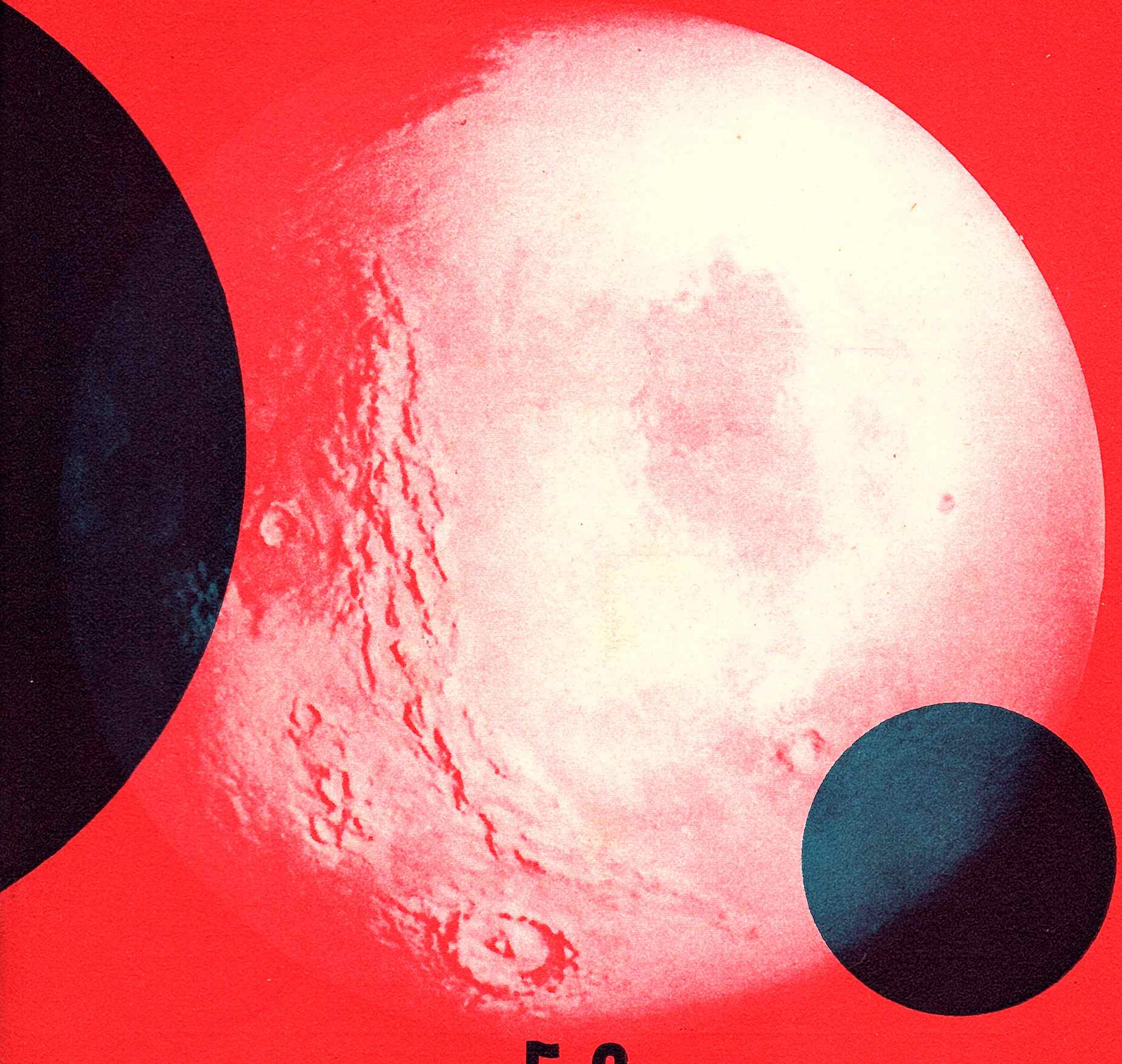
LA SCIENZA E I GIOVANI



Anno XI - 1962 5-6 LE MONNIER

LA SCIENZA E I GIOVANI

a cura di

ROBERTO GIANNARELLI, SALVATORE NICOTRA** e **GIUSEPPE SPINOSO

PER GLI STUDENTI DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI
E PER I CULTORI DI MATEMATICA E FISICA ELEMENTARI

ANNO XI – N. 5-6 NOVEMBRE-DICEMBRE 1962

SOMMARIO

La Rivista si pubblica in 6 fascicoli annuali di pagg. 36 ciascuno, nei mesi di febbraio, marzo, aprile, maggio, novembre e dicembre, in coincidenza con il periodo di maggiore raccoglimento scolastico. Inviare articoli, note, quesiti al PROF. ROBERTO GIANNARELLI, VIA G. BAUSAN, 12 – ROMA (918).

I manoscritti, anche se non pubblicati, non si restituiscono.

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO:

QUOTA PER L'ANNO 1963: L. **1200**
QUOTA PER L'ANNO 1963 E IL FASC. 5-6 DELL'ANNO 1962: L. **1500**

I versamenti devono essere effettuati direttamente alla Casa Editrice LE MONNIER (c. c. Postale 5/2173)

DIRETTORE RESPONSABILE: ROBERTO GIANNARELLI

FIRENZE, STABILIMENTI TIPOGRAFICI «ENRICO ARIANI» E «L'ARTE DELLA STAMPA»

Inscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 1408 in data 13-3-1961

Perchè − × − fa +?

Fig. 1. – Karl Friedrich Gauss (1777-1855) matematico, fisico, astronomo e geodeta tedesco, è considerato uno dei più grandi geni scientifici di tutti i tempi. Fu chiamato il « princeps mathematicorum ». Della sua prodigiosa produzione scientifica ricorderemo qui la parte dedicata alle ricerche nel campo dell'aritmetica e dell'algebra. A lui si deve la prima dimostrazione rigorosa (1799) del *teorema fondamentale dell'algebra* (« ogni polinomio a una variabile può essere decomposto nel prodotto di fattori reali di primo o di secondo grado »). Scoprì (pare a 17 anni) la famosa condizione necessaria e sufficiente cui devono soddisfare i fattori primi di un numero n perchè la divisione della circonferenza in n parti eguali (*ciclotonia*) possa effettuarsi con la riga e il compasso.

1. – Quando si vuole ampliare un campo numerico, dopo avere esteso il concetto di numero ottemperando alla relazione d'isomorfismo aritmetico, si cerca di definire le operazioni fondamentali in modo che siano conservate le loro proprietà formali: è, questo, il cosiddetto *principio di permanenza o della conservazione delle proprietà formali di* Peacock - Hankel. Così, quando s'introducono i numeri razionali relativi, convenendo che i numeri positivi si identifichino con i numeri assoluti, il campo dei numeri positivi risulta isomorfo a quello dei numeri assoluti. Allora si è condotti a definire come prodotto di due numeri positivi il numero positivo avente per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab. \tag{1}$$

Per definire ora il prodotto di un numero negativo per un numero positivo, prendiamo come guida il principio di permanenza. Consideriamo l'espressione:

$$[(+a) + (-a)] \cdot (+b).$$

Volendo che sia rispettata la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, occorre che sia:

$$[(+a) + (-a)] \cdot (+b) =$$
$$= (+a) \cdot (+b) + (-a) \cdot (+b).$$

Il primo membro della precedente eguaglianza è $0 \cdot (+b)$, ossia è zero per la legge di annullamento. Allora, tenendo conto della (1), l'eguaglianza diventa:

$$0 = +ab + (-a) \cdot (+b),$$

donde segue che $(-a) \cdot (+b)$ è l'opposto di $+ab$, cioè:

$$(-a) \cdot (+b) = -ab. \tag{2}$$

Conservando la proprietà commutativa, si ha invece:

$$(+a) \cdot (-b) = (-b) \cdot (+a)$$

e poichè, per la (2), è:

$$(-b) \cdot (+a) = -ba = -ab\,,$$

ne segue che è anche:

$$(+a) \cdot (-b) = -ab\,. \tag{3}$$

Analogamente, considerata l'espressione:

$$[(+a) + (-a)] \cdot (-b)\,,$$

si ha, infine:

$$[(+a) + (-a)] \cdot (-b) = \\ = (+a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (-b)\,,$$

ossia:

$$0 = (+a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (-b)$$

donde segue, per la (3), che:

$$(-a) \cdot (-b) = +ab\,. \tag{4}$$

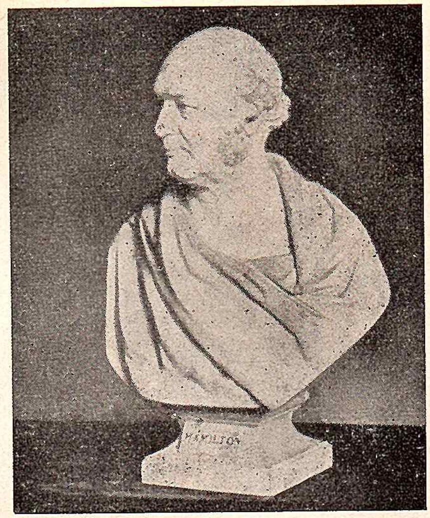


Fig. 2. – William Rowan Hamilton (1805-1865) è stato il più grande scienziato irlandese. Matematico originale e bizzarro, introdusse, fra l'altro, il « concetto di 'vettore' (vedi « Dizionario » di questo fascicolo) usando per la prima volta questo termine nel 1845 in un articolo del *Quarterly Journal*, in cui distingue nelle grandezze una parte « scalare » (vedi pure « Dizionario ») puramente numerica e una parte « vettoriale », dotata di direzione.

Le (1), (2), (3), (4) giustificano la regola dei segni del prodotto di due numeri relativi. La quale regola, anzichè essere presentata come « definizione » viene così desunta, naturalmente onde conseguire determinati risultati, da un principio razionale.

2. – L'assunzione del principio di permanenza come guida per definire le operazioni ha carattere generale. Non sempre, però, riesce possibile conservare tutte le proprietà formali. Per esempio, nel campo dei numeri naturali la legge di annullamento della somma, ossia la legge: una somma è nulla allora e solo che sono nulli gli addendi; cioè, in simboli:

$$\text{se} \quad a + b = 0 \quad \text{è} \quad a = 0 \quad \text{e} \quad b = 0$$

$$\text{e se} \quad a = 0 \quad \text{e} \quad b = 0 \quad \text{è} \quad a + b = 0\,,$$

non si conserva nel campo dei numeri razionali relativi. Allora si cerca di conservare almeno le proprietà formali *essenziali*. Per la moltiplicazione esse sono: la proprietà commutativa, la proprietà associativa, la proprietà distributiva rispetto alla somma, la legge di annullamento e la proprietà espressa dall'eguaglianza:

$$a \cdot 1 = a\,,$$

ossia: 1 è il numero indifferente del prodotto.

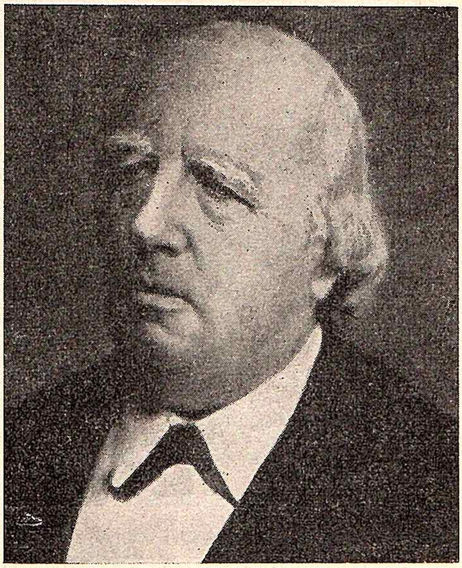


Fig. 3. – Karl Weierstrass (1815-1897). Matematico tedesco che ha dato geniali contributi a diverse parti delle matematiche superiori. Molti teoremi vanno sotto il suo nome sia nell'analisi infinitesimale e sia nella teoria delle funzioni. Nei suoi studi dimostra di essere soprattutto un logico: procede lentamente, sistematicamente, passo passo e si sforza sempre di raggiungere la forma definitiva.

Il prodotto di due numeri complessi, per esempio, si può stabilire in base alla conservazione delle proprietà formali essenziali della moltiplicazione:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = \\ = (ac - bd) + i(ad + bc) .$$

Si dimostra che, ove si vogliano mantenere tutte le proprietà formali essenziali, non possono ottenersi che corpi numerici a due unità, isomorfi al corpo dei numeri complessi ordinari.

Gauss, nel 1831, aveva scoperto che una nuova estensione della nozione di numero non poteva aversi senza che si perdessero alcune delle proprietà formali essenziali delle operazioni. Nel 1853 G. R. Hamilton svolse la teoria d'un corpo di numeri complessi a 4 unità, i *quaternioni*, dove il prodotto non gode della proprietà commutativa. E nel 1867 E. Hankel dimostrò che, all'infuori del corpo reale e dei numeri complessi ordinari, non si hanno altri corpi di numeri complessi dove valgano tutte le proprietà formali essenziali della moltiplicazione.

Negli altri corpi numerici ipercomplessi a moltiplicazione associativa esistono sempre numeri diversi da zero che moltiplicati fra loro danno per prodotto zero: sono i numeri che Weierstrass chiamò *divisori dello zero*.

Allora, chiamando *associativo* o *commutativo* un corpo di numeri complessi (nel quale valga la legge distributiva) secondo che in esso sussista la proprietà associativa o la commutativa; e chiamandolo *hankeliano* se in esso non vi sono divisori dello zero diversi da zero, si hanno i due importanti risultati stabiliti nel 1873 da G. Frobenius:

1) *Non si hanno corpi di numeri complessi associativi e hankeliani a più di 4 unità;*

2) *Si hanno soltanto tre corpi associativi e hankeliani: quello dei numeri reali, quello dei numeri complessi ordinari e quello dei quaternioni* (1).

Salvatore Nicotra.

---

(1) Consultare l'opera di G. Scorza, *Corpi numerici ed Algebre*, Ed. Principato, Messina, 1921.