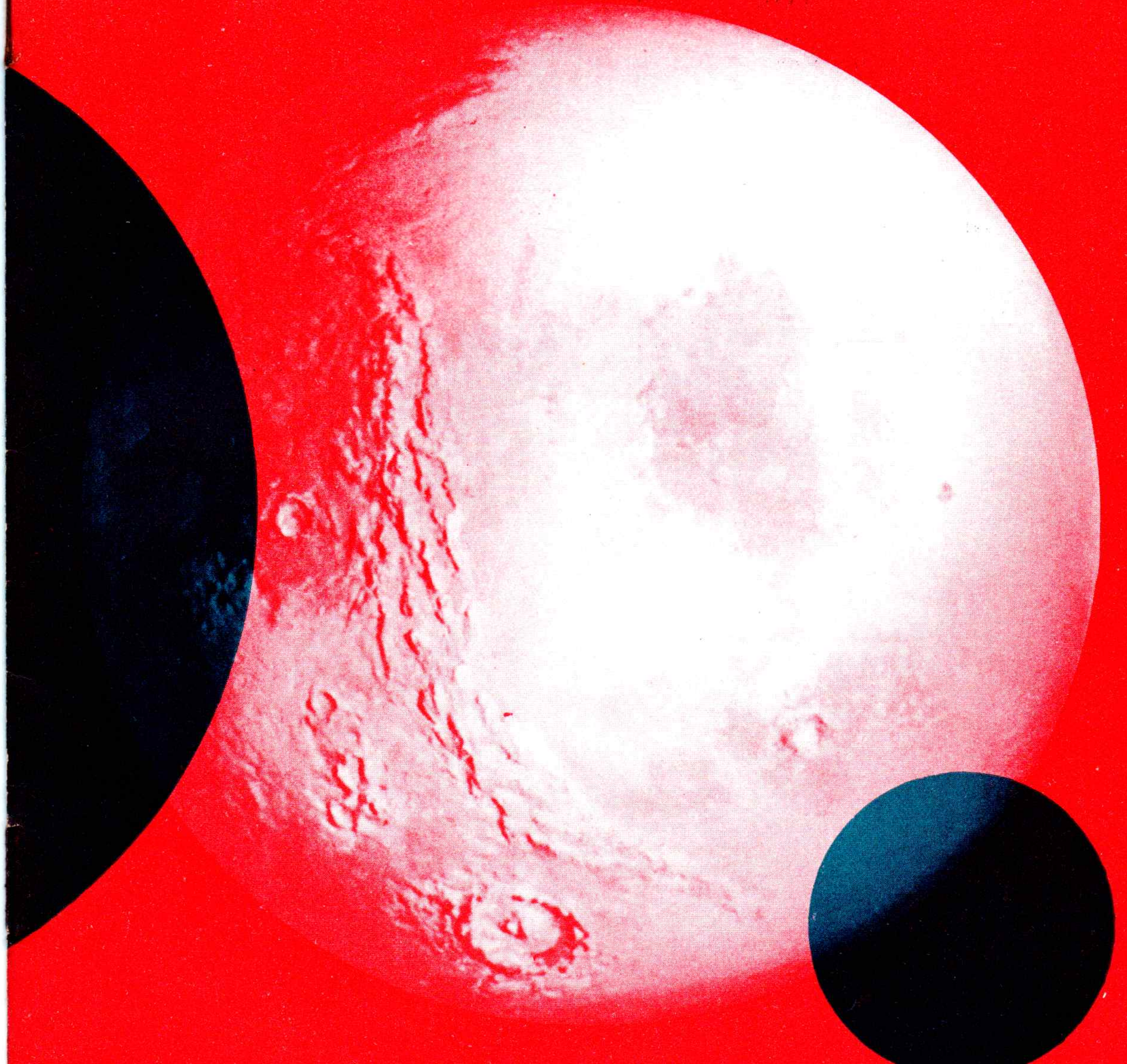
LA SCIENZA E I GIOVANI



Anno X - 1961 2 LE MONNIER

LA SCIENZA E I GIOVANI

SUPPLEMENTO DI "ARCHIMEDE"

a cura di

ROBERTO GIANNARELLI** e **GIUSEPPE SPINOSO

PER GLI STUDENTI DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI
E PER I CULTORI DI MATEMATICA E FISICA ELEMENTARI

ANNO X - N. 2 FEBBRAIO 1961

SOMMARIO

La Rivista si pubblica in 8 fascicoli annuali di pagg. 16 ciascuno. Inviare articoli, note, quesiti al prof. Roberto Giannarelli, Via G. Bausan, 12 - Roma (918).

I manoscritti, anche se non pubblicati, non si restituiscono.

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO:

ANNUALE PER L'ITALIA L. 700
PER L'ESTERO L. 900 - UN NUMERO SEPARATO L. 100

I versamenti devono essere effettuati direttamente alla Casa Editrice LE MONNIER (c. c. Postale 5/2173)

Direttore responsabile: ROBERTO GIANNARELLI
FIRENZE, STABILIMENTI TIPOGRAFICI « ENRICO ARIANI » E « L'ARTE DELLA STAMPA »

Inscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 1408 in data 13-3-1961

LA CIRCONFERENZA DI ROBERVAL[1]

1. Teorema. – *Il luogo dei punti* P *le cui distanze da due punti dati* A *e* B (fig. 1) *verificano l'uguaglianza*

$$\overline{PA}^2 + k \cdot \overline{PB}^2 = l^2 \tag{1}$$

(*essendo* k *un numero positivo qualunque ed* l *il lato d'un quadrato dato*) *è la circonferenza* (*detta circonferenza di* Roberval *generalizzata*) *il cui centro è il punto* C *che divide il segmento* AB *nel rapporto* k *ed il cui raggio* R *ha l'espressione*

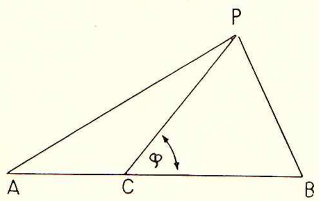


Fig. 1.

$$R = \overline{CP} = \sqrt{\frac{l^2 - (\overline{AC}^2 + k\overline{CB}^2)}{k+1}}. \tag{2}$$

Infatti, se C è il punto di AB tale che

$$AC = k \cdot CB \tag{3}$$

e si congiunge C con P, dai triangoli ACP, BCP indicando con φ l'ampiezza dell'angolo acuto dei due angoli supplementari ACP, BCP, si hanno le relazioni:

$$\overline{PA}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{CP} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\varphi$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CP} \cdot \overline{CB} \cdot \cos\varphi.$$

Moltiplicando la seconda di esse per k e sommandole membro a membro, dopo aver tenuto conto della (3), se ne trae:

$$\overline{PA}^2 + k\overline{PB}^2 = (k+1)\,\overline{CP}^2 + \overline{AC}^2 + k\,\overline{CB}^2.$$

Poichè gli ultimi due termini del secondo membro di quest'ultima sono costanti, se è costante la somma $\overline{PA}^2 + k\overline{PB}^2$, sarà costante, al variare di P, anche il termine $(k+1)\,\overline{CP}^2$, cioè sarà $\overline{CP}$ = costante e pertanto il luogo richiesto è la circonferenza di centro C e raggio $R = \overline{CP}$ dato dalla (2), come si deduce facilmente dall'ultima relazione scritta tenendo presente la (1).

Dalla (3), essendo $AB = AC + CB$, si trae che:

$$\overline{AC} = \frac{k}{k+1}\,\overline{AB}, \quad \overline{CB} = \frac{1}{k+1}\,\overline{AB}$$

e quindi:

$$\overline{AC}^2 + k\overline{CB}^2 = \frac{k^2}{(k+1)^2}\,\overline{AB}^2 + \frac{k}{(k+1)^2}\,\overline{AB}^2 = \frac{k}{k+1}\,\overline{AB}^2.$$

---

(1) La *risoluzione geometrica* o, come anche si suol dire, la *risoluzione sintetica* del tema di maturità scientifica (sessione estiva, 1960) si deduce facilmente, quando si conosca il teorema di Roberval che il professore S. Nicotra dimostra geometricamente in questa nota (N. d. D.).

Pertanto la (2) può mettersi nella forma:

$$R = \overline{CP} = \frac{1}{k+1} \sqrt{(k+1)\, l^2 - k \cdot \overline{AB}^2} \tag{4}$$

dalla quale si deduce che perchè la predetta circonferenza esista occorre che sia:

$$l^2 > \frac{k}{k+1}\, \overline{AB}^2. \tag{5}$$

2. Nel caso particolare in cui sia $k = 1$, C è il punto medio di AB e la (1) diventa:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = l^2$$

e pertanto: *il luogo dei punti* P *per i quali sia costante* (ed uguale ad l^2) *la somma dei quadrati delle loro distanze da due punti dati* A *e* B *è la circonferenza il cui centro è il punto medio di* AB *ed il cui raggio ha l'espressione*:

$$R = \overline{CP} = \frac{1}{2} \sqrt{2l^2 - \overline{AB}^2}$$

come si deduce dalla (4) ponendo $k = 1$.

Tale luogo è detto *circonferenza di Roberval.*

3. La costruzione della circonferenza di Roberval generalizzata, noti AB, k ed l, si effettua nel modo seguente:

Si conduca per B la semiretta formante con BA l'angolo β tale che $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{k}$ (fig. 2). Centro in A e raggio l si intersechi tale semiretta nei punti C e D. Le loro proiezioni E ed F sulla retta AB dànno gli estremi d'un diametro della circonferenza richiesta.

Infatti, si ha, per esempio:

$$\overline{EA}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 = l^2.$$

Ma $\overline{CE} = \overline{BE} \operatorname{tg} \beta = \sqrt{k} \cdot \overline{BE}$ e perciò $\overline{EA}^2 + k\overline{EB} = l^2$.

Perchè tale circonferenza esista occorre che sia:

$$l > \overline{AH}$$

cioè $l > \overline{AB} \operatorname{sen} \beta$, ovvero $l^2 > \overline{AB}^2 \operatorname{sen}^2 \beta$.

Ma:

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{k}{k+1}$$

e quindi

$$l^2 > \frac{k}{k+1} \cdot \overline{AB}^2$$

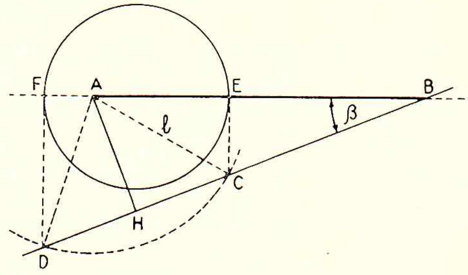


Fig. 2.

che è la condizione a cui devono soddisfare i dati $\overline{AB}$, k ed l perchè la circonferenza di Roberval generalizzata esista: si ritrova, naturalmente, la condizione (5) ottenuta precedentemente nel n. 1.

Salvatore Nicotra.