Pubblicazione infrasemestrale
Spedizione in abbonamento postale
GRUPPO IV
Serie IV
Volume XLIV

4 - 5

Dicembre 1966

Periodico di matematiche

storia . didattica . filosofia

Bologna
NICOLA ZANICHELLI
Editore

Risposta alla questione n. 851.

Risolvere il sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 = Kx + (K-1)y + 1 - K \\ y^2 = -Kx + (1-K)y + K \end{cases}$$

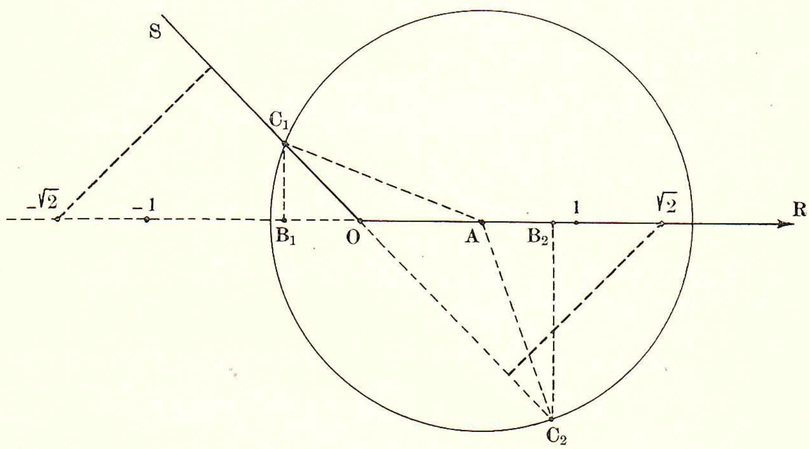
e determinare per quali valori del parametro K le soluzioni (che dipendono da K) risultano costituite da coppie di valori x ed y concordi oppure discordi.

Si richiede una risoluzione geometrica elementare.

1. Si costruisca (v. fig.) un angolo $\widehat{ROS}$ di 135° e si stabilisca sulla retta del suo lato OR il verso positivo come indicato in figura. Fissato, allora, il punto A tale che sia

$$(2\qquad \overline{OA} = 2K - 1,$$

siano C_1 e C_2 le intersezioni della circonferenza di centro A e raggio 1 con la retta dell'altro lato dell'angolo. Detti B_1 e B_2 le



proiezioni, rispettivamente, di C_1 e C_2 sulla retta orientata OR, le soluzioni del sistema (1) sono le misure delle due coppie di segmenti orientati:

$$(3)\qquad \begin{cases} B_1A = x_1 \\ \overline{B_1O} = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2A = x_2 \\ \overline{B_2O} = y_2 . \end{cases}$$

Come si rileva dalla figura, il problema è possibile, e il sistema (1) ammette soluzioni, se

$$|\, 2K - 1 \,| \leq \sqrt{2},$$

cioè se

$$-\sqrt{2} \leq 2K - 1 \leq \sqrt{2},$$

ovvero se

$$(4) \qquad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq K \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

2. Infatti, sommando e sottraendo membro a membro le equazioni (1), si ottiene il sistema

$$(5) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 2Kx + 2(K-1)y - 2K + 1 \end{cases}$$

la cui seconda equazione, trasportando i termini in x al primo membro, quelli in y al secondo ed aggiungendo ad ambo i membri K^2, può scriversi

$$x^2 - 2Kx + K^2 = y^2 + 2(K-1)y + K^2 - 2K + 1$$

cioè

$$(x-K)^2 = [y + (K-1)]^2$$

donde si traggono le due equazioni lineari

$$x - K = -y - K + 1, \qquad x - K = y + K - 1$$

ossia

$$(6) \qquad x + y = 1, \qquad x - y = 2K - 1.$$

Ne segue che il sistema (5), e quindi anche quello dato (1), è equivalente ai due sistemi quadratici

$$(7) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad (8) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 2K - 1. \end{cases}$$

Geometricamente ciò significa che le soluzioni del sistema dato (1) si possono ottenere secondo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con le due rette (6).

Il sistema (7) fornisce le due soluzioni fisse del sistema dato e cioè: $x = 0$, $y = 1$ e $x = 1$, $y = 0$. Invece il sistema (8), poichè la retta $x - y = 2K - 1$, al variare di K, si sposta parallelamente alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, fornisce le due soluzioni dipendenti da K.

Questo sistema (8), che interpretato elementarmente traduce il problema geometrico della determinazione dei cateti di un triangolo rettangolo di cui siano noti l'ipotenusa e la differenza dei cateti, convenendo di considerare segmenti orientati, giustifica la costruzione indicata.

Infatti, con riferimento alle (2), (3) e al sistema (8), si ha:

$$x^2 + y^2 = \overline{B_1A}^2 + \overline{B_1O}^2 = \overline{B_1A}^2 + \overline{B_1C_1^2} = \overline{AC_1^2} = 1$$

e

$$x - y = \overline{B_1A} - \overline{B_1O} = \overline{OA} = 2K - 1.$$

3. L'intervallo di variabilità di $2K - 1$, cioè $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ si compone dei tre intervalli successivi

$$(-\sqrt{2}, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, \sqrt{2}).$$

Si rileva facilmente, dall'esame della figura, che:

$$\text{per} \quad -\sqrt{2} \leq 2K - 1 < -1, \quad \text{cioè per} \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq K < 0,$$

$\overline{BA}$ e $\overline{BO}$ sono discordi;

$$\text{per} \quad -1 < 2K - 1 < 1, \quad \text{cioè per} \quad 0 < K < 1,$$

$\overline{BA}$ e $\overline{BO}$ sono concordi;

$$\text{e per} \quad 1 < 2K - 1 \leq \sqrt{2}, \quad \text{cioè per} \quad 1 < K \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

$\overline{BA}$ e $\overline{BO}$ sono discordi.

Concludendo, le soluzioni del sistema (1),

$$\text{per} \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq K < 0 \quad \text{oppure per} \quad 1 < K \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

sono coppie di valori *discordi*, mentre per

$$0 < K < 1$$

sono coppie di valori *concordi*.

Questa risposta è dovuta al prof. S. Nicotra. Altre pervennero dai prof. G. Andolfato, P. Costa, F. Crea.

Risposta al tema n. 852.

In un piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali x, y è data la famiglia $\mathfrak{F}$ semplicemente infinita di coniche:

$$(1) \qquad xy - 2t(x + y) + t^2(x + y + 1) = 0$$

essendo t il parametro reale che determina la conica nella famiglia $\mathfrak{F}$.