco Eugeni

Gia Professore Ordinario di discipline matematiche e Filosofia della Scienza

Presidente AFSU

1.- La geometria nella storia

Quando si inizia a ragionare razionalmente, a dimostrare teoremi, ci si accorge che la linea guida cambia e il legame non è più l'osservazione visiva ed intuitiva delle singole figure, ma entrano in gioco lo studio dei legami e delle relazioni che intercorrono tra gli enti della geometria, che in questa seconda linea guida diventano astratte. La geometria diviene una scienza. Del resto chi di noi ha mai visto un punto, una retta, un piano – direi proprio nessuno. Non esiste una frase avente come soggetto la parola "*punto*" e nella quale frase la parte rimanente ne fornisce la definizione! Gli enti di base vanno definiti per via indiretta, mediate l'acquisizione di proprietà che li caratterizzano insegnandoci ad operare con essi.

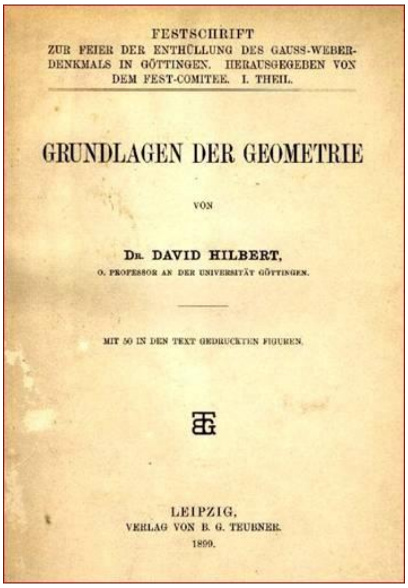
L'idea tanto cara a Platone, per il quale ogni oggetto può essere definito e che una volta definito permetta di proseguire con definizioni e dimostrazioni, nei fatti si rivela una utopia, anzi una impossibilità. Del resto è chiaro che definire un ente significa porlo in relazione con altri oggetti i quali a loro volta vanno definiti ponendoli in relazione con altri oggetti e così via. Io do una definizione: *una circonferenza è il luogo (l'insieme) dei punti del piano che hanno ugual distanza da un punto fisso detto centro*! Ho definito una circonferenza?... SI, se so che vuol dire punto, piano, distanza. In questa definizione (detta *esplicita*) il soggetto prende significato dagli altri termini supposti noti!

Ma definizioni *esplicite* (o dirette) che definiscano *punto retta* e *piano* non ci sono, ci sono solo definizioni per lista di proprietà (o postulati), in sistemi di base, che sono lunghe liste di proprietà assegnate da noi! Queste definizioni si chiamano *implicite* (o indirette). Nel corso dei secoli, il nostro ragionare si è via via affinato, la cultura dell'uomo si è diretta verso l'astratto e lo ha conquistato. Così la definizione di Euclide del 300 a.C. "…*il punto è ciò che non ha parti* …" - *bella, piena di creatività ed intuizione* - e in contemporanea priva di un qualsiasi significato logico-razionale, è stata soppiantata, da David Hilbert (1862-1943) con il suo *Grundlagen der Geometrie* (1889), nel quale assegna un insieme formale, composto da 28 assiomi, che evitano le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche iniziali di Euclide.

Indipendentemente e contemporaneamente a David Hilbert, uno studente statunitense di 19 anni, Robert Lee Moore[1] (1882-1974), pubblicò un insieme di assiomi del tutto equivalenti a quelli di

[1] Moore fu allievo di importanti americani quali Leonard Eugen Dickson ed Oswald Veblen. Conseguì il PhD nel 1905, con una dissertazione intitolata *Sets of Metrical Hypotheses for Geometry*, sotto la supervisione di Veblen. Nel 1923 diviene *full-professor*,nel 1936-38 fu Presidente dell'*American Mathematical Society*. Presentò un metodo didattico denominato **MetodoMoore** ed insegnò fino all'età di 87 anni, anche se visse e continuò a lavorare fino a 92 anni.

Hilbert. Dai Postulati di Hilbert-Moore, nati dalla visione che ebbe a concretizzarsi circa 2.000 anni dopo Euclide, fu sviluppata una lunga serie di confronti di autori italiani di grande valore scientifico e didattico, con una lunga serie di varianti ed osservazioni, che si sono via via sovrapposte l'una all'altre, trattato sopra trattato[2]. Il *punto* nella "moderna visione" dal 1900 è "*un elemento di un insieme astratto* detto "*spazio*", che ha certe sue parti (sottoinsiemi di punti) che si chiamano *rette* ed altre parti che si chiamano *piani,* le quali soddisfano ad un elenco di 28 postulati o proprietà, che implicitamente definiscono i termini *punto – retta – piano – spazio*. Naturalmente va aggiunto che ogni insieme di oggetti, che ha due famiglie di parti, che nel loro complesso soddisfano ai 28 postulati sono uno spazio euclideo.



FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

Dr. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

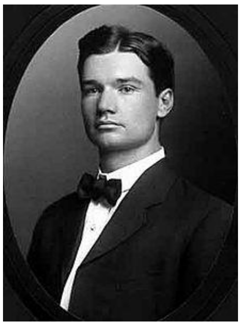
MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Grundlagen der Geometrie(1889)

.

David Hilbert



Robert Lee Moore

Ma due strutture siffatte, per via delle interpretazioni numeriche (geometria analitica dello spazio) che ne evidenzi la struttura soggiacente di spazio vettoriale ci permette di asserire che se due strutture soddisfano i 28 postulati allora sono isomorfe, e ciò si estende anche agli spazi n-dimensionali ma non alle geometrie non euclidee.

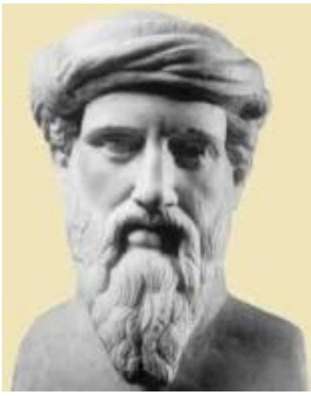
Da dove vengono queste 28 proprietà? Ma naturalmente dal nostro intuito, dal nostro osservare la natura e dal nostro tentare di incapsularla, in una rigida razionalità, o come si suol dire di "formalizzarla". Al tempo di Euclide e per i postulati di Euclide, Aristotile riteneva che essi nascessero per ispirazione divina. Sappiamo bene oggi che siamo noi a sceglierli, che possiamo sostituirli con proposizioni alternative, di fatto con condizioni necessarie e sufficienti, senza modificare la struttura di Euclide, ma anche il con la possibilità di modificarli "ad arte" facendo nascere strutture differenti da quella originale di Euclide. Le costruzioni possono essere fatte in miliardi di modi, ma la storia e i secoli hanno insegnato a scegliere tra tali alternative, poiché alla fine le scelte devono avere un senso, ma anche un riscontro come modelli fisici.

[2] A.Chiellini, R.Giannarelli, *L'esame orale di Matematica*, Roma, Edizioni Veschi, 1962. (Nota che la conoscenza delle varie Teorie sull'eguaglianza erano tematiche presenti nei programmi per i concorsi a Professori di Scuola Media, alla cui preparazione il trattato sopra indicato era dedicato).

Nascono così le geometrie non euclidee: iperboliche oppure ellittiche, le geometrie non archimedee, le banali geometrie non cantoriane, le geometrie finite, i disegni a blocchi. Di ciascuna di queste possono essere forniti tanti modelli. Ad esempio la geometria euclidea ha come modello il sistema cartesiano delle coordinate e ha la peculiarità che comunque io prenda differenti modelli,come del resto precisato sopra, questi sono sostituibili l'uno con l'altro, ovvero come si suole dire *isomorfi*. Non così per le altre. In questo lavoro presentiamo, in dettaglio, un modello di geometria piana iperbolica, denominato modello di Klein, completando dal punto di vista dimostrativo, tanti aspetti quasi sempre sottesi e sottaciuti. In particolare costruiamo i movimenti del modello di Klein che coincidono con le omografie che mutano un cerchiò in sé stesso.

2.- L'indipendenza dei Postulati

E' ben noto il metodo assiomatico per introdurre gli enti della matematica. Uno dei primi problemi che ci si pone è che dato un qualsiasi sistema di postulati definenti una qualunque struttura matematica, occorre che,in primo luogo, sussistano le seguenti due fondamentali proprietà :
a.- I postulati devono essere tra loro indipendenti
b.- I postulati devono essere compatibili o come suole dirsi non-contraddittori.
Il problema posto è nato nel momento nel quale i matematici hanno compreso che alla base di una teoria matematica: postulati, definizioni e teoremi non riflettevano una realtà trascendente, superiore alla mente umana, come si era ritenuto in Platone (428-348 a.C.) ed Aristotile (384-322 a.C.) e da Agostino d'Ippona (354-430). Nella antica visione era escluso a priori il pericolo di incontrare contraddizioni in tutte le conseguenze logiche della "*divina teoria"*, in quanto tutte le proposizioni erano vere in assoluto[3]. Era una certezza!



Euclide

Ma il punto di vista, con l'avvento dei *sistemi ipotetico-deduttivi* brillantemente presentati in un'opera del Pieri[4], è del tutto mutato, in quanto alla base delle teorie matematiche si sono posti dei postulati, che, sia pure rispecchianti, dal punto di vista euristico, delle forme di pensiero intuitivo e degli aspetti percettivi - come piace ricordare a Bertrand Russell - sono dal punto di vista logico, proposizioni totalmente arbitrarie, così che, il garantire una forma di compatibilità diviene di interesse fondamentale.
Naturalmente la causa di questo mutamento nella Storia della Scienza ha chiara origine dalla scoperta delle geometrie non euclidee, e nasce dalla *questione del postulato delle parallele*. Lo stesso Euclide[5] (IV-III sec a.C.), sembra avere dei dubbi su questo postulato, così che, fino a che è possibile, cerca di non farne uso Del postulato delle parallele in realtà egli non parla fino alla prop 26° compresa (che sarebbe il 2° criterio di eguaglianza dei triangoli), egli utilizza il postulato delle parallele, solo nella Prop. 27°, nella seguente forma:

---

[3] cfr. Carruccio [4], par. 2, pg. 315
[4] Mario Pieri, (1898-99), *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, Memorie della R. Acc. delled Scienze di Torino, (2) 49 p.173-222..
[5] cfr. E. Carruccio [4], pg. 76.

"Se una retta cadendo tra due rette, fa gli angoli alterni uguali tra loro, le due rette saranno parallele tra loro".

La questione della non-contraddittorietà è piuttosto complessa, in genere si richiede la costruzione di un modello all'interno di una struttura della quale si ipotizza la non contraddittorietà. Ad esempio la non-contraddittorietà dei postulati delle geometrie non-euclidee, si basa sul fatto che ne costruiamo modelli all'interno della stessa Geometria Euclidea, supposto questa non-contradittoria. Ma si può basare la non contraddittorietà della geometria euclidea, tramite la sua rappresentazione numerica (spazi numerici) e quindi sulla non contraddittorietà del campo dei numeri reali, questi si riporta a sua volta al campo dei numeri razionali, questi all'anello dei numeri interi relativi, questi al semianello dei naturali, questi alla teoria elementare (ingenua?) degli insiemi e su questi un atto di fede? Forse meglio dire una ipotesi di lavoro?

Cadiamo in pieno nello corrente dello scetticismo ed in particolare nel pensiero di Carneade di Cirene (214-129 a.C.), ambasciatore a Roma nel 155°.C., che riteneva impossibile l'arte del dimostrare, poiché secondo lui ne nasceva un processo che dava luogo ad una forma di "*regressum in infinitum*", in quanto ogni proposizione prendeva significato da una precedente altra proposizione. Quindi le verità nelle quali si crede, poste alla base, avevano secondo Carneade, un significato incerto, forse *probabile*[6] .

La *questione dell'indipendenza* è più semplice da trattare. Così se ci poniamo la domanda: "***Il postulato delle parallele è indipendente dagli altri?"*** Si può rispondere nel modo che segue: *Per dimostrare che un postulato P è indipendente da altri postulati, la via maestra da seguire, è quella di costruire degli enti e quindi un modello che, pur soddisfacendo gli altri i postulati, non soddisfino il postulato P.*

Esiste, cioè, un modello di enti che soddisfa a tutti i postulati del sistema e non soddisfa al postulato delle parallele? Ricordiamo, a tal proposito, cosa scrive Luigi Campedelli (1903-1978) in [15], cercando di mediare tra un discorso logico−formale ed un aspetto maggiormente intuitivo.

Luigi Campedelli

La geometria negli studi iniziali era classificata intuitiva e sperimentale. Essa mirava ad una educazione sui concetti fondamentali cercando di coglierli nell'osservazione del mondo circostante, e di leggerli in quel gran libro dell'universo. Più tardi l'esame delle figure, dapprima verificate su modelli materiali, si deve svolgere attraverso argomentazioni di carattere logico, con ragionamenti razionalmente condotti, mediante deduzioni e ricerca di legami tra le varie proprietà. Nasce così la geometria come indagine scientifica.

---

[6] cfr. Carruccio [4], pg. 67