SALVATORE NICOTRA

Sulla costruzione d'una particolare funzione e sue applicazioni in idrodinamica

Ex *Act. P. Acad. Sc. Nov. Lync.*
Anno LXXXVIII — III Sess.

EX AEDIBUS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

ROMA — SCUOLA TIPOGRAFICA « PIO X » — VIA DEGLI ETRUSCHI, 7 — ROMA

Sulla costruzione d'una particolare funzione e sue applicazioni in idrodinamica

Nota di SALVATORE NICOTRA, presentata da G. GIORGI, S. O. (1)

Summarium. — Agitur in hac Nota de inquirenda speciali functione analytica cum infinitis singularitatibus logarithmicis in punctis praestitutis, in quibus functio ipsa vortices constituit. Quo consilio, peculiari conditione imposita relate ad partem imaginariam functionis, functio ipsa exprimitur per functiones elypticas quae a Weierstrasse nuncupantur, et deinde potest applicari ad studium motus qui in fluido ideali a vortice quodam producatur in campo anulari.

CAPITOLO I.

La funzione.

§ 1. — Caratteristiche della funzione.

1. Ci proponiamo di costruire una funzione analitica, regolare in un certo campo connesso bidimensionale del piano complesso, soddisfacente a determinate condizioni e farne applicazioni al moto piano d'un liquido ideale, non viscoso, provocato dalla presenza d'un vortice libero nel campo predetto.

Sia $z = 0$ il piano della variabile complessa. Il dato campo sia una corona circolare, con centro nell'origine, limitata dalle circonferenze (concentriche) esterna ed interna di raggi 1, q rispettivamente, ed il centro del vortice

$$z_0 = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}$$

(1) Presentata nella Sessione del 17 Febbraio 1935

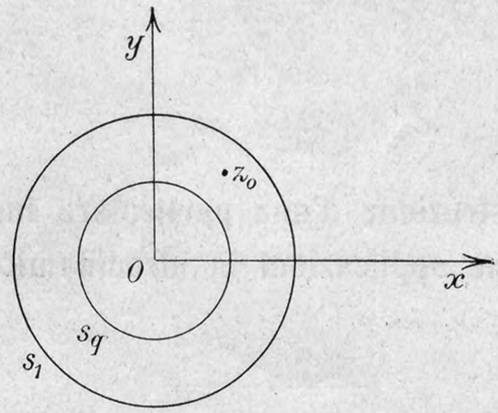

Fig. 1.

appartenza alla corona circolare. Si ha manifestamente:

$$0 < q < 1 \, , \qquad q < | z_0 | < 1 \, .$$

Imporremo alla predetta funzione

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi + i\psi$$

la condizione di presentare, nel punto z_0, una singolarità logaritmica come

$$\frac{C}{2\pi i} \log (z - z_0) \, ,$$

(ove C è la circolazione del vortice) e di avere la ψ nulla sui due contorni s_1, s_q, rispettivamente esterno ed interno, limitanti il campo, potendo considerare, in tal modo, i contorni stessi come pareti rigide entro cui fluisce il liquido.

§ 2. — Costruzione della $f(z)$ mediante introduzione d'infinite singolarità.

2. Supposto in P_0 il vortice, sul raggio OP_0 introduciamo una successione di punti, con legge che stabiliremo, e fissiamo in ciascuno di essi un vortice. Ci proponiamo di costruire una funzione analitica, regolare in tutto il piano, avente infinite singolarità logaritmiche nei punti suddetti, soddisfacente sempre alla condizione predetta, di avere, cioè, la parte immaginaria ψ nulla su ambedue i contorni s_1, s_q, della corona circolare.

3. A tale scopo, considerando la successione d'immagini rispetto ad s_1 e ad s_q in modo che sia:

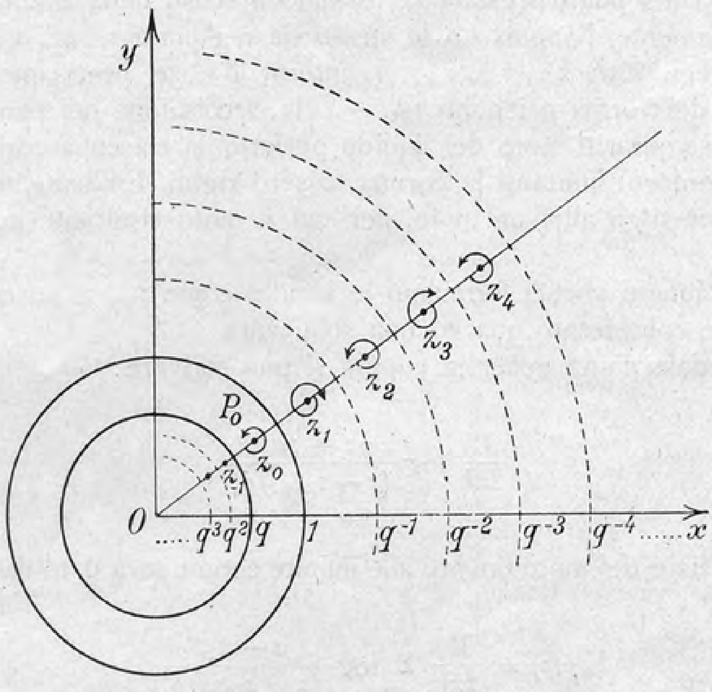

Fig. 2.

z_n l'immagine di $z_{-(n-1)}$ rispetto ad s_1

z_{-n} » » z_{n-1} » » s_q

$$(n = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$$

avremo:

$$(\circ)\quad \left|\begin{aligned} z_{-2n} &= z_0 q^{2n} \\ z_{-2n+1} &= \frac{z_0}{\varrho_0^2} q^{2n} \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\right)\quad \left|\begin{aligned} z_{2n} &= z_0 q^{-2n} \\ z_{2n+1} &= \frac{z_0}{\varrho_0^2} q^{-2n} \end{aligned}\right.$$

Poichè le $\left(\begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\right)$ si deducono dalle $(\circ)$ mutando n in $-n$, le formule precedenti si compendiano nelle sole $\left(\begin{smallmatrix}\circ\\\circ\end{smallmatrix}\right)$ con

$$n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

4. Ciò posto consideriamo i fasci di cerchi di raggi

$$q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, \ldots$$
$$q\ , q^2\ , q^3\ , \ldots$$

e col centro nell'origine: il primo fascio esterno al cerchio di raggio 1, il secondo interno al cerchio di raggio q.

Supposto che nel piano indefinito della variabile complessa si abbiano infiniti vortici nei punti prestabiliti, fissiamo il senso della circolazione in z_0, e, alternativamente, l'opposto o lo stesso sia nei punti $z_1, z_2, z_3, \ldots$, esterni a s_1, che negli altri $z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, \ldots$, interni a s_q, e precisamente sia C la circolazione dei vortici nei punti z_{2n}, $-$C la circolazione nei punti z_{2n+1}.

Come si vedrà, il moto del liquido perfetto, in ciascuna corona, avviene come se i contorni limitanti la corona fossero rigidi. Evidentemente ciascun vortice induce sugli altri un moto, per cui il moto risultante non sarà permanente.

Con gli infiniti vortici formiamo le infinite copie z_{2n}, z_{2n+1}, cosicchè ogni vortice viene considerato una ed una sola volta.

Il potenziale d'una generica coppia si può scrivere:

$$\frac{C}{2\pi i} \log \frac{z - z_{2n}}{(z - z_{2n+1})\,\varrho_0} .$$

Il potenziale del moto dovuto alle infinite coppie sarà dato dalla funzione:

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} \log \frac{z - z_{2n}}{(z - z_{2n+1})\,\varrho_0} . \tag{1}$$

5. Tale funzione soddisfa alle condizioni poste inizialmente.

Infatti, si ha, per $|z| = 1$:

$$\left| \frac{z - z_{2n}}{(z - z_{2n+1})\,\varrho_0} \right| = \left| \frac{e^{i\vartheta} - \varrho_0\, e^{i\vartheta_0} q^{-2n}}{\left(e^{i\vartheta} - \dfrac{e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0} q^{2n}\right) \varrho_0} \right| = \left| \frac{e^{i\vartheta} - \varrho_0\, e^{i\vartheta_0} q^{-2n}}{e^{i(\vartheta_0 + \vartheta)} \dfrac{q^{2n}}{\varrho_0} \left(\varrho_0\, e^{-i\vartheta_0} q^{-2n} - e^{-i\vartheta}\right) \varrho_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{e^{i(\vartheta_0+\vartheta)}\, q^{2n}} \right| \cdot \left| \frac{e^{i\vartheta} - \varrho_0\, e^{i\vartheta_0} q^{-2n}}{e^{-i\vartheta} - \varrho_0\, e^{-i\vartheta_0} q^{-2n}} \right| = q^{-2n} .$$

È quindi su s_1:

$$\Psi = \frac{C}{2\pi i} \log \prod_{-\infty}^{\infty} q^{-2n} = \frac{C}{2\pi i} \log \prod_{1}^{\infty} q^{2n} \cdot \prod_{1}^{\infty} q^{-2n} = \frac{C}{2\pi i} \log 1 = 0 .$$

Se con gli stessi infiniti vortici formiamo le infinite coppie z_{2n}, $z_{-(2n+1)}$, cosicchè ogni vortice viene considerato una ed una sola volta, il potenziale corrispondente è

$$\frac{C}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{z - z_{2n}}{(z - z_{-(2n+1)})\,\varrho_0}$$

che naturalmente coincide con la $f(z)$ scritta sopra, salvo uno spostamento di termini.

Ora, per $|z| = q$, si ha:

$$\left| \frac{z - z_{2n}}{(z - z_{-(2n+1)})\, \varrho_0} \right| = \left| \frac{q e^{i\mathfrak{z}} - \varrho_0\, e^{i\mathfrak{z}_0}\, q^{-2n}}{\left(q e^{i\mathfrak{z}} - \dfrac{e^{i\mathfrak{z}_0}}{\varrho_0}\, q^{2n+2}\right) \varrho_0} \right| = \left| \frac{q e^{i\mathfrak{z}} - \varrho_0\, e^{i\mathfrak{z}_0}\, q^{-2n}}{e^{i(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z})}\, \dfrac{q^{2n+1}}{\varrho_0}\, (\varrho_0\, e^{-i\mathfrak{z}_0}\, q^{-2n} - q e^{-i\mathfrak{z}})\, \varrho_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{e^{i(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z})}\, q^{2n+1}} \right| \cdot \left| \frac{q e^{i\mathfrak{z}} - \varrho_0\, e^{i\mathfrak{z}_0}\, q^{-2n}}{q e^{-i\mathfrak{z}} - \varrho_0\, e^{-i\mathfrak{z}_0}\, q^{-2n}} \right| = q^{-(2n+1)} .$$

È quindi su s_q:

$$\Psi = \frac{C}{2\pi i} \log \prod_{-\infty}^{\infty} q^{-(2n+1)} = \frac{C}{2\pi i} \log \prod_{0}^{\infty} q^{2n+1} \,.\, \prod_{0}^{\infty} q^{-(2n+1)} = \frac{C}{2\pi i} \log 1 = 0 .$$

La (1) è quindi la $f(z)$ richiesta.

3. — Espressione di $f(z)$ mediante le funzioni ellittiche di Weierstrass.

6. Ci proponiamo, nel presente paragrafo, di esprimere la (1) mediante la funzione σu di Weierstrass, per poter procedere più agevolmente nello studio dello questione.

7. Come è noto, la funzione σu è così definita:

$$\sigma u = u \prod_{m,n}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) . \, e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} ,$$

con

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

e i cui periodi, 2ω reale e $2\omega'$ immaginario, sono legati a q dalla relazione:

$$q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}} .$$

Tale funzione messa sotto forma di prodotto infinito dà luogo alla seguente espressione [1].

$$(2) \qquad e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2},$$

ove 2η è una costante (periodo di *seconda specie*) legato al periodo 2ω (di *prima specie*) dalla relazione:

$$\sigma(u+2\omega) = -\,e^{2\eta(u+\omega)}\,.\,\sigma u \qquad [2].$$

8. Intanto la (1), tenendo conto delle $(\substack{\circ\\\circ})$, può scriversi:

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i}\log\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}q^{-2n}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}q^{-2n}}\,.$$

Ponendo:

$$P = \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}q^{-2n}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}q^{-2n}}\,,$$

si ha successivamente:

$$P = \frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}}\prod_{1}^{\infty}\frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}q^{-2n}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}q^{-2n}}\;\frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}q^{2n}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}q^{2n}} =$$

$$= \frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}}\prod_{1}^{\infty}\frac{\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}q^{-2n}\left(\frac{z\,\overline{e}^{i\vartheta_0}}{\varrho_0}q^{2n}-1\right)}{e^{i\vartheta_0}q^{-2n}\left(\varrho_0\,e^{-i\vartheta_0}z\,q^{2n}-1\right)}\;\frac{z\left(1-\frac{\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}}{z}q^{2n}\right)}{\varrho_0\,z\left(1-\frac{e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0\,z}q^{2n}\right)} =$$

$$= \frac{z-\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0\,z-e^{i\vartheta_0}}\prod_{1}^{\infty}\frac{\frac{z\,\overline{e}^{i\vartheta_0}}{\varrho_0}q^{2n}-1}{\varrho_0\,e^{-i\vartheta_0}z\,q^{2n}-1}\;\frac{1-\frac{\varrho_0\,e^{i\vartheta_0}}{z}q^{2n}}{1-\frac{e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0\,z}q^{2n}}\,.$$

[1] Luigi Bianchi. Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. - Parte seconda, pag. 160.

[2] Bianchi. Op. cit. pag. 15.

Ponendo ora:

$$\frac{z\, e^{-i\mathfrak{z}_0}}{\varrho_0} = \frac{z}{z_0} = e^{\frac{\pi i u}{\omega}}, \tag{3}$$

$$\varrho_0\, z\, e^{-i\mathfrak{z}_0} = \varrho_0^2\, \frac{z}{z_0} = e^{\frac{\pi i v}{\omega}}, \tag{4}$$

per cui

$$\frac{\varrho_0\, e^{i\mathfrak{z}_0}}{z} = \frac{z_0}{z} = e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}, \tag{3'}$$

$$\frac{e^{i\mathfrak{z}_0}}{\varrho_0\, z} = \frac{1}{\varrho_0^2}\, \frac{z_0}{z} = e^{-\frac{\pi i v}{\omega}}, \tag{4'}$$

la P, data dall'ultima espressione, può scriversi:

$$P = \frac{z - z_0}{\varrho_0\, z - e^{i\mathfrak{z}_0}} \prod_1^\infty \frac{(1 - e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\, q^{2n})(1 - e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\, q^{2n})}{(1 - e^{\frac{\pi i v}{\omega}}\, q^{2n})(1 - e^{-\frac{\pi i v}{\omega}}\, q^{2n})},$$

ossia

$$P = \frac{z - z_0}{\varrho_0\, z - e^{i\mathfrak{z}_0}}\; \frac{\displaystyle\prod_1^\infty \frac{(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i u}{\omega}})(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i u}{\omega}})}{(1 - q^{2n})^2}}{\displaystyle\prod_1^\infty \frac{(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i v}{\omega}})(1 - q^{2n} e^{-\frac{\pi i v}{\omega}})}{(1 - q^{2n})^2}},$$

la quale, per la (2), può anche mettersi sotto la forma:

$$P = \frac{z - z_0}{\varrho_0\, z - e^{i\mathfrak{z}_0}} \cdot \frac{e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\, \sigma u \operatorname{sen} \frac{\pi v}{2\omega}}{e^{\frac{-\eta v^2}{2\omega}}\, \sigma v \operatorname{sen} \frac{\pi u}{2\omega}},$$

cioè:

$$P = \frac{z - z_0}{\varrho_0\, z - e^{i\mathfrak{z}_0}}\; \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi v}{2\omega}}{\operatorname{sen} \frac{\pi u}{2\omega}}\; e^{\frac{-\eta}{2\omega}(u^2 - v^2)}\, \frac{\sigma u}{\sigma v}. \tag{5}$$

Dalle (3), (4) si deduce:

$$u = \frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0}, \tag{6}$$

$$v = \frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\varrho_0^2 z}{z_0}; \tag{7}$$

quest'ultima, tenuto conto della prima, può anche scriversi:

$$v = \frac{\omega}{\pi i} \left\{ \log \frac{z}{z_0} + 2 \log \varrho_0 \right\},$$

ovvero:

$$v = u + \frac{2\omega}{\pi i} \log \varrho_0 . \tag{8}$$

Dalle (6), (7), si ricava:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{2\omega} &= \operatorname{sen} \frac{1}{2i} \log \frac{z}{z_0} = \frac{1}{2i} \left\{ e^{\frac{1}{2} \log \frac{z}{z_0}} - e^{-\frac{1}{2} \log \frac{z}{z_0}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \sqrt{\frac{z}{z_0}} - \sqrt{\frac{z_0}{z}} \right\} = \frac{1}{2i} \frac{z - z_0}{\sqrt{z_0 z}} . \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi v}{2\omega} &= \operatorname{sen} \frac{1}{2i} \log \frac{\varrho_0^2 z}{z_0} = \frac{1}{2i} \left\{ e^{\frac{1}{2} \log \frac{\varrho_0^2 z}{z_0}} - e^{-\frac{1}{2} \log \frac{\varrho_0^2 z}{z_0}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \varrho_0 \sqrt{\frac{z}{z_0}} - \frac{1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{z_0}{z}} \right\} = \frac{1}{2i} \frac{\varrho_0^2 z - z_0}{\varrho_0 \sqrt{z_0 z}} . \end{aligned} \tag{10}$$

Dalla (8) si trae:

$$u^2 - v^2 = -\left(\frac{4\omega}{\pi i} \log \varrho_0 \right) u + \frac{4\omega^2}{\pi^2} (\log \varrho_0)^2 . \tag{11}$$

In virtù delle (6), (7), (9), (10), (11), la (5) diviene:

$$P = \frac{z - z_0}{\varrho_0 z - e^{i z_0}} \frac{\varrho_0^2 z - z_0}{\varrho_0 (z - z_0)} e^{\frac{\eta}{2\omega} \left(\frac{4\omega}{\pi i} \log \varrho_0 \right) u - \frac{\eta}{2\omega} \frac{4\omega^2}{\pi^2} (\log \varrho_0)^2} \cdot \frac{\sigma \left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0} \right)}{\sigma \left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\varrho_0^2 z}{z_0} \right)},$$

la quale, dopo semplicissime riduzioni, può scriversi:

$$P = e^{\frac{2\eta}{\pi i}\log \rho_0 \frac{\omega}{\pi i}\log\frac{z}{z_0} - \frac{2\eta\omega}{\pi^2}(\log\rho_0)^2} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{\varrho_0^2 z}{z_0}\right)}.$$

La (1), allora, diventa:

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i}\log P =$$

$$= \frac{-C}{2\pi i}\left\{\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\log\varrho_0\left(\log\varrho_0 + \log\frac{z}{z_0}\right) - \log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{\varrho_0^2 z}{z_0}\right)}\right\},$$

ed infine

$$(\ast\ast) \qquad f(z) = \frac{C}{2\pi i}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i}\log\frac{\varrho_0^2 z}{z_0}\right)} + \frac{C_1}{2\pi i}\log z\,,$$

definita a meno di un termine additivo, indipendente dal posto, ove si è posto

$$C_1 = -C\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\log\varrho_0\,.$$

È questa la funzione che dà il potenziale del moto in tutto il piano, espressa mediante la trascendente ellittica σ, regolare in tutti i punti del piano medesimo ad eccezione degli infiniti punti del raggio OP_0, coniugati coniugati rispetto ad entrambi i contorni s_1, s_2, corrispondenti ai vortici, ove la funzione presenta delle singolarità logaritmiche.

9. *Degenerazione della funzione* $f(z)$. — Esaminiamo ora quello che accade della funzione $f(z)$ quando il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi si fa tendere, per valori puramente immaginari, a ∞.

Diamo ad ω un valore reale fisso e facciamo tendere $\omega' = i\beta\omega$ per valori puramente imaginari all'infinito. Allora la funzione σu di Weierstrass degenera nella funzione circolare [1].

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2}\frac{2\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right).$$

[1] Bianchi. Op. c. pag. 142.

Conseguentemente

$$\lim_{\omega' \to \infty} \frac{\sigma u}{\sigma v} = e^{\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{4\omega^2}(u^2-v^2)} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi v}{2\omega}\right)}$$

e la (5) al limite diverrà:

$$P = \frac{z - z_0}{(z - z_1)\varrho_0},$$

perchè, in tal caso,

$$\eta = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \omega,$$

per cui la $f(z)$ si riduce a

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i} \log \frac{z - z_0}{(z - z_1)\varrho_0},$$

e ciò è in perfetto accordo con le precedenti considerazioni, perchè per $\omega' \to \infty$, $q \to 0$, e la corona circolare si riduce al cerchio di raggio 1.

CAPITOLO II.

Applicazioni al moto d'un liquido provocato da un vortice.

§ 1. — La funzione potenziale.

10. La corona circolare sia dunque sede d'un moto piano d'un fluido provocato dalla presenza del vortice fissato in P_0. Trattandosi di moto piano, le velocità delle singole particelle fluide sono tutte parallele al piano fisso $z = 0$, e, per conseguenza, gli elementi caratteristici del moto (velocità e pressione) risultano indipendenti dalla coordinata z. In queste circostanze il moto è individuato da ciò che avviene sopra il predetto piano.

Supporremo il fluido perfetto, cioè tale che gli sforzi interni siano sempre pressioni, e quindi privo di viscosità. Di conseguenza grad p rappresenterà la risultante per unità delle forze dovute alla pressione.

Essendo il fluido incompressibile, cioè un liquido, la densità ϱ è indipendente dal tempo, per cui l'equazione di continuità diverrà:

$$\operatorname{div} v = 0 .$$

Vogliamo trattare di moto differenzialmente irrotazionale cioè tale che sia identicamente

$$\mathrm{rot}\, v = 0 \,,$$

salvo nel punto P_0, per ipotesi. Il liquido parta dalla quiete. Il potenziale della velocità sia la funzione:

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\varrho_0{}^2 z}{z_0}\right)} + \frac{C_1}{2\pi i} \log z \,.$$

§ 2. — Velocità.

11. Come abbiamo precedentemente rilevato, il moto del liquido non è permanente, per cui la funzione f, che esprime il potenziale del moto, dipende da t esclusivamente per il fatto che varia la posizione del vortice e quindi la dipendenza da t avviene soltanto per il tramite delle coordinate di P_0. È noto che la velocità dei moti piani irrotazionali di un fluido incompressibile è

$$w(t; z) = \frac{\partial f(t; z)}{\partial z} \,,$$

sulla quale si basa la trattazione di tutti i problemi idrodinamici del piano relativi a moti non vorticosi dei liquidi.

12. Tenendo presente che la derivata logaritmica della funzione σ è la funzione ellittica di Weierstrass ζu, cioè che

$$\zeta u = \frac{d \log \sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} \,,$$

avremo, derivando la ($\substack{*\\*}$) rispetto a z:

$$w(z) = \frac{df}{dz} = \frac{C}{2\pi i} \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0}\right) . \frac{\omega}{\pi i} \frac{1}{z} - \frac{C}{2\pi i} \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\varrho_0{}^2 z}{z_0}\right) . \frac{\omega}{\pi i} \frac{1}{z} + \frac{C_1}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

cioè

$$\text{(V)} \quad \begin{aligned} w(z) &= -\frac{C}{2\pi^2} \frac{\omega}{z} \left\{ \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0}\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\varrho_0{}^2 z}{z_0}\right) \right\} + \frac{C_1}{2\pi i} \frac{1}{z} = \\ &= -\frac{C\omega}{2\pi^2 z} \left\{ \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0}\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{\varrho_0{}^2 z}{z_0}\right) + \frac{2\eta}{\pi i} \log \varrho_0 \right\} . \end{aligned}$$

La velocità di spostamento del vortice sarà allora:

$$w_0 = \left[w(z) - \frac{C}{2\pi i (z - z_0)} \right]_{z=z_0},$$

ossia:

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} \left[w(z) - \frac{C}{2\pi i (z - z_0)} \right] = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\, w(z) - \dfrac{C}{2\pi i}}{z - z_0}.$$

13. Questo limite può calcolarsi applicando la regola de L'Hospital; però è più semplice adoperare il seguente artifizio.

Si ha infatti:

$$w_0 = \frac{C\omega}{2\pi^2 z_0} \zeta \left(\frac{2\omega}{\pi i} \log \varrho_0 \right) + \frac{C}{2\pi i} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{\omega}{\pi i z} \zeta \left(\frac{\omega}{\pi i} \log \frac{z}{z_0} \right) - \frac{1}{z - z_0} \right\} + \frac{C_1}{2\pi i z_0};$$

dalla (3) si ha:

$$z = z_0 e^{\frac{\pi i}{\omega} u},$$

e poichè per ζu vale il seguente sviluppo in un intorno dell'origine $u = 0$ [1]

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{20} \frac{u^3}{3} - \frac{g_3}{28} \frac{u^5}{5} - \dots,$$

ove le costanti g_2 e g_3 (invarianti di ζ) dipendono dai periodi 2ω, $2\omega'$, si avrà:

$$\lim_{u \to 0} \left\{ \frac{\omega}{\pi i z_0} e^{-\frac{\pi i}{\omega} u} \zeta u - \frac{1}{z_0 (e^{\frac{\pi i}{\omega} u} - 1)} \right\} = \frac{1}{z_0} \lim_{u \to 0} \left\{ \frac{\omega}{\pi i} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\omega} u}}{u} + \frac{1}{1 - e^{\frac{\pi i}{\omega} u}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{z_0} \lim_{u \to 0} e^{-\frac{\pi i}{\omega} u} \left\{ \frac{\omega}{\pi i u} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega} u}} \right\} = \frac{1}{z_0} \lim_{u \to 0} \left\{ \frac{\omega}{\pi i u} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega} u}} \right\}.$$

In virtù dello sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega} u}$$

[1] Bianchi. Op. cit. pag. 34.

può così esprimersi:

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega}u} = 1 - \frac{\pi i}{\omega}u + \frac{\left(\frac{\pi i}{\omega}u\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\pi i}{\omega}u\right)^3}{3!} + \dots$$

e poichè per $u \to 0$ possono trascurarsi i termini contenenti potenze di u superiori alla prima, l'espressione precedente si riduce a

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega}u} = 1 - \frac{\pi i}{\omega}u\,,$$

per cui:

$$\frac{1}{z_0}\lim_{u \to 0}\left\{\frac{\omega}{\pi i u} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega}u}}\right\} = \frac{1}{z_0}\lim_{u \to 0}\left\{\frac{\omega}{\pi i u} - \frac{\omega}{\pi i u}\right\} = 0\,,$$

cioè:

$$w_0 = \frac{C\omega}{2\pi^2 z_0}\,\zeta\left(\frac{2\omega}{\pi i}\log\varrho_0\right) + \frac{C_1}{2\pi i\, z_0}\,;$$

ed infine:

$$w_0 = \frac{C}{2\pi i\, z_0}\,\frac{\omega}{\pi}\left\{i\zeta\left(\frac{2\omega}{\pi i}\log\varrho_0\right) - \frac{2\eta}{\pi}\right\}$$

la quale dà la richiestà velocità di spostamento del vortice.

Questa formula mette in rilievo che tale velocità è funzione delle coordinate del vortice P_0, in accordo alle considerazioni fatte in principio di questo paragrafo.

14. Poichè guando l'argomento di ζ è immaginario, ζ assume valori immaginari, il primo termine di w_0 è della stessa forma del secondo. Questo, a sua voltà, si può considerare come la velocità in z_0 dovuta ad un vortice di circolazione C_1, situato nell'origine, e poichè tale moto avviene per circonferenze concentriche all'origine, il vortice si muove di moto circolare uniforme, come, del resto, richiede anche la simmetria del campo.

§ 3. — Azioni dinamiche sulle pareti.

15. Denotiamo con $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario normale ad un elemento ds delle pareti rigide s_1 e s_2, volto verso l'interno del campo; in altri termini assumiamo il detto vettore diretto in quisa che la tangente in ds, orientata nel senso secondo cui si esegue l'integrazione, e la normale predetta costituiscano una coppia congruente alla coppia degli assi cartesiani di riferimento.

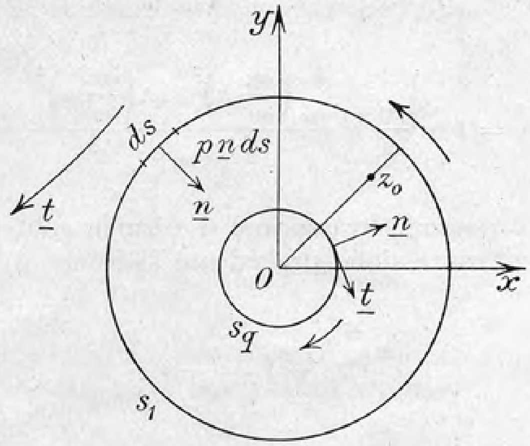

Fig. 3.

Chiamiamo

$$s = s_1 + s_q$$

il contorno complessivo.

16. L'azione dinamica, che il liquido esercita sopra s, è caratterizzata dalla risultante e dal momento delle pressioni dinamiche subite dai singoli elementi ds di s.

Se ds è allora un elemento qualunque di s, $-p\,\boldsymbol{n}\,ds$ sarà la pressione dinamica relativa a tale elemento, per cui la risultante delle pressioni dinamiche subite dagli elementi delle due pareti rigide sarà:

$$\boldsymbol{R} = -\int_s p\,\boldsymbol{n}\,ds \,. \tag{12}$$

17. Come è noto ([1]), per i moti fluidi, se è dovunque identicamente rot $\boldsymbol{v} = 0$ (moto irrotazionale) esiste una funzione del posto e del tempo, $\varphi(P, t)$, potenziale cinetico, tale che

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi \,.$$

In tal caso l'equazione di moto

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\left(U - P - \frac{v^2}{2}\right),$$

([1]) Bruto Caldonazzo. Lezioni di Meccanica razionale. - Circ. Matem. di Catania, editore 1930, pag. 392 e seg.

ove U e P sono rispettivamente il potenziale delle forze di massa e la pressione unitaria, per essere

$$\text{rot grad}\,\varphi = 0\ ,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}v^2 + P - U\ , \qquad \text{(trinomio di Bernoulli)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{grad}\,\varphi = \text{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\ ,$$

diviene

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi\right) = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi = \text{funzione di } t\ .$$

Poichè è

$$P = \frac{p}{\varrho}\ ,$$

la precedente può scriversi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\varrho} - U = \text{funzione di } t\ ,$$

dalla quale, ricavando p, si ottiene:

$$p = -\frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varrho U + \text{funzione di } t\ .$$

Essendo $\varrho U = 0$, la pressione dinamica relativa all'elemento ds, sarà

$$p_{\text{din.}} = -\frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{funzione di } t\ ,$$

per cui la risultante delle pressioni sarà, in virtù della (12):

$$\boldsymbol{R} = -\int_s p\,\boldsymbol{n}\,ds = \frac{1}{2}\varrho\int_s |w|^2\,\boldsymbol{n}\,ds + \varrho\int_s\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\boldsymbol{n}\,ds + \text{funzione di } t\int_s \boldsymbol{n}\,ds\ ,$$

e poichè l'ultimo integrale è nullo, si ha

$$\boldsymbol{R} = -\int_s p\,\boldsymbol{n}\,ds = \frac{1}{2}\varrho\int_s |w|^2\,\boldsymbol{n}\,ds + \varrho\int_s \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\boldsymbol{n}\,ds\ .$$

18. Ciò premesso, posto

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{1}{2}\varrho\int_s |w|^2\,\boldsymbol{n}\,ds = \mathrm{R}_{1x}\,\boldsymbol{i} + \mathrm{R}_{1y}\,\boldsymbol{j}\ ,$$

dove R_{1x}, R_{1y} rappresentano le componenti di $\boldsymbol{R}_1$, si ha per la 1ª formula di Blasius [1]

$$\text{(A)}\qquad \mathrm{R}_{1y} + i\mathrm{R}_{1x} = \frac{1}{2}\varrho\int_s w^2\,dz\ .$$

19. Rimane dopo ciò a calcolare l'integrale che figura a secondo membro. A tale scopo sviluppiamo w in serie di Laurent:

$$(13)\qquad w = \frac{C}{2\pi i(z - z_0)} + w_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

per cui quadrando si ottiene:

$$w^2 = \frac{C^2}{(2\pi i)^2(z - z_0)^2} + \frac{2Cw_0}{2\pi i(z - z_0)} + w_0^2 + \frac{2A_1C}{2\pi i} + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \ldots\ ;$$

si ha allora

$$\mathrm{R}_{1y} + i\mathrm{R}_{1x} = \frac{1}{2}\varrho\,\frac{2Cw_0}{2\pi i}\,2\pi i = \varrho C w_0\ .$$

20. Analogamente, ponendo

$$\boldsymbol{R}_2 = \varrho\int_s \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\boldsymbol{n}\,ds = \mathrm{R}_{2x}\,\boldsymbol{i} + \mathrm{R}_{2y}\,\boldsymbol{j}\ ,$$

(1) H. Blasius: «Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik». [Zeitschr. f. Math. und Phys.] Vol. 58 (1910), pag. 90.

poichè ψ sul contorno è zero, la precedente può scriversi

$$\boldsymbol{R}_2 = \varrho \int_s \frac{\partial f}{\partial t} \boldsymbol{n} \, ds \, ,$$

ovvero

$$\boldsymbol{R}_2 = \varrho \frac{d}{dt} \int_s f \boldsymbol{n} \, ds \, .$$

I coseni direttori della tangente sono:

$$\cos(tx) = \frac{\partial x}{\partial s} \, , \qquad \cos(ty) = \frac{\partial y}{\partial s}$$

e, quindi, quelli della normale:

$$\cos(nx) = -\frac{\partial y}{\partial s} \, , \qquad \cos(ny) = \frac{\partial x}{\partial s} \, .$$

Allora si ha:

$$\mathrm{R}_{2x} = -\varrho \frac{d}{dt} \int_s f \frac{\partial y}{\partial s} ds \, ,$$

$$\mathrm{R}_{2y} = \varrho \frac{d}{dt} \int_s f \frac{\partial x}{\partial s} ds \, .$$

Moltiplicando la prima per $-i$ e sommando membro a membro si ottiene:

$$\mathrm{R}_{2y} - i\mathrm{R}_{2x} = \varrho \frac{d}{dt} \int_s f(dx + i\, dy) = \varrho \frac{d}{dt} \int_s f \, dz \, .$$

Integrando per parti l'ultimo integrale si ha:

$$\int_s f \, dz = [fz]_s - \int_s z \, df \, , \tag{14}$$

per cui la formula precedente può scriversi:

$$\mathrm{R}_{2y} - i\mathrm{R}_{2x} = \varrho \frac{d}{dt} \left\{ [fz]_s - \int_s z \frac{df}{dz} dz \right\}. \tag{15}$$

Dalla (14) si ha:

$$[fz]_s = \int_s (f\,dz + z\,df)$$

ed essendo la forma differenziale lineare un differenziale esatto di una funzione non uniforme, segue che

$$[fz]_s = \text{costante}$$

per cui la (15) diviene:

$$\mathrm{R}_{2y} - i\mathrm{R}_{2x} = -\varrho \frac{d}{dt} \int_s z\,w\,dz\,. \tag{B}$$

21. Tenendo presente la (13) che dà lo sviluppo in serie di Laurent di w, si ha:

$$z\,w = \frac{C}{2\pi i} \frac{z}{z - z_0} + w_0\,z + A_1\,z(z - z_0) + \ldots = \frac{Cz_0}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} + \frac{C}{2\pi i} + w_0\,z + \ldots$$

Conseguentemente:

$$\mathrm{R}_{2y} - i\mathrm{R}_{2x} = -\varrho \frac{d}{dt} \int_s \frac{Cz_0}{2\pi i} \frac{dz}{z - z_0} =$$

$$= -\varrho \frac{d}{dt} \left(\frac{Cz_0}{2\pi i} 2\pi i \right) = -\varrho \frac{d}{dt} (Cz_0) = -\varrho C (\dot{x}_0 + i\dot{y}_0) = -\varrho C (u_0 + iv_0)\,,$$

donde:

$$\mathrm{R}_{2y} + i\mathrm{R}_{2x} = -\varrho C (u_0 - iv_0) = -\varrho C\,w_0\,.$$

Ne segue che *la risultante delle pressioni sul contorno complessivo è nulla.*
È, infine, manifesto che *il momento risultante rispetto all'origine è anche nullo.*

§ 4. — Generalizzazioni.

22. Consideriamo la corona K_n, compresa fra le circonferenze di raggi $\frac{1}{q^{n-1}}$ e $\frac{1}{q^n}$, contenente il vortice z_n.

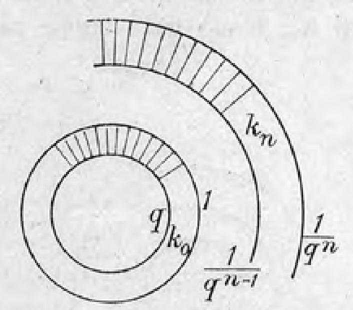

Fig. 4.

Trasformiamo le dimensioni lineari nel rapporto

$$\frac{1}{q^n} : 1 = q^{-n}$$

ed attribuiamo al vortice la circolazione $(-1)^n$.

La funzione (1) ha la ψ nulla sui contorni limitanti la detta corona K_n.

Infatti, si ha, per $|z| = q^{-n}$:

$$\left|\frac{z - z_{2n}}{(z - z_{2n+1})\varrho_0}\right| = \left|\frac{q^{-n} e^{i\vartheta} - \varrho_0 e^{i\vartheta_0} q^{-3n}}{\left(q^{-n} e^{i\vartheta} - \frac{e^{i\vartheta_0}}{\varrho_0} q^n\right)\varrho_0}\right| = \left|\frac{q^{-n} e^{i\vartheta} - \varrho_0 e^{i\vartheta_0} q^{-3n}}{e^{i(\vartheta_0+\vartheta)} \frac{q^{2n}}{\varrho_0} (\varrho_0 e^{-i\vartheta_0} q^{-3n} - q^{-n} e^{-i\vartheta})\varrho_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{e^{i(\vartheta_0+\vartheta)} q^{2n}}\right| \cdot \left|\frac{q^{-n} e^{+i\vartheta} - \varrho_0 e^{+i\vartheta_0} q^{-3n}}{q^{-n} e^{-i\vartheta} - \varrho_0 \bar{e}^{i\vartheta_0} q^{-3n}}\right| = q^{-2n}$$

risultato conforme a quello trovato precedentemente.

Analogamente per $|z| = q^{-n+1}$.

Concludiamo dunque che: quello che accade nella corona K_0, che contiene il vortice z_0, accade nella corona K_n, compresa fra le circonferenze di raggi $\frac{1}{q^{n-1}}$, $\frac{1}{q^n}$, contenente il vortice z_n, purchè le dimensioni lineari si trasformino nel rapporto $\frac{1}{q^n} : 1 = q^{-n}$ e al vortice si attribuisca la circolazione $(-1)^n$.

23. In particolare la risultante $\boldsymbol{R}_1$ delle azioni dinamiche subite dalla circonferenza s_q di raggio q^{-1}, in quanto limita esternamente K_0 è eguale e contraria alla reazione che la stessa circonferenza subisce in quanto limita internamente K_1.

Questa risultante a sua ovlta è eguale e contraria a quella subita dalla circonferenza di raggio q^{-2} in quanto limita esternamente K_1. Quest'ultima risultante quindi è eguale ad $\boldsymbol{R}_1$.

Con lo stesso ragionamento, passando alle successive corone, $\boldsymbol{R}_1$ è eguale alla risultante delle azioni dinamiche subite dalla circonferenza di raggio q^{-n}, limite esterno di K_n, e ciò vale anche al crescere indefinitamente di n verso $+\infty$.

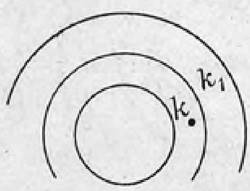

Fig. 5.

D'altra parte la (V) che dà $w(z)$ in K_0 è atta ad esprimere la velocità anche sul contorno esterno di K_n sul quale

$$z = q^{-n} e^{i\zeta}$$

per cui le ζ di Weierstrass hanno l'argomento che al crescere di n si incrementa di $n\omega'$.

INDICE

CAPITOLO I.

La funzione.

CAPITOLO II.

Applicazione al moto d'un liquido provocato da un vortice.