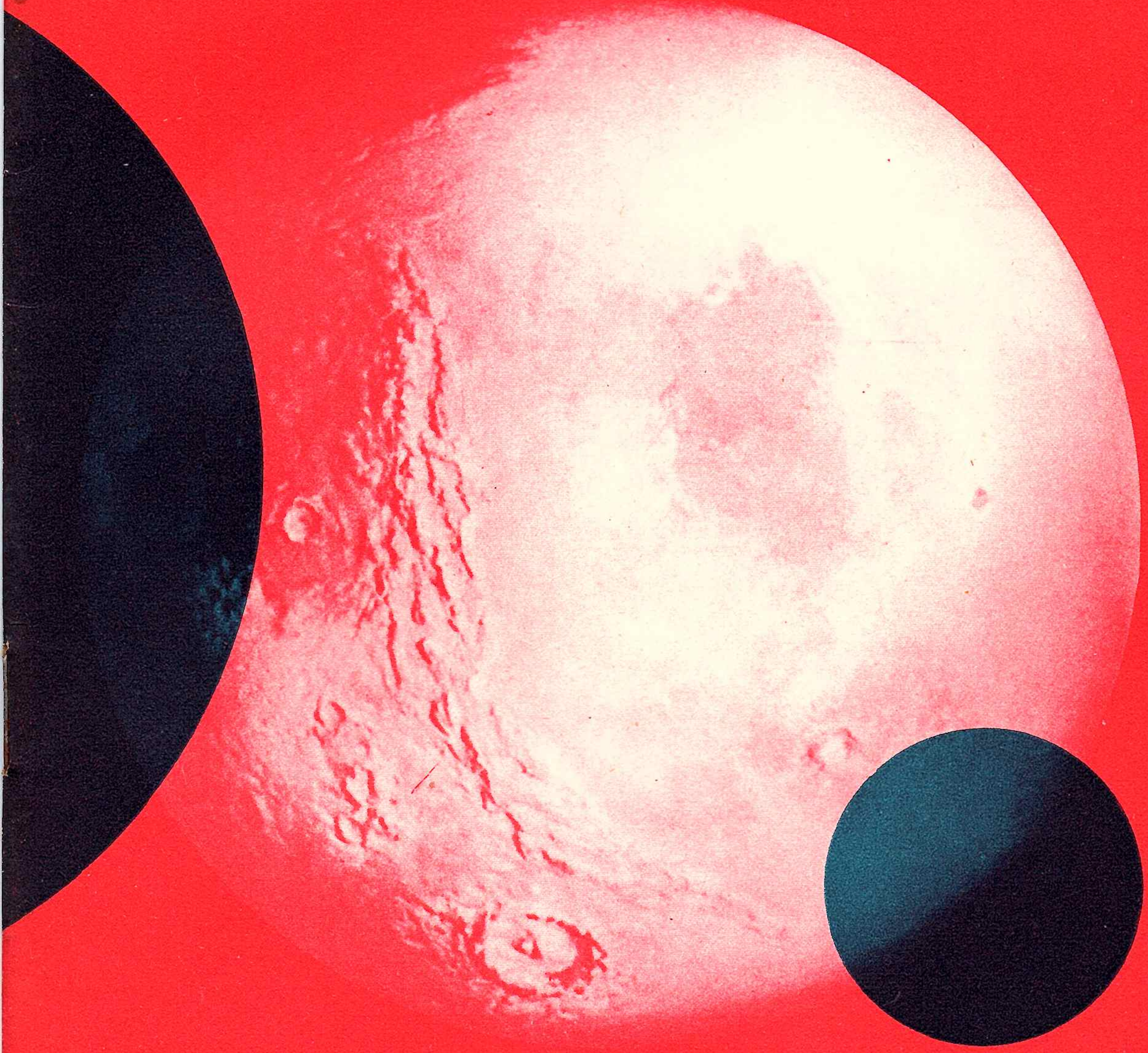
LA SCIENZA E I GIOVANI



Anno XI - 1962 4 LE MONNIER

LA SCIENZA E I GIOVANI

a cura di

ROBERTO GIANNARELLI, SALVATORE NICOTRA e GIUSEPPE SPINOSO

PER GLI STUDENTI DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI
E PER I CULTORI DI MATEMATICA E FISICA ELEMENTARI

ANNO XI – N. 4 MAGGIO 1962

SOMMARIO

La Rivista si pubblica in 6 fascicoli annuali di pagg. 32 ciascuno, nei mesi di febbraio, marzo, aprile, maggio, novembre e dicembre, in coincidenza con il periodo di maggiore raccoglimento scolastico. Inviare articoli, note, quesiti al PROF. ROBERTO GIANNARELLI, VIA G. BAUSAN, 12 – ROMA (918).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO:

ANNUALE PER L'ITALIA L. 900
PER L'ESTERO L. **1200** – UN NUMERO SEPARATO L. **200**

I versamenti devono essere effettuati direttamente alla
Casa Editrice LE MONNIER (c. c. Postale 5/2173)

DIRETTORE RESPONSABILE: ROBERTO GIANNARELLI

FIRENZE, STABILIMENTI TIPOGRAFICI «ENRICO ARIANI» E «L'ARTE DELLA STAMPA»

Inscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 1408 in data 13-3-1961

Un luogo geometrico:

La circonferenza baricentrica

1. Coordinate del baricentro d'un triangolo. – Consideriamo un triangolo qualunque ABC (fig. 1) e riferiamolo ad un sistema cartesiano xOy. Le coordinate dei vertici A, B, C siano:

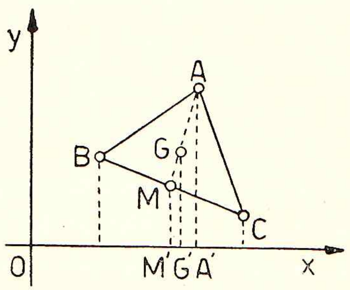


Fig. 1.

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2) \qquad C(x_3, y_3).$$

Detta AM la mediana relativa al lato BC, siano x_0, y_0 le coordinate del baricentro G del triangolo. Le coordinate del punto medio M del segmento BC, com'è noto, sono:

$$\frac{x_2 + x_3}{2} \quad , \quad \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Conduciamo dai punti A, G, M le parallele all'asse y e indichiamo i loro punti d'intersezione con l'asse x, rispettivamente, con A', G', M'.

Dal teorema di Talete, tenendo conto che $GA = 2MG$, si ha:

$$G'A' = 2M'G'. \tag{1}$$

Poichè le ascisse di A', G', M' sono, rispettivamente, quelle di A, G, M, ossia x_1, x_0, $\frac{x_2 + x_3}{2}$, dalla (1) si trae:

$$x_1 - x_0 = 2\left(x_0 - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)$$

cioè

$$x_1 - x_0 = 2x_0 - x_2 - x_3$$

da cui

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}. \tag{2}$$

Analogamente, conducendo dai punti A, G, M le parallele all'asse x, si trova:

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \tag{3}$$

2. Una relazione notevole. – Sia ora P un punto qualsiasi del piano del triangolo ABC (fig. 2) e riferiamo il triangolo ad un sistema cartesiano avente come origine il baricentro G e come semiasse positivo delle ascisse la semiretta GP.

Se x è l'ascissa di P, per la nota formula della distanza di due punti, si hanno le relazioni:

$$\overline{PA}^2 = (x_1 - x)^2 + y_1^2$$
$$\overline{PB}^2 = (x_2 - x)^2 + y_2^2$$
$$\overline{PC}^2 = (x_3 - x)^2 + yx_3^2$$

le quali, sviluppando i quadrati e tenendo conto che

$$\overline{GP} = x$$

e che

$$\overline{GA}^2 = x_1^2 + y_1^2,$$
$$\overline{GB}^2 = x_2^2 + y_2^2,$$
$$\overline{GC}^2 = x_3^2 + y_3^2,$$

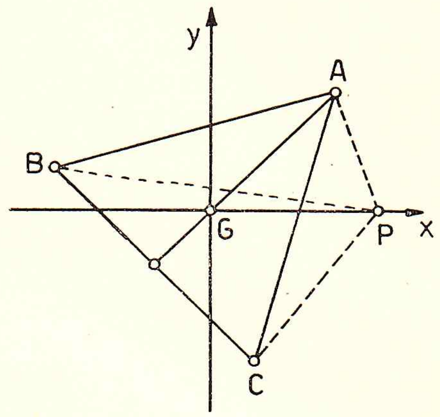


Fig. 2.

assumono la forma:

$$\overline{PA}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GP}^2 - 2x_1x$$
$$\overline{PB}^2 = \overline{GB}^2 + \overline{GP}^2 - 2x_2x$$
$$\overline{PC}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{GP}^2 - 2x_3x\,.$$

Sommandole membro a membro se ne trae:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{GP}^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3)\,.$$

Siccome le coordinate del baricentro G sono nulle, ne segue, per la (2), che è nullo l'ultimo termine del secondo membro di quest'ultima e pertanto essa diventa:

$$(4) \qquad \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{GP}^2\,.$$

Detti, infine, N e Q i punti medi, rispettivamente, di AC e AB, se si tien conto che dal teorema della mediana si trae la relazione:

$$4\,(\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CQ}^2) = 3\,(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2)$$

che, per essere:

$$GA = \frac{2}{3}\,AM \quad , \quad GB = \frac{2}{3}\,BN \quad , \quad GC = \frac{2}{3}\,CQ\,,$$

si può scrivere:

$$3\,(\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2) = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2,$$

allora la (4), in virtù della precedente, dà luogo alla relazione notevole:

$$(5)\qquad \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{1}{3}(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2) + 3\overline{GP}^2$$

la quale, passando dalle misure alle grandezze corrispondenti, esprime la proprietà di equivalenza:

La somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque dai vertici d'un triangolo è equivalente ad un terzo della somma dei quadrati dei lati e del triplo del quadrato della distanza del punto dal baricentro del triangolo.

3. La circonferenza baricentrica. – Dalla relazione precedente segue che: *Il luogo dei punti* P *del piano tali che sia costante la somma dei quadrati delle loro distanze dai vertici d'un dato triangolo* ABC, *cioè il luogo dei punti* P *soddisfacenti la relazione:*

$$(6)\qquad \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = k^2,$$

è la circonferenza (che chiameremo baricentrica) *il cui centro è il baricentro* G *del triangolo e il cui raggio* r *ha la lunghezza?*

$$(7)\qquad r = \overline{GP} = \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - (\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2)}\,.$$

Infatti, poichè il primo termine del secondo membro della relazione (5) è costante, se è costante la somma $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$, sarà costante, al variare di P, anche il termine $3\overline{GP}^2$, cioè sarà $\overline{GP} = \text{cost.}$ e pertanto il luogo in questione è una circonferenza di centro G il cui raggio r, come si ricava dalla (5) tenendo conto della (6), ha la lunghezza data dalla (7).

Inversamente, un punto P della circonferenza indicata verifica la (7) e quindi, tenendo conto della (5), verifica anche la (6) e pertanto è un punto del luogo.

Dalla (7) si deduce che, perchè la circonferenza predetta esista, occorre che sia:

$$k^2 > \frac{1}{3}(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2)\,.$$

Una costruzione della circonferenza baricentrica è la seguente:

Posto

$$z^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2,$$

la (7) si può scrivere

$$r = \sqrt{\left(\frac{k}{3}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{z}{3}\right)^2}\,.$$

Quindi, costruito z, il raggio r richiesto è il cateto d'un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è $\dfrac{k\sqrt{3}}{3}$ ed un cateto è $\dfrac{z}{3}$.

4. Applicazione. – Come applicazione di questo luogo, risolviamo, *per via geometrica*, il tema di maturità scientifica della sessione estiva 1959 (1).

Supposto di avere calcolato, in base ai dati del triangolo (ossia $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\hat{A} = 60^\circ$), gli elementi chiesti dal quesito, e cioè:

$$\overline{BC} = \sqrt{21}\,,\ \overline{BS} = \frac{5\sqrt{21}}{9}\,,\ \overline{SC} = \frac{4\sqrt{21}}{9}\,,\ \cos B = \frac{\sqrt{21}}{7}\,,\ \overline{AS} = \frac{20\sqrt{3}}{9}\,,$$

il problema è questo:

Si trovi sul segmento AS (*fig.* 3) *un punto* P *tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai tre vertici del triangolo dato sia equivalente ad un quadrato di lato* k.

Il punto P da determinare deve dunque soddisfare a due condizioni: deve appartenere al segmento AS e deve verificare la condizione (6), cioè deve anche appartenere alla circonferenza baricentrica di centro G e raggio dato dalla (7). Pertanto, risolvono il problema le eventuali intersezioni di questa circonferenza col segmento AS.

Tenendo conto dei dati e della (6), dalla (7) si trae:

$$r = \overline{GP} = \frac{1}{3}\sqrt{3\,k^2 - 62} \tag{8}$$

onde, perchè la predetta circonferenza luogo esista, occorre che sia:

$$k^2 > \frac{62}{3}\,.$$

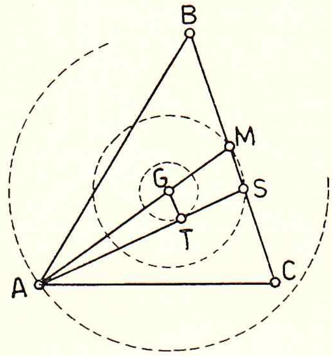


Fig. 3.

Le circonferenze notevoli, di centro G, sono:

quella passante per A (di raggio GA), quella tangente in T al segmento AS (di raggio GT) e quella passante per S (di raggio GS). Si rileva allora che per

$$GT \leq GP \leq GS \tag{9}$$

la circonferenza di raggio GP incontra il segmento AS in due punti e pertanto il problema ammette due soluzioni; mentre per

$$GS \leq GP \leq GA \tag{10}$$

la circonferenza predetta incontra il segmento AS in un punto (perchè l'altro punto d'intersezione appartiene al prolungamento di AS) e quindi il problema ammette una soluzione.

Se si calcolano le lunghezze dei raggi GA, GT, GS (il che, per brevità, affidiamo al lettore volonteroso), si trova:

$$\overline{GA} = \frac{\sqrt{61}}{3}\quad,\quad \overline{GT} = \frac{1}{6}\quad,\quad \overline{GS} = \frac{\sqrt{129}}{9}\,. \tag{11}$$

(1) Vedi *La Scienza e i Giovani*, anno IX, 1960, n.° 4-5.

*

Sostituendo, allora, nelle (9), (10) a GP, GA, GT, GS i loro valori dati dalle (8), (11), si conclude che:

$$\text{per} \quad \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - 62} \leq \frac{\sqrt{129}}{9}\,, \quad \text{cioè per} \quad \frac{\sqrt{83}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{229}}{3}$$

il problema ammette due soluzioni; mentre per

$$\frac{\sqrt{129}}{9} < \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - 62} \leq \frac{\sqrt{61}}{3}\,, \quad \text{ossia per} \quad \frac{\sqrt{229}}{3} < k \leq \sqrt{41}$$

ne ammette una.

5. Altra dimostrazione. – La relazione (4), dalla quale si deduce la (5), può anche ricavarsi nel modo seguente:

Dato il triangolo ABC, siano P un punto qualunque del suo piano (fig. 4) e G il suo baricentro.

Detta AM la mediana relativa al lato BC, si congiunga P con A, B, C, M, G. Dal teorema della mediana, relativo al triangolo BPC, si ha:

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\overline{PM}^2 + 2\overline{BM}^2. \tag{12}$$

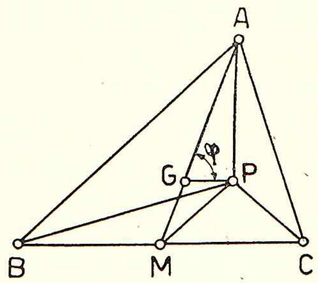


Fig. 4.

Dal teorema del coseno relativo ai triangoli APG, PGM, denotando con φ l'angolo AGP, si hanno, rispettivamente, le relazioni:

$$\overline{PA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{PG}^2 - 2\overline{AG}\cdot\overline{PG}\cos\varphi$$
$$\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{PG}^2 + 2\overline{GM}\cdot\overline{PG}\cos\varphi$$

le quali, tenendo conto della (1) e moltiplicando ambo i membri della seconda per 2, diventano:

$$\overline{PA}^2 = 4\overline{GM}^2 + \overline{PG}^2 - 4\overline{GM}\cdot\overline{PG}\cos\varphi$$
$$2\overline{PM}^2 = 2\overline{GM}^2 + 2\overline{PG}^2 + 4\overline{GM}\cdot\overline{PG}\cos\varphi\,.$$

Sommando membro a membro queste ultime si ha:

$$\overline{PA}^2 + 2\overline{PM}^2 = 6\overline{GM}^2 + 3\overline{PG}^2. \tag{13}$$

Applicando ancora il teorema della mediana al triangolo GBC, si ottiene:

$$\overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 2\overline{GM}^2 + 2\overline{BM}^2$$

che si può scrivere:

$$2\overline{BM}^2 = \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 - 2\overline{GM}^2. \tag{14}$$

Allora, sommando le (12), (13), (14) e poi tenendo presente la (1), se ne deduce la (4).

Salvatore Nicotra.