GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Franco Eugeni
Già Professore di filosofia della Scienza
Presidente AFSU

1.- Introduzione.

La revisione della Geometria di Euclide prese le mosse dall'opera di David Hilbert (1862-1943) con il suo *Grundlagen der Geometrie* (1889), dove presentò un insieme formale, composto da 28 assiomi, che evitarono le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche proposte da Euclide. Indipendentemente e contemporaneamente a David Hilbert, come già ricordato in altro paragrafo, Robert Lee Moore[1] (1882-1974), pubblicò un insieme di assiomi equivalenti.

2.- Il metodo Moore

Moore divenne molto famoso come didatta quale inventore di un importante metodo. Il *metodo Moore*, secondo il famoso matematico Paul Richard Halmos[2] (1916-2006), il metodo si può riassumere nella frase "*Il modo migliore per imparare è fare, il modo peggiore per insegnare è parlare*". Si noti che Halmos se da un lato loda il metodo Moore per la didattica, ha, al contrario,una visione differente per il matematico che si occupa di ricerca.

Paul Richard Halmos (1916- 2006) *Robert Lee Moore (1882-1974)*

Per il settore della ricerca Halmos asserisce che: "… *la matematica non è una scienza deduttiva: quando tentiamo di dimostrare un teorema, non è che elenchiamo le ipotesi e poi iniziamo a ragionarci su. Quello che facciamo è una serie di prove ed errori!*

[1] Per notizie su Moore si veda la nota 15.

[2] Halmos fu un matematico ebreo-ungherese, emigrato nel 1929 in USA. Si occupò di molti rami della matematica ed è molto noto per i suoi successi editoriali relativi a testi universitari e di introduzione alla ricerca. Fu molto diffuso in Italia il volume *Teoria elementare degli insiemi* (1981), Milano, Feltrinelli. Il suo *I want to be a Mathematician (1985) è una analisi del* ruolo del matematico nel XX secolo.

In questo Halmos sembra essere molto vicino alle idee del grande epistemologo austriaco Sir Karl Popper (1902-1994), naturalizzato inglese, ben noto per la difesa dell'idea di *società aperta*, contro ogni totalitarismo, per il rifiuto e la critica all'*induzione*, con la sua proposta della *Teoria della falsificabilità*, ad un tempo criterio di demarcazione tra scienza e non scienza. Popperè propugnatore dell'idea che "*una teoria vale fino a che non nasce al suo interno una **falsificazione**"* ovvero un "*fenomeno inspiegato*". La falsificazione o l'errore", conduce a formulare una nuova teoria più generale, che se porta la vecchia teoria ad essere inquadrata nella nuova produce, quello operazione denominata "*salto epistemologico*" come nel caso della nascita delle geometrie non-euclidee e della Teoria della relatività. Afferma Popper: "Ogni qualvolta una teoria ti sembra essere l'unica possibile, prendilo come un segno probabile che non hai capito né la teoria né il problema, che si intendeva risolvere".

Sir Karl Popper

Tornando a Robert Moore e al suo metodo didattico, è abbastanza corretto osservare che in fondo Moore ha insegnato in piena sintonia con il pensiero del grande Socrate (469-399 a.C.), con quella idea notevole del "sapere di non sapere", che era una ignoranza intesa come consapevolezza di una non conoscenza definitiva, che diventa però movente fondamentale del desiderio di conoscere, ed anche segna la nascita di quel peculiare modo di pensare che ha consentito l'origine e lo sviluppo della riflessione astratta e razionale, che sarà il fulcro portante di tutta la successiva filosofia greca. L'avvicinare il metodo Moore ai metodi socratici della Maieutica, appaiono chiaramente nel *Teeteto*, nel quale il suo allievo Platone[3] (428-348 a.C.) riferisce il pensiero del Maestro Socrate:

"La mia arte di maieutico in tutto è simile a quella delle levatrici, ma ne differisce in questo, che essa aiuta a far partorire uomini e non donne e provvede alle anime generanti e non ai corpi. Non solo, ma il significato più grande di questa mia arte è ch'io riesco, mediante di essa, a discernere, con la maggior sicurezza, se la mente del giovane partorisce fantasticheria e menzogna, oppure cosa vitale e vera. E proprio questo io ho in comune colle levatrici: anche io sono sterile, sterile in sapienza; e il rimprovero che già molti mi hanno fatto che io interrogo gli altri, ma non manifesto mai, su nulla, il mio pensiero, è verissimo rimprovero. Io stesso, dunque, non sono affatto sapiente né si è generata in me alcuna scoperta che sia frutto dell'anima mia. Quelli, invece, che entrano in relazione con me, anche se da principio alcuni d'essi si rivelano assolutamente ignoranti, tutti, poi, seguitando a vivere in intima relazione con me, purché il dio lo permetta loro, meravigliosamente progrediscono, com'essi stessi e gli altri ritengono. Ed è chiaro che da me non hanno mai appreso nulla, ma che essi, da sé, molte e belle cose hanno trovato e generato".

Interessante collegare queste idee con quanto scrive[4] Bruno de Finetti (1906-1985) anche rivelando il suo interesse sia per la Maieutica di Socrate che per il pensiero di Luigi Pirandello (1867-1936), del quale adatta la frase seguente: *i nostri concetti* "*non saranno mai i protagonisti di una commedia finita, ove ciascuno ha la sua parte …saranno sempre personaggi in cerca d'autore".* In fondo è esattamente quanto Moore chiede ai suoi studenti. Il loro sistema di apprendimento consisteva nel fatto che essi dimostravano, da loro se stessi, i teoremi che Moore enunciava nel suo corso, magari facendo il *maieutico* sui termini di base del problema presentato e il popperiano sulle teorie. Moore divideva il problema da trattare in una catena di risultati da provare e si limitava solo a spiegare le definizioni necessarie per scoprire le dimostrazioni. Il resto veniva elaborato dagli studenti stessi. I loro corsi erano competitivi perché gli studenti di solito volevano che Moore dirigesse le loro tesi di dottorato. Le prove di ognuno venivano mostrate sulla lavagna e

Bruno de Finetti

[3] Nulla di scritto ci è pervenuto di Socrate, le sue idee furono esposte da Platone, primo ad iniziare regolari scritti sulla filosofia del tempo.

[4] B.de Finetti, (2006) *L'invenzione della verità*, Milano, Raffaello Cortina Editore. Si tratta di un'opera pubblicata postuma con introduzione di Giulio Giorello e Giordano Bruno e una premessa della figlia Fulvia de Finetti, circa il rinvenimento dell'opera inedita.

sottoposte all'esame accurato dei suoi compagni di classe, che cercavano qualsiasi incrinatura nel ragionamento. Moore richiedeva agli studenti di non consultare alcun testo relativo al suo insegnamento in biblioteca. La ragione è ovvia, i testi avrebbero contenuto le prove dei teoremi che gli studenti dovevano elaborare da soli. Per Moore sarebbe stata una sorta di frode accademica. Il metodo di Moore è ancora praticato in molte università in tutto il mondo e diversi testi hanno una concezione didattica simile. Inoltre alcuni insegnanti hanno progettato varianti del metodo per renderlo più cooperativo. Il lettore, ai fini di apprezzare l'enorme impatto che ha avuto Moore come insegnante, vada su: http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=286 .

3.- Gli assiomi di Hilbert-Moore

Sia **S** un insieme astratto non vuoto di oggetti, detti ***"punti"*** che indicheremo con lettere latine maiuscole :

S = { **A,B,C, D, ….** }

siano inoltre **R** e **P ,** due famiglie non vuote di parti (sottoinsiemi) di **S** i cui elementi (cioè le parti) chiameremo rispettivamente ***"rette"*** e "***piani",*** denotate con lettere minuscole le rette e con lettere greche i piani.

R = { **r** ={**A,B, …**} **, s** ={**C,D, ….**}**, ….., t** = { **E,F ,…** } }
P = { α = {**A,B,C, …**} , β = {**D,E,F, …**} , … , γ = {**G,H,L…**} }

Definizione 1. La coppia **(S, R)** ovvero la terna **(S, R, P)** prendono il nome di *spazi geometrici*, con una o più famiglie di blocchi.

Definizione 2. Uno spazio geometrico **(S, R, P)** è detto *spazio euclideo* se soddisfa i seguenti gruppi[5] di assiomi, meglio conosciuti con il nome di *assiomi di Hilbert-Moore*:

I.- *Assiomi di appartenenza*
II.- *Assiomi di ordinamento*
III.- *Assiomi di congruenza*
IV.- *Assioma di continuità*
V.-*Assioma delle parallele*

I.- *Assiomi di appartenenza*

I.a.- *Per due punti distinti passa una ed una sola retta*. **(dovremmo dire**: due distinti elementi di **S** appartengono ad uno ed un sol elemento di **R).**

I.b.- *Ogni retta ha almeno due punti; esistono tre punti non su una retta.*

[5] Alcuni autori elencano solo i cinque assiomi, introdotti anticamente da Euclide. Questa via è interessante anche se lontana dagli scopi di questa nota. Per approfondire lo studio del modello di Klein, da questo punto di vista, si può consultare l'opera: S. Maracchia, (1993) *Dalla Geometria euclidea alla geometria iperbolica: il modello di Klein*, Liguori Ed. e gli interessanti ulteriori aspetti presentati dall'Autore.

I.c.- *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.* (**dovremmo dire**: tre distinti elementi di **S,** non tutti e tre su un elemento di **R,** appartengono ad uno ed un sol elemento di **P).**

Corollario I.1.Ogni piano contiene almeno tre punti, non allineati.
D**imostrazione**. Se ciò non fosse, il piano non conterrebbe tre punti non allineati, contro quanto richiesto da **Ib**.
Corollario I.2. Un piano non può essere contenuto in una retta. **Dimostrazione** ovvia, se una retta contenesse un piano, il piano non conterrebbe tre punti non allineati contro **I.b.**

I.d.- *Se due punti di una retta sono su di un piano, allora la retta appartiene al piano*.

Corollario I.3. Dati una retta ed un punto non appartenentisi è unico il piano che li contiene. (Conseguenza di **Ie.** e **I.d**)
Corollario I.4. Due rette distinte appartenenti ad un piano si incontrano in al più un punto.
Definizione I.5. Due rette distinte che non si incontrano, di un medesimopiano, si dicono *parallele*.
N.B. Nessuna informazione è postulata sull'esistenza e sull'unicità di una parallela.

I.e.- *Se un punto appartiene a due piani distinti allora i due piani hanno almeno un secondo punto in comune.*

Corollario I.6. Una retta, per due punti distinti comuni a due piani distinti piani , appartiene ad entrambi i piani.
Corollario I.7. Due piani distinti, aventi un punto in comune, hanno esattamente una retta in comune.

I.f.- *Esistono quattro punti non su un medesimo piano*.

Corollario I.8. Dati un piano α ed un punto P fuori di esso, una retta r per il punto P interseca il piano in al più un solo punto.
Dimostrazione. La retta r non può incontrare il piano in più di un punto altrimenti la retta apparterrebbe al piano, quindi anche P vi apparterrebbe, contro l'ipotesi.

Definizione I.9. Dati un piano α ed un punto P fuori di esso, una retta r per il punto P che non interseca il piano si chiama una *retta parallela al piano*
Osservazione. Due rette possono essere complanari, allora sono o parallele o incidenti. I.1Se esistono due rette che non appartengono ad uno stesso piano *si diranno sghembe*.
Teorema I.10. Dati un piano α ed un punto P fuori di esso, sia r una retta per P e per un punto Q del piano. Una qualunque retta s del piano α non contenente Q, è sghemba con r.
Dimostrazione. Supponiamo che esista un piano contenente r ed s. Tale piano contenendo Q ed s coincide con α, ma contenendo r, conterrebbe anche P, e ciò è assurdo.

Da notare che una geometria che soddisfa i soli postulati dell'appartenenza può essere anche finita. ***Uno spazio affine su un campo di Galois*** (ad esempio anche sulle classi resto modulo un primo) soddisfano gli assiomi, ma non soddisfano i successivi.

II.- *Assiomi di ordinamento*[6].

[6] Euclide non enuncia gli assiomi di ordinamento, anche se implicitamente ne fa uso. Essi furono rilevati ed enunciati da Moritz Pash (1843-1930), che costruì pure interessanti geometrie critiche sugli assiomi dell'ordinamento.

II.a.- *Su ogni retta sono date due relazioni d'ordine totali, una l'inversa dell'altra dette precedere* ($\geq$) e *seguire* ($\leq$) ($\Rightarrow$ "relazione ***stare fra***" … *un punto C sta tra A e B se C precede A e segue B* ! Ovvero $A \leq C \leq B$).

II.b.- *Dati due punti distinti* $A \neq B$ con $A \leq B$, *esistono almeno tre punti* X, Y, Z *tali che* $Z < A < X < B < Y$. ($\Rightarrow$ "***concetto di segmento***" *come insieme dei punti che stanno tra due punti dati!). Il segmento di estremi A e B, si denota con* [AB], dunque:

$$[AB] = \{X \text{ t.c. } A \leq X \leq B\}$$

Corollario II.1. Un segmento, e quindi una retta, contiene una infinità almeno numerabile di punti.

NOTA. Un modello di retta, soddisfacente agli assiomi di appartenenza e ai due precedenti, è dato dall'insieme dei numeri razionali con il loro ordinamento naturale, ($\mathbb{Q}$, $\leq$)

Definizione II. 2. (di semiretta). Data una retta r, si fissi su essa un punto P. Diremo che due punti A,B sono sulla medesima semiretta se P non appartiene ad [AB] , diremo che i punti A,B sono su semirette diverse se P appartiene ad [AB].

Definizione II.3. (costruzione di semirette). Data una retta r ed un suo punto P si chiama *semiretta destra* di origine P, l'insieme dei punti Y che seguono P, si indica con (P,r). Si chiama *semiretta sinistra* di origine P, l'insieme dei punti Z che precedono P, si indica con (r,P).

Definizione II.4. (di triangolo e di trilatero). Da Ib.- e IIb.- segue la ***nozione di triangolo*** (dati tre punti, A,B,C , a due a due distinti e non allineati, detti *vertici,* un **triangolo** è l'insieme dei punti appartenenti ai segmenti aventi come estremi i vertici, detti *lati del triangolo*). Si chiama invece **trilatero,** l'insieme dei punti sulle rette che congiungono **i vertici** a due a due.

II.c.- *Dati tre punti su una retta uno ed uno solo di essi "sta fra" gli altri due.*

II.d.-Assioma di Moritz-Pash. *Se una retta incontra un lato di un triangolo, allora incontra necessariamente un secondo lato, almeno.*

NOTA (Geometria piana non pashiana). Nel 1970 il matematico Lesław W. Szczerba fornì un esempio di geometria in cui sono validi gli assiomi della geometria euclidea, ma non l'assioma di Motitz-Pasch. La costruzione si basa sul fatto che esiste una soluzione discontinua[7] dell'equazione funzionale: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ con $f(1) = 1$. Se si definisce una relazione di ordinamento parziale su R, nel modo seguente: $x < y$ sse $f(x) < f(y)$ allora la quaterna $(R,+,\cdot, <)$ risulta essere un campo semi-ordinato. Se f non è continua, il piano cartesiano costruito su questo campo soddisfa gli assiomi della geometria euclidea ma non l'assioma di Pasch. Si noti che tale dimostrazione richiede l'assioma della scelta.

Definizione II.5. (di semipiano). Dato un piano α ed una retta r su di esso. Possiamo ripartire α in due classi α_1 , α_2 , ciascuna detta *semipiano*, tali che due punti P, P' non appartengono alla stessa classe se sulla retta P, P'vi è un punto di r tra essi, appartengono alla stessa classe se ciò non accade.

Definizione II.6. (di angolo). Siano date due semirette a e b, di comune origine P, si fissino un punto H sulla semiretta a , ed un punto K sulla semiretta b, diversi da P. Chiamiamo angolo [ab] l'insieme dei punti delle rette uscenti da P ed intersecanti [HK].

Definizione II.7. (di fascio proprio di rette). E' l'insieme delle rette di un piano, passanti per un punto P di quel piano. Possiamo analogamente definire i fasci impropri di rette, i fasci di piani propri ed impropri, le stelle di rette e di piano propri ed impropri.

Corollario II.8. L'ordinamento sulla retta induce un ordinamento delle rette di un fascio proprio.

Si consideri nell'angolo ab il di origine P il triangolo PHK, si fissi un ordinamento sua [HK], una retta r precede una retta s se il punto R in cui r incontra [HK], precede il punto S, nel quale s incontra [HK].

---

[7] B.Rizzi,(1973) *Interpretazioni di alcune equazioni funzionali*, Periodico di Matematiche 49(4), 33-48.

NOTA. Un modello di spazio , *soddisfacente agli assiomi di appartenenza e dell'ordine* è dato dall'insieme delle terne ordinate di numeri razionali ,per i quali i razionali hanno il loro ordinamento naturale, ($\mathbb{Q}$, $\leq$) e nel quale i piani sono rappresentati dalle equazioni del tipo ax+by+cz+d = 0, e le rette con i sistemi costituiti da due equazioni di piani indipendenti.

III. *Assiomi di eguaglianza (congruenza o del movimento)*

Negli assiomi che seguono è da notare la dualità tra la nozione di segmento e quella di angolo, i cui assiomi si integrano assieme nell'ultimo postulato. Quando l'eguaglianza si concepisce come una trasformazione, si chiama anche movimento.

Definizione III.1. Indichiamo con **S** l'insieme dei *segmenti*.
Definizione III.2. Indichiamo con Ω l'insieme degli *angoli*.

III.a.- *In* **S** *è data una relazione di equivalenza* "=" *detta "eguaglianza" di segmenti*.

III.b.- *In* Ω *è data una relazione di equivalenza* "=" *detta eguaglianza di angoli*.

III.c.- *Dati un segmento* $[AB]$ *ed una semiretta di origine* H *esiste nella semiretta un punto* K *tale che*: $[HK]=[AB]$

III.d.- *Dati un angolo* $[ab]$ *ed un fascio di origine* h *esiste nel fascio una retta* k *tale che:* $[hk]=[ab]$

III.e $[AB]=[BA]$

III.f $[ab]=[ba]$

Definizione III.3. Due segmenti [AB] e [BC] appartenenti alla semiretta di origine A, si chiamano *segmenti consecutivi* se A<B<C Essi determinano il segmento [AC] che per definizione si indica con [AC] = [AB] + [BC], detto *somma di segmenti consecutivi.*
Definizione III.4. Due angoli [ab] e [bc] appartenenti all'angolo di origine a, si chiamano *angoli consecutivi* se a<b<c Essi determinano l'angolo [ac] che per definizione si indica con [ac] = [ab] + [bc], detto *somma degli angoli consecutivi.(sovrabbondante)*

III.g.- *(sovrabbondante)Se* [AB] e [BC] *sulla semiretta* (A,r) *di origine* A, *ed* [A'B'] *e* [B'C'] *sulla semiretta* (A',r') *di origine* A' *sono segmenti consecutivi e se* [AB] = [A'B'] *e* [BC] = [B'C'] *allora*:
[AB] + [BC] = [A'B'] + [B'C'].

III.h.- Se [ab] e [bc] sull'angolo di origine a, ed [a'b'] e [b'c'] sull'angolo di origine a' sono *angoli consecutivi* e se [ab] = [a'b'] e [bc] = [b'c'] allora:
[ab] + [bc] = [a'b'] + [b'c']

Definizion 3.3.- *Due triangoli* di vertici rispettivi (A,B,C), (A',B',C') aventi nell'ordine lati ed angoli corrispondenti eguali, *si dicono eguali*. Cioè sono tali che [AB] =[A'B'], [BC]= [B'C'], [AC] =[A'C'], angA = ang A' , ang B = ang B', ang C = ang C'

III.i. (I Criterio di eguaglianza). *Due triangoli di vertici rispettivi* (A,B,C), (A',B',C') *aventi nell'ordine* [AB] =[A'B'], [BC]= [B'C'] e ang B = ang B', *sono eguali*. (si dice anche congruenti).

N.B. Sui postulati dell'eguaglianza (ovvero del movimento o congruenza) vi sono *numerose altre versioni,* mediante gruppi di postulati del tutto equivalenti a quelli presentati sopra, che rappresentano la linea seguita da vari autori , quali oltre Hilbert e Lee Moore, sono il Veronese, il duo Enriquez-Amaldi, come meglio specificato in ciò che segue. E' infatti interessante indicare almeno quali sono gli autori, che in un modo o nell'altro hanno pubblicato i loro metodi[8] , o meglio il loro gruppo di assiomi per presentare una corretta teoria dell'eguaglianza.
Anticamente Euclide non distingueva tra eguaglianza ed equivalenza ed in realtà la specifica dei due concetti è arrivata più tardi. Le varie teorie moderne sulla eguaglianza, si possono ripartire in tre linee di pensiero essenzialmente distinte:

I.- Una prima linea è quella di David Hilbert (1862-1943) , di Robert Lee Moore (1882-1974), di Giuseppe Veronese (1854-1917), di Federigo Enriquez (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957). Il metodo di Hilbert e Lee Moore si basa in effetti sul ritenere primitivo il concetto di eguaglianza di segmenti e di angoli e di postulare il 1° criterio di eguaglianza dei triangoli, evitando di considerare dall'inizio l'idea di movimento. Anche il Veronese segue questa strada, ma tralascia la nozione di angolo. Alle idee di Hilbert si sono attenuti Enriquez ed Amaldi nel loro classico trattato: *Lezioni di Geometria*, che rimane sempre un nostro punto di grande riferimento. Da notare in Enriquez - Amaldi, il 1° criterio di eguaglianza è apparentemente dimostrato, anche se la dimostrazione, del tutto intuitiva, equivale a dire che è vero perché e vero, quindi a usarlo come postulato.

II.- Una seconda linea di pensiero è quella che nasce nell'opera di Moritz Pash[9] (1843-1930), che considera primitivo il concetto di congruenza per figure qualsiasi, definita con opportuni postulati, che indicano come il movimento operi sulle figure. Tale indirizzo è seguito nell'opera di Carlo Rosati (1876-1929) e Piero Benedetti[10] (1876-1933), in quella di Michele De Franchis (1875-1946), ed infine nel trattato di Francesco Severi (1879-1961).
III. La terza linea, forse la più moderna è legata agli spazi metrici[11] e alla nozione di distanza. È quella seguita da Enrico Bompiani (1889-1975) e Carmelo Longo (1912-1971) che prendono in considerazione la distanza di due punti e definiscono come movimento una corrispondenza puntuale biettiva che conserva le distanze di coppie di punti corrispondenti. Questa idee è in piena sintonia con la definizione di spazio euclideo (anche n-dimensionale) definito a partire da uno spazio vettoriale di dimensione finita sui reali, e per estensione anche sui complessi, o anche per geometrie piane su campi finiti, nei quali si introduca un particolare prodotto "*interno*" e quindi una "metrica generalizzata", a valori in un campo di Galois, (cfr. Di Gennaro- Eugeni in [9]).

IV. Una quarta linea si trova nelle opere[12] di Mario Villa (1907-1973), nelle quali oltre ad approfonditi studi sulle trasformazioni puntuali, appaiono in dettagli le equazioni dei movimenti piani e spaziali, oltre alle inversioni ed alle affinità circolari e tutta una varietà di rappresentazioni analitiche dei movimenti, delle similitudini, delle affinità, dell'anello delle centro-affinità. In particolare

[8] Cfr. A.Chiellini-R.Giannarelli, op.cit., pg.399-427.
[9] M.Pash, (1882), Vorlesungen *uber neuere Geometrie*, Leipzig
[10] Piero Benedetti operò a Pisa, prima come allievo della scuola normale superiore, poi come prolifico autore di testi scolastici.
[11] E.Bompiani (1963), *Alcuni tipi di spazi metrici,* Archimede, 6, pp. 281-288, ed F.Eugeni, *Spazi metrici e pseudometrici finiti,* op.cit.
[12] M.Villa, *Lezioni di Geometria*, vol.II, Cedam Padova, 1965.

nell'articolo[13] dedicato al modello di Klein, scritto dallo stesso M.Villa nel volume *Un insegnamento moderno della Matematica*, Patron, Bologna (1963), da lui curato per conto del Ministero dell'Istruzione, appaiono i movimenti del piano di Klein in sè, esattamente come riportato in questo lavoro al paragrafo 6 dove i movimenti sono indicati e verificati. In questo lavoro al paragrafo 7, viene data una tecnica per ricavarli, che esulava dagli scopi didattici del Villa.

V. Un'ultima linea quella gruppale, appare nel testo di Michele De Franchis (1875-1946), ed è anche quella celta dal Villa, nella sua presentazione del modello di Klein.
Quest'ultima metodologia indicata può esprimersi mediante il seguente gruppo di postulati del tutto equivalenti, come è possibile dimostrare a quelli dell'eguaglianza che abbiamo elencato nella lista di Hilbert-Moore.

4.- Postulati gruppali del movimento

1) I movimenti sono particolari corrispondenze biunivoche del piano che formano un gruppo.
2) In un movimento ad una retta corrisponde ordinatamente una retta, cioè l'ordine dei punti viene conservato.
3) Siano dati nel piano un punto A ed una retta r passante per A; sia inoltre a una delle due semirette di r uscenti da A ed α uno dei due semipiani del piano π separati da r; dati similmente un secondo punto A', una seconda retta r' ed in relazione ad r' una semiretta a', uscente da A', ed un secondo semipiano α' separato da r', esiste uno ed un solo movimento che porta A in A', a in a' e α in α'.
4) Se un movimento muta una semiretta in sé stessa, allora muta in sé stesso anche ogni punto della semiretta.

IV.- Assiomi di continuità.

Riprendendo il completamento dei postulati di Hilbert- Moore, procediamo ad illustrare il 4° gruppo di postulati della continuità dei quali esistono due versioni. Premettiamo alcune definizioni. Con questi postulati la retta diviene continua e il modello spaziale è quello delle terne ordinate di numeri reali, e tutto si rappresenta con i metodi della geometria analitica.

Definizione IV.1 (di classi separate di punti). Sia [AB] un qualsiasi segmento (più in generale una retta) supponiamo che esso sia ripartito in due classi non vuote di punti. Tali classi si diranno classi separate e contigue di punti se:
a.- ogni punto di [AB] (o della retta) appartiene ad una ed una sola delle due classi;
b.- ogni punto della prima classe precede ogni punto della seconda classe.
Se esiste un punto C (appartenente alla prima o in alternativa alla seconda classe) che segue ogni punto della prima classe e precede ogni punto della seconda (lui escluso), tale punto si dirà *punto separatore* delle due classi.

[13] Il sottoscritto autore di questo scritto si è laureato con Mario Villa nel 1963, e iniziò la sua attività come assistente incaricato presso la Cattedra del Prof. Guido Vaona dell'Università di Modena. In quel contesto ebbi l'onore di correggere le bozze di quel lavoro del prof. Villa, e fin da allora mi interessai a come ricavare i movimenti del piano di Klein, così come ho esposto in questo lavoro.

Definizione IV.2. (di classi separate di segmenti). Siano date su una retta una classe di segmenti ripartiti in due classi. Tali classi si diranno <u>*classi separate di segmenti*</u> se:
a.- ogni segmento della classe appartiene ad una ed una sola delle due ripartizioni;
b.- ogni segmento della prima classe è minore [14]di ogni segmento della seconda classe.
Se esiste un punto segmento che è maggiore di ogni segmento della prima classe ed minore di ogni segmento dellaseconda, tale segmento si dirà *segmento separatore* delle due classi.

I.-versione

<u>si ammettono i seguenti due postulati</u>**:**

IV.a.- Postulato di Cantor. *Siano date due classi separate di segmenti:*

1° classe : $[AC_1]$, $[AC_2,]$ …, $[AC_n]$, …..
2° classe : $[AB_1]$, $[AB_2,]$ …, $[AB_n]$, …..

con $[AC_h] < [AB_k]$, $\forall h, k \in N$. *Se accade che comunque fissato un <u>arbitrario</u> segmento* [EP] *possiamo trovare almeno due segmenti* $[AC_h]$, $[AB_k]$ *tali che* $[C_h B_k] < [EP]$, *allora esiste un unico segmento* [AX] *elemento separatore delle due classi.*

IV.b .- Postulato di Eudosso-Archimede. *Presi due segmenti qualsiasi, esiste un multiplo del più piccolo che supera l'altro.*

II.-versione

<u>si ammette il seguente unico postulato</u>:

IV.c.- Postulato di continuità di Deedekind. *Comunque dati su una retta orientata due gruppi U, V non vuoti di punti costituenti due classi separate e contigue di punti allora esiste uno ed un sol punto P che è elemento di separazione delle due classi.*

Omettiamo la dimostrazione dell'equivalenza delle due versioni di postulati, del resto reperibile in letteratura[15]. E' importante notare che esistono *geometrie non cantoriane* (ad esempio lo spazio numerico 3-dimensionale sul campo dei numeri razionali) e *geometrie non archimedee*[16] sulle quali uno studio iniziale si deve a Veronese[17].
Va solo aggiunto che è possibile dimostrare come conseguenza della continuità che: *Se un segmento congiunge un punto interno ad una circonferenza con un punto ad essa esterno allora il segmento ha un punto sulla circonferenza.*

---

[14]Si dice che [CD] < [AB] se esiste in [AB] un punto C, tale che [CD] =[AC].
[15] A.Chiellini-R.Giannarelli, op.cit., cap21, par.II.pp.499-506.
[16] Si veda in A.Chiellini-R.Giannarelli, op.cit., cap21, par.III.pp.509-510 un versione intuitiva del modello di Veronese di retta non Archimedea. Una versione numerica del modello è dovuta a : F.Eugeni-S.Furneri-F.Mercanti, *Una presentazione delle geometrie non archimedee*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Teramo (1999),vol .I, pp.101-111.
[17] Veronese G. (1897), Sul postulato della continuità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VI, II sem., pp. 161-167.- Veronese G. (1898), Segmenti e numeri trasfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem.,pp. 79-87.- Veronese G. (1905), La geometria non archimedea. Una questione di priorità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XIV, I sem., 347-351.- Veronese G. (1909), La geometria non archimedea, *Proceedings of IV Mathematicians International Congress*, vol. I, 197-208.

La dimostrazione è nella nota 42. Vogliamo notare è che tale teorema non vale in un piano non cantoriano. Infatti nel piano cartesiano a coordinate razionali la circonferenza unitaria (costituita dai suoi soli punti razionali) intersecata con una retta per l'origine non ha mai intersezioni razionali.
Sulle geometrie non-archimedee è interessante indicare il complesso dei lavori di Eugeni e Mascella che portano avanti la classificazione di tutte le possibili rette non archimedee.
Sono da indicare alcuni lavori di carattere preliminare[18] culminanti in un lavoro nel quale percorrendo una strada differente da quella del matematico austriaco Hans Hahn (1879-1934) viene presentata una moderna versione [19]. della classificazione gruppale[20] data da Hahn nel 1907. Sull'argomento è interessante un antico articolo di Levi-Civita nel quale introduce "numeri non archimedei" costituente una differente classe[21] rispetto alle rette non archimedee del Veronese. Ancora vi è un lavoro di Eugeni e Mascella nel quale costruiscono piani non archimedei[22], trovandone due non isomorfi.
Tuttavia è fuori dubbio, come prova anche l'articolo di Mascella, in questo fascicolo, dal titolo "Possibilità non archimedee" di carattere filosofico, che occorre fare ordine in questo ambito raccogliendo magari in volume la storia e l'evoluzione di questo interessante aspetto delle geometrie non –archimedee.

V. Assioma delle parallele.

V.a *Dati una retta ed un punto che non si appartengono esiste nel piano che li contiene una sola retta per il punto non avente punti in comune con la retta data* (*assioma di Euclide o delle parallele*).

Bibliografia

[1] Agazzi E., Palladino D. (2014), *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Casa ed. La Scuola - ISBN 10: 883509450X ISBN 13: 9788835094500

[2] Amaldi U. Enriques F. (1945), *Elementi di Geometria*, Ed. Zanichelli, Bologna.

[3] Chiellini A-.Giannarelli R. (1962), *L'esame orale di Matematica*, Ed. Veschi, Roma.

[4] Fadini A. Geometria razionale, vol.1-2 , Edizioni A.P.E., Mursia, Milano.

[5] Pazzolla Beloch M. – Orzalesi E. (1953) , La matematica elementare vista dall'alto, Ist. Geometria Univ. Ferrara.

[6] Villa M. (1951), Repertorio di Matematiche (articolo di F.Conforto), CEDAM, Padova.

---

[18] Eugeni F. e Mascella R. (2001), *La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine*, Periodico di Matematiche, vol. 3, pp. 45-56. - Eugeni F. e Mascella R. (2002), *Su alcuni modelli geometrici non archimedei*; ed , *Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano*; entrambi in F. Eugeni (2002) (a cura di), *Critica dei fondamenti*, Teramo, Edilgrafital.

[19] Eugeni F. e Mascella R. (2005), A complete characterization of non-Archi-medean lines, *Memoriile Sectiilor Stiintifice*, Editura Academiei Romane, Bucarest, pp. 257-270.

[20] Hahn H. (1907), Uber die nichtarchimedischen Grossensysteme, Sitzungs berichte der Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 116, pp.601-655.

[21] Levi Civita T. (1893), *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti R.Ist.Veneto di Lett. Ed Arti, VII(4), pp.1765-1815.

[22] Eugeni F., Mascella R. (1999), Un piano non archimedeo derivato da un piano di traslazione, in Eugeni F. (a cura di), *Critica dei fondamenti*, Teramo, Edilgrafital.