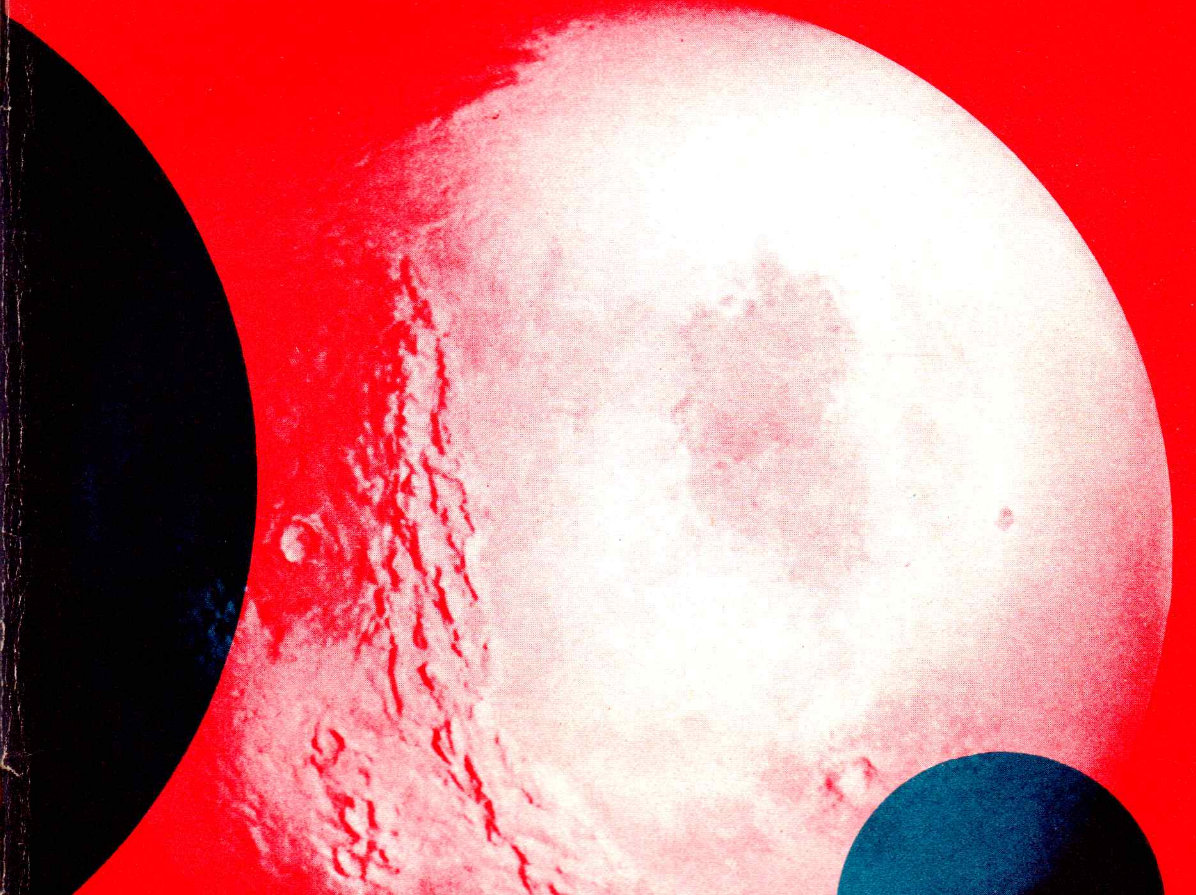
LA SCIENZA E I GIOVANI



Anno XII - 1963 3-4 LE MONNIER

LA SCIENZA E I GIOVANI

a cura di

ROBERTO GIANNARELLI, SALVATORE NICOTRA e GIUSEPPE SPINOSO

PER GLI STUDENTI DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI
E PER I CULTORI DI MATEMATICA E FISICA ELEMENTARI

ANNO XII - N. 3-4 MARZO-GIUGNO 1963

SOMMARIO

La Rivista si pubblica in 6 fascicoli annuali, di complessive pagine 216, nei mesi di gennaio, febbraio, marzo, aprile, novembre e dicembre, in coincidenza con il periodo di maggiore raccoglimento scolastico. Inviare articoli, note, quesiti al PROF. ROBERTO GIANNARELLI, VIA G. BAUSAN, 12 – ROMA (918).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO:

QUOTA PER L'ANNO 1963: L. **1200**
QUOTA PER L'ANNO 1963 E IL FASC. 5-6 DELL'ANNO 1962: L. **1500**

I versamenti devono essere effettuati direttamente alla
Casa Editrice LE MONNIER (c. c. Postale 5/2173)

DIRETTORE RESPONSABILE: ROBERTO GIANNARELLI

FIRENZE, STABILIMENTI TIPOGRAFICI «ENRICO ARIANI» E «L'ARTE DELLA STAMPA»

Inscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 1408 in data 13-3-1961

Corrispondenze geometriche

1. Che cosa sono i punti e le rette all'infinito. – Più rette d'un piano passanti per un punto *P* (fig. 1) hanno una proprietà comune: quella di « appartenere » allo stesso punto.

Anche più rette parallele (fig. 2) hanno una proprietà comune: quella di avere la stessa « direzione ». Ebbene, invece di dire che le rette hanno *la stessa direzione*, diremo che esse hanno *lo stesso punto all'infinito* (o *punto improprio*), o che *s'incontrano nello stesso punto all'infinito.*

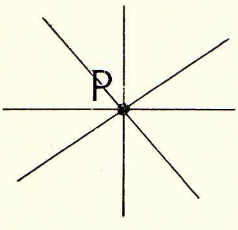


Fig. 1.

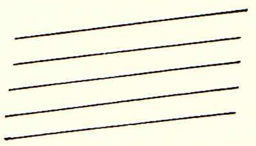


Fig. 2.

E poichè una retta determina una direzione, ne segue che una retta fissa un punto improprio, che è comune a tutte le rette ad essa parallele.

Con questa convenzione, si considerano come punti d'una retta, non solo i punti intuitivi o *propri* della Geometria elementare, ma anche la *direzione* della retta, alla quale direzione si dà il nome di *punto improprio* (o *punto all'infinito*). Allora, potremo dire che due rette distinte d'un piano hanno *sempre* un punto comune: *proprio*, se si secano nel senso della Geometria elementare; *improprio*, se sono parallele. Ne segue ancora che: *congiungere un punto proprio* P (fig. 3) *con un punto improprio d'una retta* u (ossia con una direzione *u*) *vuol dire condurre da* P *la parallela* p *ad* u.

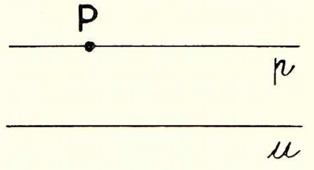


Fig. 3.

Dato un piano α, i punti impropri delle rette di α costituiscono una figura chiamata *retta impropria* o *retta all'infinito* del piano α.

2. Forme geometriche. – Ciò premesso, consideriamo le seguenti figure dette *forme geometriche.*

Chiamasi *retta punteggiata*, o semplicemente *punteggiata*, l'insieme di tutti i punti appartenenti ad una retta, compreso il suo punto improprio; la retta dicesi il *sostegno* della punteggiata. In altri termini, la punteggiata è una retta considerata come la classe di tutti i suoi punti.

Chiamasi *piano punteggiato*, l'insieme di tutti i punti di un piano. Ossia, un piano punteggiato è un piano considerato come la classe dei suoi punti. Il piano ne è il *sostegno.*

Chiamasi *fascio di rette*, l'insieme di tutte le rette d'un piano passanti per un punto. Se il punto è proprio, si ha il *fascio proprio di rette* (fig. 1); se il punto è improprio, si ha il *fascio improprio di rette* (che è un fascio di rette parallele) (fig. 2).

Si chiama *stella di rette*, l'insieme di tutte le rette dello spazio passanti per un punto. Il punto ne è il *sostegno.*

3. Operazioni geometriche. – *Proietare da un punto* S, *detto centro di proiezione*, una figura composta di punti, significa condurre le rette che congiungono S coi punti della figura.

Secare con una retta s, detta *trasversale*, una figura piana composta di rette, significa determinare i punti comuni ad s ed a ciascuna delle rette della figura. *Secare con un piano* π, detto *piano di sezione* o *quadro*, una figura composta di rette, si-

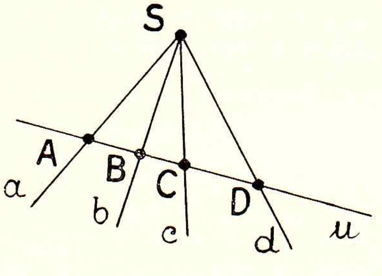


Fig. 4.

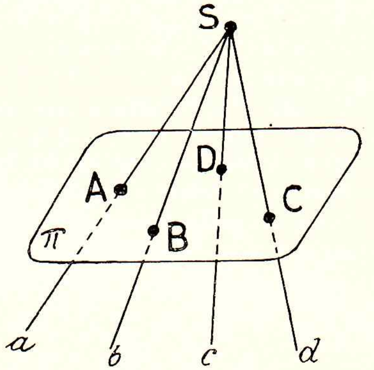


Fig. 5.

gnifica determinare i punti comuni a π e a ciascuna delle rette della figura. Per es., proiettando dal punto S (fig. 4) i punti della punteggiata u, non passante per S, si ottiene il fascio di rette di centro S; viceversa, la punteggiata u può pensarsi ottenuta sezionando colla retta u il fascio di rette di centro S.

Proiettando da un punto S (fig. 5) i punti d'un piano π, non passante per S, si ottiene la stella di rette di centro S; sezionando la stella di centro S col piano π si ottiene il piano punteggiato di sostegno π.

La proiezione e la sezione così definite costituiscono due *operazioni geometriche fondamentali.*

4. Concetto di corrispondenza geometrica biunivoca. – Siano date due classi di elementi geometrici qualsiasi (punti, rette, ecc.) in numero finito o infinito. Se è nota una legge in virtù della quale ad un elemento qualunque, per es. a, della prima classe viene associato un solo elemento a' della seconda e, viceversa, scelto comunque un elemento a' della seconda classe, esiste nella prima un solo elemento a, di cui a' sia il corrispondente, si dice che le due classi sono in *corrispondenza biunivoca.* Per es., se si proietta (fig. 4) una punteggiata A, B, C, D, ..., di un sostegno u, da un centro S fuori di u, si ottiene un fascio di rette a, b, c, d, ..., il quale è in corrispondenza biunivoca con la punteggiata.

Talvolta, invece del vocabolo *corrispondenza* si adopera quello di *trasformazione*. In sostanza, in Geometria, le predette due parole hanno lo stesso significato che, in Analisi, ha la parola *funzione*.

5. L'Omografia. – Consideriamo due piani π e π' (distinti o coincidenti) e riferiamoli tra loro in modo che a un punto, o una retta, dell'uno corrisponda un punto, o una retta, dell'altro e a un punto e una retta dell'uno che si appartengono, un punto e una retta dell'altro che si appartengono pure. La corrispondenza così stabilita fra i due piani dicesi *omografia* (o *collineazione*) ed i piani così riferiti diconsi *omografici*. Segue da ciò che: *in una omografia, a punti allineati corrispondono punti allineati e a rette d'un fascio corrispondono rette d'un fascio.*

Infatti, se π e π' sono i due piani omografici e A, B, C sono tre punti di π allineati, cioè appartenenti ad una stessa retta r, e A', B', C', r' sono gli elementi corrispondenti in π', siccome A ed r si appartengono, si appartengono pure A' ed r'; analogamente, B ed r si appartengono e perciò si appartengono pure B' ed r'; e, infine, poichè C ed r si appartengono, si appartengono anche C' ed r'; dunque A', B', C' appartengono ad r' e perciò sono allineati.

Siano ora a, b, c tre rette di π appartenenti ad un punto P e a', b', c', P' i loro corrispondenti in π'.

Siccome P appartiene a ciascuna delle rette a, b, c, anche P' apparterrà a ciascuna delle rette a', b', c', cioè le rette a', b' c' passeranno tutte e tre per P', ossia formeranno anch'esse un fascio di rette.

Così la proprietà è dimostrata.

Per avere un'idea più chiara di come siano e come possano costruirsi due piani omografici, si pensi a due piani π e π' qualsiasi (fig. 6) e da un punto S, non ap-

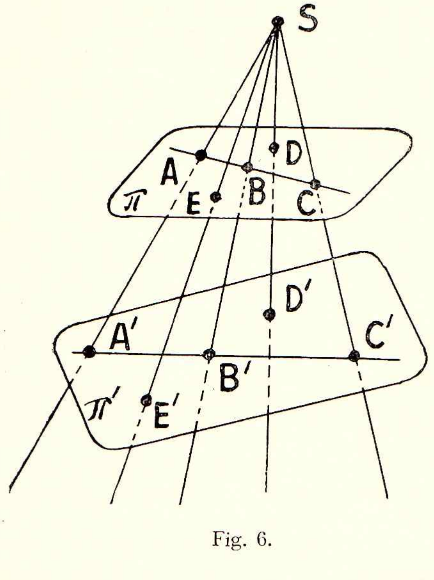


Fig. 6.

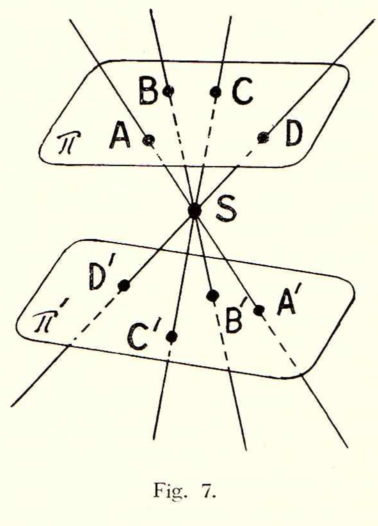


Fig. 7.

partenente a nessuno dei due, si proiettino i punti di π su π': i due piani così riferiti sono omografici.

Oppure: si consideri una stella di rette di sostegno S (fig. 7) e si sechi con due piani qualsiasi π e π' non passanti per S: i due piani così riferiti sono omografici.

6. La similitudine. – Se i piani omografici sono coincidenti e gli angoli formati da coppie di raggi corrispondenti sono uguali, allora ogni triangolo di π è simile al triangolo corrispondente di π' e, per conseguenza, il rapporto di due segmenti corrispondenti dei due piani è costante. Viceversa, se è costante il rapporto di due segmenti corrispondenti qualunque, allora ogni triangolo di π è simile al triangolo corrispondente di π' (perchè essi hanno i lati proporzionali) e pertanto gli angoli corrispondenti sono uguali. Una siffatta omografia piana che non altera gli angoli nè i rapporti fra segmenti, dicesi *similitudine* (*piana*) ed i piani così riferiti diconsi *simili*. Due figure corrispondenti in piani simili diconsi *simili*. Pertanto possiamo così definire la similitudine di due figure:

Due figure F *ed* F′ *si dicono simili se fra i loro punti esiste una corrispondenza biunivoca tale che i segmenti aventi gli estremi in punti di* F *sono proporzionali ai segmenti aventi gli estremi nei punti corrispondenti di* F′. Ne segue, per quanto abbiamo dimostrato, che *in figure simili angoli corrispondenti sono uguali.*

Una trasformazione che conserva gli angoli dicesi *conforme*. Pertanto, *la similitudine è una corrispondenza conforme.*

7. L'Omologia. – Consideriamo ora (fig. 8) due piani sovrapposti π e π', un terzo piano qualsiasi α (distinto da $\pi \equiv \pi'$) e due punti distinti S ed S', non appartenenti nè ad α nè a $\pi \equiv \pi'$.

Proiettiamo i punti di α sopra i due piani sovrapposti dai due centri S ed S': la corrispondenza così stabilita fra i due piani sovrapposti dicesi *omologia piana* ed i due piani così riferiti diconsi *omologici*. Intanto è evidente che tale corrispondenza è una omografia. Siccome, poi, per es., SB ed $S'B'$ sono complanari, nello stesso piano giacciono le rette SS' e BB' onde esse hanno in comune un punto il quale, poichè BB' appartiene a $\pi \equiv \pi'$, è il punto U comune ad SS' e $\pi \equiv \pi$.

Pertanto, *punti corrispondenti sono allineati con il punto* U. Inoltre, siccome, per es., BC e PN sono complanari, il loro punto comune è comune ai due piani π ed α, cioè è un punto della retta u ad essi comune.

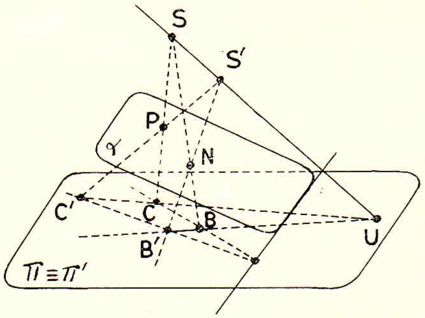


Fig. 8.

Pertanto, *rette corrispondenti s'incontrano in punti della retta u*. Dunque, l'*omologia piana* è una particolare omografia tra piani sovrapposti in cui punti omologhi sono allineati con un punto fisso U (detto *centro dell'omologia*) e rette omologhe s'incontrano in punti d'una retta u (detta *asse dell'omologia*).

Sussiste l'importante proprietà: *Una omologia è individuata mediante centro, asse e una coppia di elementi omologhi.*

Infatti, se questi sono i due punti P e P' ed U ed u sono il centro e l'asse dati, si trova l'omologo Q' d'un altro punto Q con la costruzione seguente (fig. 9):

Si congiunga Q con P e si richiami L il punto comune alle rette QP ed u. Congiunto L con P', tale retta LP' incontra la retta UQ nel punto Q' richiesto, appunto perchè la retta $P'Q'$ deve incontrare l'asse u nello stesso punto L in cui l'incontra la sua omologa PQ.

Corollario. – Se R ed R' sono due altri punti omologhi (fig. 9), anche le rette PR e $P'R'$, quali rette omologhe, si secheranno sull'asse u e così pure le rette QR e $Q'R'$. Allora, considerando i triangoli PQR e $P'Q'R'$, risulta dimostrato l'elegante *teorema di* DESARGUES: *Se due triangoli, situati in un piano, sono riferiti in modo che le congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passano per uno stesso punto, i lati corrispondenti s'intersecano in punti d'una stessa retta.* È facile dimostrare che sussiste la proposizione inversa: *Se due triangoli, situati in un piano, sono riferiti in modo che le rette dei lati corrispondenti s'incontrano in punti d'una stessa retta, le congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passano per uno stesso punto.*

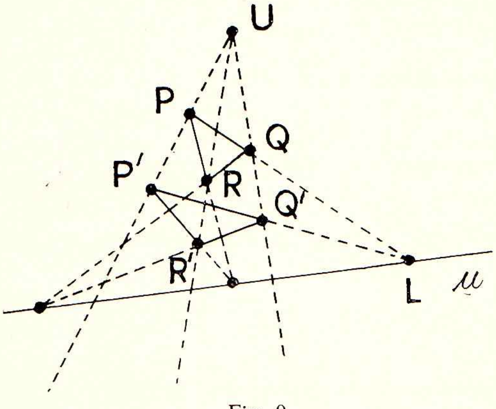


Fig. 9.

Due triangoli così riferiti diconsi *omologici* ed il teorema dimostrato chiamasi anche *teorema dei triangoli omologici.*

8. PARTICOLARI OMOLOGIE: *Affinità, Omotetia, Simmetria, Uguaglianza.* – *a*) Abbiamo supposto finora che centro ed asse dell'omologia siano propri. Ebbene: un'omologia col centro all'infinito dicesi *affinità* ed un'omologia con l'asse all'infinito dicesi *omotetia.*

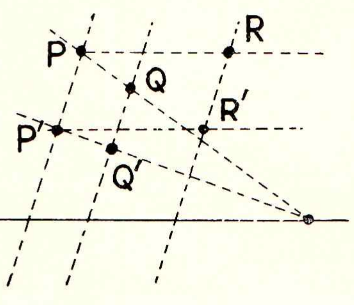


Fig. 10.

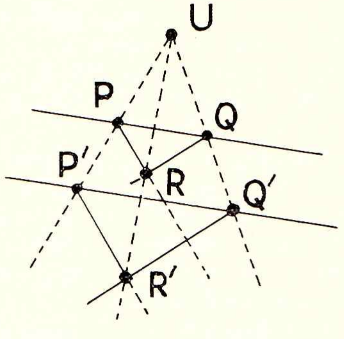


Fig. 11.

In una affinità (fig. 10), coppie di punti omologhi giacciono, allora, su rette parallele. In una omotetia (fig. 11), il centro dell'omologia prende nome di *centro dell'omotetia.* Rette corrispondenti sono parallele e, per conseguenza, angoli corrispondenti sono uguali: i due piani π e π' sono simili.

Due figure corrispondenti diconsi *omotetiche.* Per esempio, i due triangoli (figura 11) PQR e $P'Q'R'$ sono omotetici. Se U è il centro (proprio) dell'omotetia e $P, Q, \ldots; P', Q', \ldots$ sono coppie di punti omologhi, si ha:

$$\frac{UP}{UP'} = \frac{UQ}{UQ'} = \ldots = \text{cost.}$$

Questo rapporto costante si chiama *rapporto di omotetia*, e l'omotetia dicesi *diretta* od *inversa*, secondo che il rapporto è positivo o negativo, ossia secondo che due punti corrispondenti sono da una stessa parte rispetto al centro U o da parti opposte. Il rapporto tra le aree di due figure corrispondenti è il quadrato del rapporto di omotetia. L'omotetia è una particolare similitudine: è una similitudine di posizione.

Se il rapporto d'omotetia vale -1, l'omotetia si riduce alla *simmetria rispetto ad un centro* U; figure corrispondenti sono direttamente uguali, ed una di esse può sovrapporsi all'altra mediante la rotazione d'un angolo piatto attorno ad U.

b) Se tanto il centro quanto l'asse dell'omologia sono impropri, l'omologia si riduce ad una *corrispondenza d'uguaglianza*. Figure corrispondenti sono, pertanto, uguali. Onde possiamo definire così l'uguaglianza:

Due figure si dicono uguali quando fra i loro punti esiste una corrispondenza biunivoca tale che il segmento congiungente due punti qualunque di una di esse è uguale al segmento congiungente i punti corrispondenti dell'altra. L'uguaglianza è, dunque, una particolare similitudine; è, cioè, una similitudine col rapporto di similitudine uguale all'unità.

Salvatore Nicotra.

▼ ▲ ▼ ▲

Dimostrazione geometrica di un teorema importante

Nel fascicolo n. 1 dell'anno 1961, unita alla soluzione del tema assegnato all'esame di abilitazione magistrale – sessione autunnale 1961 – è riportata, in una nota, una dimostrazione algebrica della proprietà ricordata nel tema stesso: .... *un triangolo rettangolo è equivalente ad un rettangolo avente per lati i due segmenti in cui l'ipotenusa è divisa dal punto di contatto con la circonferenza iscritta....*

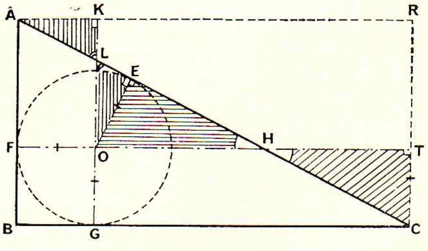


Fig. 1.

Di tale proprietà può essere ricordata anche una dimostrazione geometrica.

Sia dunque ABC il triangolo rettangolo in A e sia E il punto di tangenza della circonferenza iscritta con l'ipotenusa AC.

Si deve dimostrare che il triangolo ABC è equivalente al rettangolo avente per lati AE e EC.

Costruito il rettangolo $ABCR$, si conduca da O, centro della circonferenza iscritta nel triangolo ABC, la perpendicolare ad AB, che interseca AB in F (punto di tangenza), AC in H e RC in T e la perpendicolare a BC che interseca BC in G (punto di tangenza), AC in L e AR in K.