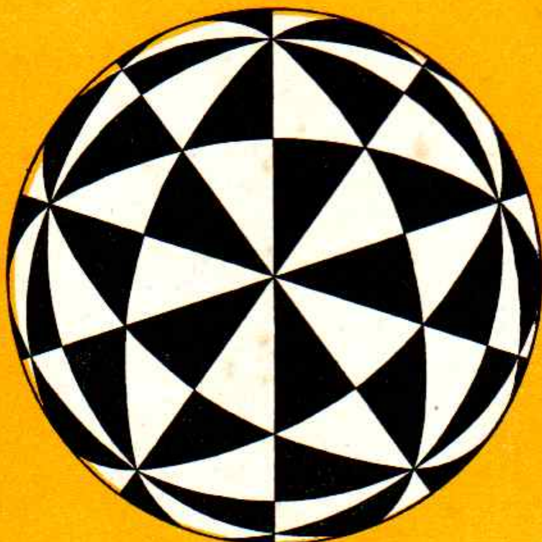
LA SCIENZA PER I GIOVANI

Numeri - Figure - Materia - Energia



Anno VI **7-8** 1956-57

CASA EDITRICE FELICE LE MONNIER - FIRENZE

LA SCIENZA PER I GIOVANI

SUPPLEMENTO DI "ARCHIMEDE"

a cura di

R. GIANNARELLI e B. GIANNELLI

PER GLI STUDENTI DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI
E PER I CULTORI DI MATEMATICA E FISICA ELEMENTARI

ANNO VI – N. 7-8 MAGGIO-GIUGNO 1957

SOMMARIO

LA DIREZIONE – *Un genio dell'esperimento e dell'intuizione: Michele Faraday* Pag. 97

S. NICOTRA – *La risultante di due equazioni quadratiche* 105

S. SACCHETTI – *Tema di Topografia, seconda sessione 1955-56* 108

U. G. ZANOBINI – *Le lenti e il loro potere* 116

B. FERAUDI – *Partenza per la Luna* 124

Da libri vecchi e nuovi – Palestra delle gare – Questioni da risolvere – Risposte .

La Rivista si pubblica in 8 fascicoli annuali di pagg. 16 ciascuno. Inviare articoli, note, quesiti al prof. Roberto Giannarelli, Via G. Bausan, 12 – Roma (918).
I manoscritti, anche se non pubblicati, non si restituiscono.

(La figura centrale della prima pagina della copertina riproduce un disegno di Mr. H. M. S. Coxeter – *Scripta mathematica*, 1936, pag. 756 – ottenuto ripartendo la superficie di una sfera in triangoli mediante i 15 piani di simmetria determinati dagli spigoli opposti di un icosaedro).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO:

ANNUALE PER L'ITALIA L. 500
PER L'ESTERO L. 700 – UN NUMERO SEPARATO L. 80

I versamenti devono essere effettuati direttamente alla Casa Editrice LE MONNIER (c. c. Postale 5/2173)

DIRETTORE RESPONSABILE: ROBERTO GIANNARELLI
FIRENZE, STABILIMENTI TIPOGRAFICI «ENRICO ARIANI» E «L'ARTE DELLA STAMPA»

Inscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 79 in data 5-3-1949

La risultante di due equazioni quadratiche

1. – Siano date le due equazioni di secondo grado ($a \neq 0$, $a' \neq 0$):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a'x^2 + b'x + c' = 0 \tag{1}$$

che supponiamo possibili, cioè con radici reali.

Consideriamo la combinazione lineare, dei primi membri delle (1), avente per moltiplicatori, rispettivamente, $-a'$ e a.

Otteniamo:

$$-a'(ax^2 + bx + c) + a(a'x^2 + b'x + c) = (ab' - a'b)x - (a'c - ac').$$

Dalla precedente identità si trae che, se le (1) hanno una radice comune, essa dev'essere radice dell'equazione

$$(ab' - a'b)x - (a'c - ac') = 0\,. \tag{2}$$

Inversamente, una radice della (2), che sia radice di una delle (1) è anche, per l'identità precedente, radice dell'altra.

Ora, se è $ab' - a'b = 0$, la (2) è possibile se è anche $a'c - ac' = 0$; ed in tal caso, essendo $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, le equazioni (1) hanno le stesse radici. Queste condizioni, evidentemente, sono anche sufficienti perchè, se le equazioni (1) hanno le stesse radici, siccome $\frac{b}{a}$ e $\frac{b'}{a'}$ esprimono entrambi la somma mutata di segno e $\frac{a}{a}$ e $\frac{c'}{a'}$ entrambi il prodotto delle due radici, dovrà essere

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{c'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'},$$

cioè

$$ab' - a'b = 0 \quad \text{e} \quad a'c - ac' = 0\,.$$

Sia, dunque, $ab' - a'b \neq 0$. Allora la (2) ha una sola radice:

$$x = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}\,, \tag{3}$$

e basta esprimere che essa è radice di una delle (1), per es. della prima, per potere affermare che è anche radice dell'altra. Sostituendo, allora, la (3) nella prima delle (1), si ottiene:

$$a\left(\frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}\right)^2 + b\,\frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} + c = 0$$

donde, moltiplicando ambo i membri per $(ab' - a'b)^2$, si ha:

$$a(a'c - ac')^2 + b(a'c - ac')(ab' - a'b) + c(ab' - a'b)^2 = 0$$

cioè

$$a(a'c - ac')^2 + (ab' - a'b)\,[b(a'c - ac') + c(ab' - a'b)] = 0$$

e, infine, semplificando l'espressione in parentesi quadra e raccogliendo a, si ottiene:

$$(a'c - ac')^2 + (ab' - a'b)(b'c - bc') = 0\,.$$

Osservando che è:

$$(a'c - ac')^2 = (ac' - a'c)^2\,,$$

$$ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad b'c - bc' = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix},$$

l'ultima relazione assume la forma:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Essa esprime, dunque, la condizione a cui debbono soddisfare i coefficienti delle due date equazioni (1) *perchè esse abbiano una radice comune.*

Tale relazione si chiama *la* RISULTANTE *delle due equazioni quadratiche* (1).

2. – Applicazioni.

I. Riconoscere che le equazioni

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

hanno una radice comune e trovarla.

Si ha, per la (4):

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (3 - 6)^2 + (-4 + 5)(-24 + 15) = 9 - 9 = 0$$

e per la (3) la radice comune è

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 3}{-4 + 5} = 3\,,$$

com'è facile verificare risolvendo le equazioni date.

II. Determinare K in modo che le equazioni

$$x^2 + 2x + K = 0 \quad , \; x^2 - 5x - 14 = 0$$

abbiano una radice comune.

Dev'essere soddisfatta la condizione:

$$\begin{vmatrix} 1 & K \\ 1 & -14 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K & 2 \\ -14 & 5 \end{vmatrix} = 0 ,$$

la quale, sviluppando i tre determinanti, dà luogo all'equazione:

$$K^2 + 43K + 280 = 0$$

le cui radici sono -8 e -35. Dunque, le date equazioni hanno una radice comune per $K = -8$ (e la radice comune è 2) e per $K = -35$ (e la radice comune è -7), come il lettore può verificare.

III. Sia dato il sistema di due equazioni di 2° grado in due incognite x, y, cioè il sistema di 4° grado:

$$(5) \qquad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + c'y + f' = 0 \end{cases}$$

e proponiamoci di eliminare un'incognita, cioè di determinare la risolvente in x o in y.

La risolvente, per es. in x, si potrebbe ottenere, in base al solito metodo di sostituzione, risolvendo una delle (5) rispetto alla y e sostituendo l'espressione così ottenuta per la y nell'altra. Ma in tal modo si perverrebbe ad un'equazione irrazionale. Si può evitare ciò, procedendo nel modo seguente. Si ordinino le due date equazioni secondo le potenze decrescenti della y; si ottiene:

$$(6) \qquad \begin{cases} Ay^2 + By + C = 0 \\ A'y^2 + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

dove si è posto:

$$(7) \qquad \begin{matrix} A = c \;, & B = bx + c \;, & C = ax^2 + dx + f \\ A' = c' \;, & B' = b'x + c' \;, & C' = a'x^2 + d'x + f' . \end{matrix}$$

Si osservi ora che le radici della risolvente in x sono date da tutti e soli quei valori della x che, associati ciascuno ad un conveniente valore della y dànno altrettante soluzioni del sistema (6). Perciò questa risolvente non è altro che la condizione necessaria e sufficiente perchè le due equazioni di 2° grado in y (6) abbiano almeno una radice comune, cioè è la risultante delle equazioni (6); ossia, per la (4), è l'equazione in x:

$$(AC' - A'C)^2 + (AB' - A'B)(CB' - C'B) = 0$$

la quale, in virtù delle posizioni (7), è di 4° grado. Ne segue che, salvo casi particolari, *la risoluzione di un sistema di due equazioni di secondo grado in due incognite dipende da una equazione di quarto grado in una incognita.*

Salvatore Nicotra.

▼ ▲ ▼ ▲

**.