Bollettino
Unione Matematica Italiana

Pier Vittorio Ceccherini

Giuseppe Tallini (1930-1995)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-B** (1998), n.2, p. 452–474.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1B_2_451_0>

Bollettino U. M. I.
(8) **1**-B (1998), 451-474

GIUSEPPE TALLINI (1930-1995)

La vita.

Personalità scientifica dinamica e prorompente, Giuseppe Tallini verrà certamente ricordato nella storia della matematica di questo secolo per aver dato un impulso decisivo allo sviluppo della combinatoria in Italia, continuando insieme ad Adriano Barlotti a promuovere quella scuola di geometria combinatoria, fondata da Beniamino Segre, che è oggi una delle più affermate in campo internazionale.

Fondamentali sono i suoi risultati riguardanti gli archi e le calotte in spazi di Galois, la caratterizzazione grafica di varietà algebriche notevoli, le strutture combinatorie d'incidenza (matroidi, spazi lineari e semilineari, spazi polari), la teoria dei disegni combinatori e dei sistemi di Steiner e quella dei codici correttori.

Grande ammiratore della cultura classica greco-romana, della cui visione della vita si sentiva profondamente partecipe, ha saputo coniugare una intensissima attività scientifica, che lo assorbiva quasi freneticamente, a momenti di sapiente *otium*, nei quali si dedicava preferibilmente a quelle letture di storia antica che egli prediligeva sopra ogni altre. Di temperamento naturalmente cordiale ed aperto, era dotato di grandissimo calore umano ed amava la vita in tutte le sue manifestazioni.

Nel 1993 era stato colpito da una sclerosi laterale amiotrofica, che lo aveva paralizzato e poi, negli ultimi mesi del 1994, reso afono. La malattia, che lo condurrà alla morte il 4 aprile 1995 e della cui gravità era consapevole, non ne ha mai fiaccato lo spirito, la lucidità della mente, la capacità di comunicare idee matematiche. Con grande serenità aveva accettato la crescente menomazione fisica, continuando il lavoro di sempre, in ciò anche sostenuto dal premuroso affetto dei figli e della moglie, che gli è stata amorevolmente vicina con dedizione grandissima.

Giuseppe Tallini nasce a Formia (Latina) il 5 gennaio 1930 da Arturo e da Ines Disa, terzo di quattro figli.

Frequenta la scuola elementare a Formia. Rimasto orfano di padre a dieci anni, nel 1943 la sua famiglia si allontana dalla città, divenuta troppo pericolosa a causa degli eventi bellici. Trovato rifugio nelle campagne e sulle montagne circostanti, egli divide con la madre e coi fratelli la dura esperienza degli sfollati. Terminata la guerra, compie brillantemente gli studi superiori presso il liceo scientifico statale «Vitruvio Pollione» di Formia. Si iscrive quindi all'Università di Roma nel 1949, per compiervi gli studi di matematica. Inizia così una vita di «studente fuori sede», alternando i periodi trascorsi a casa con quelli vissuti a Roma, come ospite pagante presso privati. Ricorderà sempre con grandissimo entusiasmo questi anni di studi universitari. A quell'epoca il corpo dei professori di ruolo presso l'Istituto Matematico «Guido Castelnuovo» comprende cinque professori in tutto: personalità della statura di Beniamino Segre, Enrico Bompiani, Fabio Conforto, Giulio Krall, Mauro Picone, ed è affiancato da pochi altri docenti, tra i quali Enzo Martinelli e Lucio Lombardo-Radice. A partire dal secondo-terzo anno di studi, come accade agli allievi più brillanti, Tallini viene incoraggiato a frequentare le attività seminariali ed i corsi avanzati che hanno luogo presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, fondato da Francesco Severi, il quale all' epoca vi tiene ancora conferenze suggestive e di grande interesse.

Il giovane Tallini è specialmente attratto dalle personalità scientifiche di Bompiani e di Segre. Dal primo trae la sua passione per la geometria differenziale, dal secondo quella per l'algebra, la geometria algebrica e, soprattutto, per le geometrie negli spazi affini e proiettivi costruiti su campi finiti (geometrie combinatorie negli spazi di Galois).

Laureato in matematica con lode nel novembre 1954 — con una tesi sulle varietà kähleriane (relatore Enrico Bompiani), che ha dato origine alla sua prima pubblicazione [1] —si mette subito in luce come ricercatore attivo in vari campi dell'algebra e della geometria: sviluppa in [2] uno studio sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei ed ottiene in [3] una caratterizzazione grafica delle quadriche negli iperspazi finiti di ordine dispari.

I suoi professori diventano consapevoli di avere a che fare con un giovane di valore. Nel novembre 1954, subito dopo la laurea, viene nominato da Bompiani assistente volontario di «Geometria Analitica con Elementi di Proiettiva e Geometria Descrittiva con Disegno». Dal 1954 al 1959 è discepolo ricercatore e borsista dell' Istituto Nazionale di Alta Matematica, e dal 1960 membro di un gruppo di ricerca del C.N.R. Dal novembre 1955 all'ottobre 1966 è assistente a vario titolo presso la cattedra di «Geometria Superiore» ricoperta da Segre: assistente straordinario (1955), poi assistente incaricato supplente ed infine assistente ordinario (1959) (aveva conseguito l'idoneità a Parma nel 1957); dal 1962 la denominazione della cattedra cambiò in quella di «Istituzioni di Geometria Superiore».

Conseguita la libera docenza in «Geometria Analitica etc.» (febbraio 1962), è professore incaricato a Roma di «Geometria Differenziale» (Facoltà di Scienze) dal novembre 1961 all'ottobre 1966 e di «Geometria I» (Fac. d'Ingegneria) dal novembre 1962 all'ottobre 1964. Inoltre tiene l'incarico di «Istituzioni di Geometria Superiore» presso l'Università de L'Aquila dal novembre 1963 all'ottobre 1966.

Nel maggio 1966 risulta primo ternato nel concorso alla cattedra di «Istituzioni di Geometria Superiore» bandito dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, ove rimane come professore straordinario dal novembre 1966 all'ottobre 1968, tenendovi anche l'incarico di «Geometria I» e promuovendovi un «Seminario di Geometria».

Nel novembre 1968 viene chiamato su una cattedra di «Geometria» dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli, ove rimane fino al gennaio 1974, tenendovi inoltre l'incarico di «Istituzioni di Geometria Superiore» e dirigendovi un «Seminario di Geometria». È ordinario dal 1° novembre 1969.

Dal febbraio 1974 è chiamato a ricoprire una cattedra di «Geometria» presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma (denominata come «Geometria II» dal 1985), e si trasferisce dal novembre 1994 sulla cattedra di «Geometria IV» presso la stessa Facoltà.

A Roma ricopre anche gli insegnamenti di «Geometria Superiore» (1973-74, 1985-86), di «Algebra» (1979-80, 1980-81), di «Geometria III» (1986-87, 1990-91) e di «Geometria IV» (1993-94).

Nel 1958 aveva sposato Maria Scafati, sua compagna negli studi universitari a Roma. Ella gli è stata vicina per tutta la vita, condividendone la carriera universitaria (è professore di algebra all'Università di Roma «La Sapienza») e la passione per la matematica. Giuseppe ha trascorso con lei una vita serena, rallegrata dalla nascita dei loro tre figli: Giovanni (1960), un medico, Marco (1963), un geologo, e Luca (1967), un matematico ed informatico.

Socio della Unione Matematica Italiana dal 1956, Tallini ha fatto parte della Commissione Scientifica di questa associazione dal 1979 al 1991. Ha avuto anche altri incarichi direttivi nella comunità matematica italiana: dal 1970 nel Consiglio Scientifico del GNSAGA del CNR (anche come responsabile della Sezione «Strutture algebriche fondamentali, loro generalizzazioni, applicazioni alla geometria»), nel Comitato Direttivo dell' INDAM (nel periodo 1981-85, e in seguito a partire dal 1990). Dal 1982 era responsabile nazionale del progetto di ricerca «Strutture geometriche, combinatoria e loro applicazioni» del MURST, progetto al quale afferiscono una ventina di sedi universitarie.

Ha anche partecipato con grande dedizione alla vita accademica, nelle sue varie forme istituzionali: Consiglio di Facoltà, Consiglio di Dipartimento e Consiglio del Corso di Laurea (di cui, a Roma, è stato il primo presidente, all'atto dell'istituzione di tale organismo), sempre recandovi un contributo assai efficace, frutto del suo temperamento volto per natura ad affrontare i problemi in modo costruttivo.

Ha costantemente assolto tutti questi impegni organizzativi con grande energia, equilibrio e senso di responsabilità.

La sua intensa attività didattica e di ricerca si è riflessa in una appassionata opera di Maestro, che ha saputo infondere nei suoi allievi — molti dei quali sono giunti alla cattedra universitaria — il suo stesso entusiasmo nell'affrontare e risolvere alcuni dei problemi aperti che si presentavano nelle loro ricerche.

I suoi primi allievi risalgono agli anni dal 1955 al 1966, quando egli era assistente di Segre. È quasi impossibile, in tale periodo, separare gli allievi di Segre da quelli di Tallini; io stesso ho ricevuto da entrambi, in pari misura, una efficace guida scientifica; ricorderò dunque, fra i suoi allievi: Marialuisa de Resmini, Umberto Bartocci, Massimo Lorenzani, Bruno Simeone, Gabor Korchmàros, Antonio Maschietti, Dina Ghinelli, Alessandro Bichara. Durante il periodo torinese (1966-68) ebbe come assistenti Alberto Conte e Carla Massaza; a Napoli (dal 1968 al 1974) ebbe tra i suoi studenti ed allievi Domenico Olanda, Francesco Mazzocca, Nicola Melone, Pia Maria Lo Re e Ciro Ciliberto. Nel secondo periodo romano (1974-1995) continuò a stimolare l' attività scientifica anche di altri ricercatori già maturi, quali Mario Marchi, Franco Eugeni, Luigia Berardi, Osvaldo Ferri, Mario Gionfriddo, L. Maria Abatangelo, Giorgio Faina, Piergiulio Corsini, nonché a promuovere la formazione di altri ricercatori quali Massimo de Finis, Antonietta Venezia, Laura Bader, Corrado Zanella, Sandro Rajola.

Importante — per questa opera di formazione e di guida — è stata l'attività del «Seminario di Geometria Combinatoria», da lui fondato a Roma nel 1974, un punto di riferimento per quanti, in campo nazionale ed internazionale, operano in questo settore. Di tale Seminario si pubblica, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma «La Sapienza», una serie di Quaderni, giunti al 125-esimo fascicolo.

Sono anche da ricordare altre due iniziative da lui promosse: la «Scuola Estiva di Geometria Combinatoria» (organizzata da Mario Marchi e da Gabor Korchmàros) e la celebre serie di convegni denominati come «Combinatorics», i quali con cadenza biennale ne descrivono lo «stato dell'arte» in un panorama scientifico internazionale di altissimo livello. La serie aveva avuto inizio nel 1981, con un convegno tenuto a Roma per onorare la memoria di Beniamino Segre, che era scomparso nel 1978 e per il quale Tallini aveva avuto una grande ammirazione e devozione; cfr. le sue commemorazioni di lui [57], [71], [89], [107].

Sia il «Seminario» sia la «Scuola Estiva» sono stati ora intitolati al nome di Giuseppe Tallini; a lui è anche intitolata un'aula del Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli. Il convegno «Combinatorics '96, Assisi, 8-14 settembre 1996» — il primo dopo la sua scomparsa — è stato dedicato alla sua memoria. In tale occasione è stato pubblicato dall'Università di Perugia un volumetto *Giuseppe Tallini: his work and our reminiscences*, nel quale gli autori (A. Barlotti, W. Benz, A. Beutelspacher, A. Bichara, A. A. Bruen, P. V. Ceccherini, C. Ciliberto, G. Faina, R. Hill, H. Karzel, F. Mazzocca, J. A. Thas) illustrano alcuni risultati delle sue ricerche e ripercorrono alcuni ricordi personali legati al loro incontro con Tallini. Di questo volumetto è apparsa una nuova edizione in un fascicolo della rivista *Results in Mathematics* (**32** (1997), 195-280).

Per l'attività di ricerca svolta, Giuseppe Tallini aveva ottenuto fin da giovane vari premi, tra cui il «Premio Francesco Severi» indetto dalla Provincia di Arezzo nel 1960, il «Premio Pomini» per l'anno 1960 bandito dall'UMI (cfr. *Boll. Um. Mat. Ital.* (3), **16**

(1961), 192), il «Premio Alessandro Bonavera» per il 1961 (cfr. *Atti Acc. Sci. Torino*, **96** (1961-62), 197).

Raggiunta una grande notorietà e prestigio in campo nazionale ed internazionale, in un àmbito ben più vasto di quello dei cultori delle geometrie combinatorie, viene invitato a tenere conferenze e corsi di lezioni in varie università europee, negli Stati Uniti, in Argentina, in Cina ed in Russia.

Membro dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli, membro onorario della «Mathematische Gesellshaft in Hamburg» e della «New York Academy of Sciences»; aveva stretti legami di collaborazione con ricercatori di molte università estere. È stato chiamato più volte a far parte del comitato scientifico di importanti convegni, quali i «Grundlagen der Geometrie» di Oberwolfach (con Walter Benz), i convegni «Geometry» di Haifa (con Rafael Artzy e Joseph Zaks) ed i convegni «Order in Algebra and Logic» (con Antonio Di Nola, Angus Macintyre e Daniele Mundici); ed è stato menbro del comitato di redazione di riviste quali «Journal of Geometry», «Designes, Codes and Cryptography» e di altre riviste italiane.

L'opera scientifica.

Oltre a numerosi articoli nel campo delle geometrie combinatorie, Giuseppe Tallini lascia molti altri lavori di ricerca che attestano la sua ampia cultura: in geometria differenziale come in geometria algebrica ed in algebra. La produzione scientifica comprende oltre 160 lavori, fra cui varie monografie e testi didattici.

Geometria differenziale.

I lavori di geometria differenziale ([1], [17], [18], [22], [25], [27], [30]) riguardano la geometria kähleriana e le connessioni affini e proiettive su varietà differenziabili compatte.

Nella nota [1], scritta quando Tallini era ancora studente, viene data una nuova dimostrazione di un teorema di geometria kähleriana del Lichnerowicz (cfr. A Lichnerowicz, *Generalization de la geometrie kählerienne globale*, *Coll. Geom. Differentielle*, Louvain, 1951, 98-119; cfr. anche A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma, 1955, n. 96). La dimostrazione utilizza i metodi della geometria proiettiva iperspaziale e mette così in evidenza il significato geometrico del teorema stesso, che era stato invece ottenuto dal Lichnerowicz per via analitica.

In [17] vengono date condizioni globali e locali affinché una connessione affine Γ', anche non simmetrica, coincida con una connessione riemanniana Γ, su una varietà orientabile e compatta. Se ne traggono varie applicazioni, con particolare riguardo al caso in cui Γ e Γ' siano proiettivamente equivalenti (cioè ammettano le stesse geodetiche).

Nella nota [18] vengono date condizioni globali e locali affinché due connessioni affini simmetriche proiettivamente equivalenti coincidano su una V_n compatta per la quale sia nullo il numero di Betti 1-dimensionale b_1. L'ipotesi $b_1 = 0$ è essenziale, perché viene dato un esempio di due connessioni definite su una superficie torica ed ivi analitiche, che sono proiettivamente equivalenti ma che sono distinte pur soddisfacendo alla condizione di avere lo stesso tensore di Ricci, condizione che è sufficiente per la coincidenza delle due connessioni nel caso $b_1 = 0$. L'ipotesi che per la V_n sia $b_1 = 0$ è invece superflua, se ci si limita a considerare *connessioni pseudometriche*, L, ossia tali che su V_n esista uno scalare $g > 0$ di peso due tale che $L^s{}_{sk} = \partial_k \log \sqrt{g}$.

Nei lavori [22], [25], [27], [30] vengono studiate le metriche locali a connessione, con particolare riguardo a quelle dotate di una connessione globale di Weyl. Ricordiamo che si dice che su una V_n differenziabile è data una *metrica locale*, quando è dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di V_n e, per ogni $\alpha \in A$, è data una metrica γ_α definita in U_α. Si dice poi che la metrica locale $\{U_\alpha, \gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è dotata di una connessione globale, o che è una *metrica locale a connessione*, se esiste una connessione Γ, definita su tutta la V_n, tale che, per ogni $\alpha \in A$ Γ coincida con la conessione della metrica γ_α in U_α. Una connessione Γ si dice poi localmente metrica se è la connessione di una metrica riemanniana locale. Nei lavori suddetti (cfr. in particolare [30]) vengono caratterizzate le metriche locali di tipo conforme e si determinano tutte le connessioni che ammettono siffatte metriche locali. Precisamente si prova che una tale connessione Γ determina univocamente una classe di coomologia delle 1-forme, in modo che, detta $\psi = \psi_h \, dx^h$ una qualsivoglia forma della classe, l'equazione differenziale:

$$\nabla_h g_{ij} + 2\psi_h g_{ij} = 0 \tag{1}$$

(ove ∇ è l'operatore di derivazione covariante di Γ) ammette una soluzione globale su tutta la V_n data da un tensore metrico g. Dalla (1) si ricava poi subito:

$$\Gamma^i_{jh} = \begin{Bmatrix} i \\ j \quad h \end{Bmatrix} + \delta^i_j \psi_h + \delta^i_h \psi_j - g_{jh} g^{is} \psi_s, \tag{2}$$

ove i primi termini a secondo membro sono i simboli di Christoffel della metrica g. Viceversa, una connessione di V_n di componenti (2), ove ψ è una forma chiusa e g è un tensore metrico riemanniano, ammette una metrica locale di tipo conforme. Una connessione Γ^i che possa scriversi nella forma (2), ove ψ sia un covettore qualsiasi, prende il nome di connessione di Weyl. In [30] vengono date condizioni necessarie e sufficienti affinché una tale connessione sia localmente o globalmente metrica; e nel caso in cui la V_n sia compatta e sia $n \geqslant 3$, si stabilisce una condizione di natura integrale, necessaria affinché la connessione sia globalmente metrica. Inoltre si provano teoremi che dànno un legame tra i numeri di Betti della V_n, supposta compatta, ed i tensori di curvatura della connessione, teoremi analoghi a quelli stabiliti da Myers e Bochner per le varietà riemanniane compatte. Ulteriori risultati vengono poi stabiliti nel caso delle metriche locali di Einstein dotate di una connessione globale.

Sono anche da menzionare vari lavori di Tallini di introduzione alla geometria differenziale ed alla coomologia di De Rham: sei volumi di dispense e trattati ([21], [28], [33], [47], [49], [53]) e tre articoli di rassegna ([34], [42], [51]), i quali testimoniano il suo impegno a diffondere, anche nella comunità matematica italiana, nuove idee e metodologie sviluppatesi in questo àmbito.

Algebra.

Tallini ha scritto due volumi di dispense di argomento algebrico: uno, di tipo generale, di *algebra astratta* [29], ed uno più specifico su *categorie e funtori* [36].

I suoi contributi originali in questo settore riguardano i sistemi a doppia composizione ordinati archimedei, i semigruppi inversivi ed i campi di Galois non standard.

È ben noto che ogni corpo archimedeo è necessariamente un campo, ordinatamente isomorfo ad un sottocampo dei reali (cfr. ad es. A. A. Albert, *Modern Higher Algebra*, Chicago, 1937). Nella nota [2] si dimostra che, più generalmente, in anello in cui sia definito un ordinamento archimedeo, la commutatività e l'associatività della moltiplicazione sono conseguenze dei restanti assiomi e che l'anello stesso è necessariamente isomorfo ad un dominio d'integrità del campo reale. In questo indirizzo si collocano alcuni lavori di Carla Massaza (cfr. *Rend. Mat.* (6), **1** (1968), 202-218) e di P. V. Ceccherini (cfr. *Rend. Mat.* (6), 4 (1971), 175-190; *Mem. Accad. Naz. Lincei.* (8), **11** (1973), 91-104).

Nella nota [26] si dà la caratterizzazione della struttura algebrica delle trasformazioni (biezioni) tra parti di un insieme tramite opportuni assiomi, che sono poi entrati nella letteratura come definenti i cosiddetti *semigruppi inversivi*. Un semigruppo inversivo (da Tallini denominato *gruppide*) è un gruppoide (moltiplicativo) associativo tale che: (a) due suoi idempotenti qualunque commutano tra loro, (b) per ogni suo elemento a esiste un elemento a^{-1} tale che $aa^{-1}a = a$ e $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. La teoria dei sottosemigruppi e dei morfismi di semigruppi inversivi conduce al «teorema fondamentale» ed al «teorema di rappresentazione» (teorema di Vagner-Preston) che generalizza il classico teorema di Cayley (cfr. G. B. Preston, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 411-419). Tallini introduce un funtore dalla categoria dei semigruppi inversivi a quella dei gruppi e considera la relazione d'ordine canonica definita in un semigruppo assumendo $a \leqslant b$ se $ab^{-1}a = a$; egli considera anche la proprietà per un sottinsieme di un semigruppo inversivo di essere «operativamente maggiorante» e ne illustra un'interessante applicazione geometrica. Alcuni aspetti topologici di tale ricerca sono stati sviluppati da Alberto Conte (*Ricerche Mat.*, **18** (1969), 167-180), mentre la struttura algebrica dell'insieme delle applicazioni (non necessariamente biettive) tra parti di un insieme è stata poi studiata e caratterizzata da P. V. Ceccherini e Gianna Ghera (*A Vagner-Preston type theorem for semigoups with right identities, Quad. Sem. Geom. Comb. Univ. L'Aquila*, **4** (1984), 1-20).

Nei lavori [84] e [110] viene sviluppata una analisi non standard per i campi di Galois $GF(q)$, in vista di uno studio di procedimenti asintotici (al crescere dell'ordine q del campo) che getti nuova luce sulla teoria degli spazi finiti $PG(r,q)$. Ricordiamo che un *filtro* F su un insieme infinito P è una famiglia di sottinsiemi di P non contenente la parte vuota, chiuso rispetto all'intersezione e contenente ogni sottinsieme di P che contenga insiemi di F. Il *filtro di Cauchy* su P è il filtro costituito dai complementari delle parti finite di P. L'insieme dei filtri su P è ordinato per inclusione, di modo che ogni filtro su P è contenuto in un *filtro massimale* (o *ultrafiltro*) su P. Un *ultrafiltro di Cauchy* è un ultrafiltro contenente il filtro di Cauchy su P. Sia ora P l'insieme dei numeri primi e si fissi un ultrafiltro U di Cauchy su P. Ciò premesso, Tallini chiama *campo di Galois non standard* (rispetto ad U) il campo $\Gamma(P, U) := A/I$ definito come l'anello quoziente dell'anello prodotto cartesiano $A = \Pi\{GF(p): p \in P\}$ rispetto al suo ideale (massimale) $I := \{a \in A \mid \{p \in P \mid a(p) = 0\} \in U\}$; costruito analogamente il campo $\Gamma(Q, U)$, dove Q è l'insieme dei numeri primari p^h, vengono stabilite varie proprietà algebriche e geometriche per le strutture considerate. Ad esempio, il campo $\Gamma := \Gamma(P, U)$ è di caratteristica 0 e non è quadraticamente chiuso; nello spazio proiettivo $PG(r, \Gamma)$ si hanno precisamente una o due classi di quadriche proiettivamente equivalenti, a seconda che la dimensione r dello spazio sia pari o dispari; ogni curva algebrica irriducibile del piano $PG(2, \Gamma)$ ha punti a coordinate in Γ; ecc. Su questo argomento, Tallini presenta inoltre vari interessanti problemi aperti.

Fondamenti di geometria.

Allo studio dei fondamenti di geometria affine e proiettiva ha dedicato un volume di dispense [38], poi ampliato nel trattato [48]. Ricordiamo anche i trattati e testi didattici [31], [41], [43] dedicati alla geometria ed alla topologia generale.

Le sue ricerche in quest' àmbito riguardano una estensione del teorema di Desargues ad uno spazio grafico qualsiasi, la geometria di Lobacewski in uno spazio di Galois, lo studio della topologia che ammette come chiusi le unioni finite di sottospazi di uno spazio grafico, i quadrangoli generalizzati, la combinatoria negli spazi infiniti.

Nella nota [4] si dà una generalizzazione del teorema di Desargues ad un qualsiasi spazio proiettivo di dimensione > 2. Questa generalizzazione, dimostrata per via puramente sintetica, comprende, come casi particolari, altre generalizzazioni precedentemente note, come ad es. quelle di «B. Segre, *Lezioni di geometria moderna*, Zanichelli, Bologna (1948), p. 166-168», e di «P. O. Bell, *Generalized theorems of Desargues for n-dimensional projective space, Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), p. 675».

I lavori [35] e [37], svolti durante una sua permanenza nell'Università di Rosario nell' agosto e settembre 1968, sono frutto di una collaborazione con il suo allievo argentino prof. S. Bruno. In essi viene delineata una elegante introduzione alla geometria iperbolica della retta e del piano sopra un campo di Galois $GF(q)$ con q dispari. Dopo alcune premesse algebriche in cui si introducono e si studiano le nozioni di *logaritmo* su $GF(q)$ a valori nell'anello $\mathbb{Z}_{q-1}$, di *valore assoluto* in $\mathbb{Z}_{q-1}$ e di funzioni *coseno iperbolico* e *argomento del coseno iperbolico* — si dà la nozione di *distanza*, a valori in $\mathbb{Z}_{q-1}$, nella geometria iperbolica di un piano di Galois di ordine q, dimostrandone la proprietà additiva per terne di punti allineati ed altre proprietà notevoli. Si determina quindi il numero dei punti di un *segmento AB* in funzione della distanza $d(A, B)$. Infine si introducono e si studiano, in una tale geometria, le nozioni di angolo, ortogonalità, parallelismo, angolo di parallelismo, circonferenza, iperciclo, oriciclo, distanza punto-retta.

I lavori [39], [45], [46] presentano alcuni profondi risultati sulla combinatoria dei quadrangoli generalizzati finiti e forniscono importanti caratterizzazioni di alcune loro classi notevoli. I quadrangoli generalizzati, introdotti in «J. Tits, IHES, *Publ. Math.*, **2** (1959) 14-60», vengono studiati approfonditamente da Tallini, come «sistemi rigati», allo scopo di caratterizzare in modo intrinseco le ipersuperfici algebriche che ammettono una polarità. La sua elegante caratterizzazione del quadrangolo generalizzato $H(3, q^2)$, associato ad una varietà hermitiana non singolare di $PG(3, q^2)$, costituisce uno dei teoremi chiave di questa teoria. Queste sue ricerche hanno dato anche origine a vari lavori di Francesco Mazzocca e di Domenico Olanda. Per una esposizione ampia di questi temi, che sono di natura assai tecnica, rinviamo al trattato «S. E. Payne a J. A. Thas, *Finite Generalized Quadrangles*, Pitman (1984)».

Nel lavoro [73] viene dimostrato — con metodi classici di geometria algebrica delle curve piane e facendo anche uso di un risultato di H. Hasse — che, per ogni $q > 11$, il campo $GF(q)$ verifica la relazione:

$$GF(q) = \{x + 4x[(x-1)(1-y^2)]^{-1} \,|\, x,\, y\, GF(q),\, x \neq 1 \neq y^2\}.$$

In base ad un risultato di Walter Benz, se ne deduce che le trasformazioni di Lorentz dello spazio su $GF(q)$ possono essere caratterizzate come le applicazioni che mutano punti a distanza 1 in punti a distanza 1, la distanza essendo intesa nel senso di Lorentz-Minkowski. Per una ampia esposizione che include queste tematiche si rinvia al trattato di Walter Benz, *Geometrische Transformationen* (BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992). Il lavoro di Tallini ha poi ispirato una ricerca di A. Siciliano (*J. Geometry*, **55** (1996), 162-167).

In [44] si costruisce un funtore dalla categoria degli spazi proiettivi di dimensione finita (eventualmente riducibili) rispetto alle collineazioni a quella degli spazi topologici. Viene dimostrato che la topologia $\mathcal{C}(S)$, funtorialmente associata allo spazio proiettivo S (topologia che ha come chiusi le unioni finite di sottospazi di S) è T_1, quasicompatta, è connessa se e soltanto se S è irriducibile ed infinito, ed è di Hausdorff se e solo se S è finito (il che equivale a che $\mathcal{C}(S)$ sia discreta). Tale ricerca ha dato origine a un lavoro di P. V. Ceccherini (*Rend. Accad. Naz. Lincei* (8), **61**(1976), 401-410, 585-591), nel quale — a partire da spazi proiettivi di dimensione qualunque (anche infinita), od da strutture geometriche più generali, quali le matroidi — vengono introdotte varie topologie e varie categorie: in particolare si dimostra l'esistenza di limiti di sistemi diretti di spazi proiettivi e si studiano vari funtori in relazione alla proprietà di conservare o meno i limiti diretti.

Nei lavori [135] e [139] vengono posti i fondamenti di geometria combinatoria nello spazio di Galois $PG(\mathbb{N}, q)$, i cui punti sono quelli della unione $\cup\{PG(r, q),\, r \in \mathbb{N}\}$ ed i cui sottospazi, definiti in modo opportuno, possono avere dimensione finita o numerabile. Introdotta inoltre la nozione di sottospazio di codimensione $d \in \mathbb{N}$ (in particolare di iperpiano), si trasportano allo spazio $PG(\mathbb{N}, q)$ ed allo spazio $AG(\mathbb{N}, q)$ nozioni e risultati sviluppati classicamente per gli spazi di Galois usuali; il che dà sovente risultati sorprendenti e talvolta inaspettati; ad es., nella nuova situazione, si trova che non esistono blocking set. Alla combinatoria degli spazi infiniti, nel contesto del tutto generale degli *spazi lineari* $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$, Tallini torna in [155], che è uno dei suoi ultimi lavori. Anche a tali spazi si estendono nozioni e problemi propri degli spazi di Galois; così un insieme $K \subset \mathbb{P}$ di punti si dice *di tipo* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ se ogni retta $l \in \mathcal{L}$ incontra K in n_i punti, per qualche i. Accade che negli spazi numerabili con rette infinite esistono insiemi di tipo comunque assegnato, con la sola eventuale eccezione per il tipo (1). Ne segue che anche in questo caso, risultano di facile soluzione molti problemi, che sono invece tuttora aperti per gli spazi finiti, come quelli di costruire archi, blocking set e insiemi di tipo (n_1, n_2).

Geometria combinatoria.

I contributi più importanti di Tallini sono nel campo della geometria combinatoria, con particolare riguardo alla geometria degli spazi costruiti su campi di Galois. Il *leitmotiv* che sottende queste ricerche è costituito dal problema della caratterizzazione grafica di varietà algebriche classiche in tali spazi.

Alle geometrie di Galois, Tallini ha anche dedicato alcuni articoli di rassegna, come ad esempio [24], [40], [50], [55], [85]. Tra questi, ha un carattere specifico il lavoro [40], che contiene l'esposizione di due conferenze tenute nei Laboratori Nazionali del CNEN a Frascati nel 1970. Esso consiste in una trattazione volta ad interessare i fisici e riguardante le applicazioni delle geometrie di Galois alla fisica quantistica. Vi si introduce la nozione di distanza e di ortogonalità in un piano affine di Galois e si esamina la teoria delle coniche in un tale piano metrico.

Varietà algebriche negli spazi di galois.

Nei lavori [15], [16] e [19] Tallini affronta, per gli spazi di Galois, problemi che traggono la loro origine da questioni classiche di geometria algebrica. Egli studia la classe delle ipersuperfici irriducibili d'ordine minimo di $PG(r, q)$ che contengono tutti i punti di $PG(r, q)$ e quella delle ipersuperfici prive di singolarità in $PG(r, q)$ d'ordine minimo che contengono il massimo numero possibile di rette in $PG(r, q)$.

Beniamino Segre aveva dimostrato che, in caratteristica zero, il massimo numero $x(n)$ delle rette giacenti su una superficie non singolare d'ordine $n > 2$ dello spazio proiettivo 3-dimensionale verifica la disuguaglianza $x(n) \leq (n-2)(11n-6)$ (che è la migliore possibile per le superfici cubiche per le quali $x(3) = 27$, mentre Segre stesso aveva provato che $x(4) \leq 64$). Si noti che questi risultati non sono più validi in caratteristica positiva: Tallini fornisce un esempio di superficie quartica non singolare sulla chiusura algebrica F di GF(3) contenente 112 rette.

Tornando alle classi di ipersuperfici studiate da Tallini, di cui si è detto all'inizio, si deve dire che la ricerca da lui effettuata appare di una compiuta bellezza. Di queste ipersuperfici vengono infatti messe in luce interessanti proprietà, che permettono di classificarle e caratterizzarle proiettivamente. Questa ricerca ha ispirato due lavori di Osvaldo Ferri (*Rend. Accad. Sci. Lettere Arti Napoli* (4), **35** (1968), 413-420, e (4) **36** (1969), 1-9), che ha studiato le curve d'ordine $q+3$ irriducibili con un punto triplo che invadono un piano $PG(2, q)$.

Caratterizzazioni di varietà algebriche negli spazi di Galois.

I teoremi di caratterizzazione di varietà algebriche notevoli di uno spazio di Galois sono senza dubbio fra i risultati più significativi di questo secolo riguardanti le geometrie su campi finiti. Il primo teorema in questa direzione è il celebre teorema di B. Segre, che dà la caratterizzazione delle coniche di un piano di Galois d'ordine dispari e di cui si dirà tra breve. Il «teorema zero» di questa famiglia di teoremi è l' affermazione banale secondo cui un insieme non vuoto di punti di un $PG(n, q)$ è una varietà algebrica irriducibile d'ordine uno e dimensione d (cioè è un sottospazio non vuoto S_d) di $PG(n, q)$ se e soltanto se esso gode della proprietà di contenere ogni retta avente almeno due punti in comune con l'insieme e di ammettere gli S_{n-d} come spazi di dimensione minima che necessariamente intersecano l'insieme in una parte non vuota. Questo «teorema zero» vale evidentemente in ogni spazio proiettivo $PG(n, K)$ lineare sopra un corpo K (anche infinito).

Nel caso in cui il corpo K sia finito, e sia cioè un *campo di Galois* $GF(q)$ di ordine q

(ordine che è una potenza $q = p^h$ della caratteristica p del campo), i teoremi di caratterizzazione coinvolgono sia condizioni «qualitative» (comportamento rispetto ai sottospazi di certe dimensioni) sia condizioni «quantitative» (indicazioni sul numero dei punti che compongono l' insieme). Le varietà si assumono definite da polinomi a coefficienti in $GF(q)$ e — sebbene siano naturalmente da considerare nella chiusura algebrica del campo $GF(q)$ — se ne considerano soltanto i punti a coordinate in $GF(q)$ (o in un'opportuna estensione algebrica $GF(q^s)$ suggerita dalla questione che si considera di volta in volta); l'equivalenza proiettiva in $PG(n, q)$ viene definita (alla Klein) dall'azione del gruppo lineare proiettivo $PGL(n+1, q)$ (oppure del gruppo semilineare proiettivo $P\Gamma L(n+1, q)$).

Ad esempio, se $F(X_0, X_1, X_2)$ è un polinomio di secondo grado dell'anello $GF(q)[X_0, X_1, X_2]$, il dato costituito dal polinomio stesso considerato unitamente al luogo dei punti (x_0, x_1, x_2) di $PG(2, q)$ tali che $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ è per definizione una *conica* di $PG(2, q)$; la *irriducibilità* va intesa come irriducibilità assoluta (ossia riferita alla chiusura algebrica), sicché se F è irriducibile sopra $GF(q)$ ma è riducibile (in due fattori lineari coniugati) sopra $GF(q^2)$, la conica si dirà *riducibile*, o spezzata in due rette di $PG(2, q^2)$.

È immediata conseguenza del teorema di Claude Chevalley — ma può dimostrarsi direttamente con semplice argomentazione diretta di tipo enumerativo — il fatto che — a differenza di quanto accade nel caso reale — ogni conica di $PG(2, q)$ possiede almeno un punto a coordinate in $GF(q)$, dal che segue che ogni conica irriducibile possiede esattamente $q + 1$ punti (tanti quanti sono i punti di una retta, e quante sono le rette di un fascio).

È evidente che una retta non può avere più di due punti in comune con una conica irriducibile. Si chiama *k-arco* di $PG(2, q)$ ogni insieme di k punti di $PG(2, q)$ che sia incontrato da una qualunque retta in al più due punti. Pertanto si può dire che i punti di una conica irriducibile di $PG(2, q)$ formano un $(q+1)$-arco. L'affermazione inversa — cioè che un $(q+1)$-arco di $PG(2, q)$ è necessariamente costituito dai punti di una conica irriducibile di $PG(2, q)$ — è vera se q è dispari (cioè se $p \neq 2$), e ciò costituisce il sopra nominato *teorema di Segre*, da lui annunciato nel 1954 al Congresso Internazionale dei Matematici di Edimburgo, cfr. B. Segre, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, **17** (1954) 141-142; *Canad. J. Math.*, **7** (1955) 414-416. Lo stesso Segre dimostrò che se q è pari (cioè se $p = 2$) e se $q > 4$, esistono $(q+1)$-archi di $PG(2, q)$ che non sono coniche: in effetti se q è pari, le $q + 1$ tangenti ad una conica irriducibile sono le rette di un fascio, il cui centro (detto *nucleo* della conica) può essere aggregato alla conica dando luogo ad un $(q+2)$-arco di $PG(2, q)$; rimuovendo da questo arco un punto della conica, si ottiene un $(q+1)$-arco che, per il teorema di Bézout, non è una conica allorché $q > 4$.

Il suddetto teorema di Segre è, come si è detto, il capostipite dei teoremi di caratterizzazione delle varietà algebriche. In quest'ordine di idee, nel 1955, Adriano Barlotti e indipendentemente Gianfranco Panella avevano dato una caratterizzazione delle quadriche ellittiche di $PG(3, q)$, per q dispari, come (q^2+1)-calotte dello spazio, cioè come insiemi di $q^2 + 1$ punti a tre a tre non allineati. Il primo caso aperto che si presentava era quello delle quadriche di $PG(n, q)$ con $n \geqslant 3$.

Caratterizzazione grafica delle quadriche di uno spazio di Galois.

Nel seguito, indicheremo con θ_k il numero $q^k + q^{k-1} + \ldots + q + 1$ dei punti di un sottospazio S_k di $PG(n, q)$.

I lavori [3], [5], [6], [7], [8], [92] sono dedicati alla *caratterizzazione grafica delle quadriche di uno spazio di Galois.*

I risultati per il caso q dispari erano stati comunicati da Tallini al V Congresso dell'U.M.I. (Pavia-Torino, 1955), cfr. [3]. La prima delle due note lincee [5] sviluppa, come necessaria premessa alla successiva caratterizzazione, la teoria delle quadriche in uno spazio di Galois $PG(n, q)$ $(q > 2)$, con particolare riguardo al caso $p = 2$ (p è la caratteristica del campo di Galois $GF(q)$ sul quale è costruito lo spazio), teoria che, almeno da un punto di vista geometrico, non si trovava trattata nella letteratura. La seconda nota lincea espone preventivamente i risultati che vengono sviluppati *in extenso* nel successivo lavoro [6]. Questo riguarda tutte le quadriche (specializzate o no) di $PG(n, q)$, escluse soltanto quelle di tipo ellittico, le quali vengono trattate in [7].

Nell'ampia memoria [6] viene ottenuta le seguente caratterizzazione. Un insieme di k punti di $PG(n, q)$ (con $n \geqslant 3$, $q > 2$), che non coincida con tutto lo spazio ma che abbia almeno θ_{n-1} punti (cioè almeno tanti punti quanti ne ha un iperpiano), e che goda della proprietà grafica di *contenere ogni retta avente più di due punti in comune con l'insieme* (proprietà oggi correntemente detta dei «Tallini set»), o si compone di un iperpiano S_{n-1} e di un sottospazio $S_t (0 \leqslant t \leqslant n-1)$, oppure:

se $p \neq 2$ risulta o una quadrica non specializzata di un sottospazio di dimensione pari, o un cono quadrico proiettante dal suo spazio vertice una quadrica del tipo suddetto, o una quadrica non specializzata di tipo iperbolico di un sottospazio di dimensione dispari, oppure un cono quadrico di tipo iperbolico;

se $p = 2$ risulta o uno dei precedenti tipi di quadriche, o si compone di una delle quadriche suddette e di un opportuno sottospazio, oppure risulta un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$-arco o un $(q+2)$-arco di un piano sghembo con l'S_{n-3}.

I due casi $p \neq 2$ e $p = 2$ vengono trattati separatamente, perché mentre nel primo caso, a norma del teorema di B. Segre, un $(q+1)$-arco è necessariamente costituito dai punti di una conica, nel secondo caso si è costretti a procedere indipendentemente dal teorema citato.

La caratterizzazione delle quadriche di $PG(n, q)$. viene completata nel lavoro [7] (riassunto poi in [11]), che riguarda il caso rimanente, cioè quello delle quadriche di tipo ellittico, specializzate o no. A tal fine, Tallini introduce in $PG(n, q)$ il concetto di *calotta d'ordine k ed indice di specializzazione* δ, denotata con $C(k, \delta)$. Questa viene definita come un insieme di k punti, che contenga ogni retta avente più di due punti in comune con l'insieme e che possegga come spazi di dimensione massima degli S_δ. Ai fini della caratterizzazione si è ovviamente interessati alle calotte $C(k, 4\delta)$ con $0 \leqslant \delta \leqslant n-2$. La caratterizzazione dimostrata è la seguente.

In un $PG(n, q)$. (con $n > 3$, $q > 3$), ogni calotta $C(\theta_{n-1} - q^{\delta+1}, \delta)$ con $0 \leqslant \delta \leqslant n-2$ è tale che δ verifica di fatto le limitazioni $(n-3)/2 \leqslant \delta \leqslant n-2$. Più precisamente si ha:

per $\delta = (n-3)/2$ (e quindi per n dispari), la calotta è una quadrica non specializzata di tipo ellittico;

per $(n-3)/2 < \delta \leqslant n-4$ (e quindi per $n > 5$), la calotta è un cono quadrico di tipo ellittico con vertice un $S_{2\delta+2-n}$;

per $\delta = n-3$, la calotta risulta, se q è dispari, un cono quadrico ellittico con vertice un S_{n-4}, se è pari un cono proiettante da un S_{n-4} una calotta $C(q^2+1, 0)$ di un S_3 sghembo con l'S_{n-4};

per $\delta = n-2$, la calotta risulta un S_{n-2}.

A quest'ultimo lavoro si collega il [92] (in collaborazione con Osvaldo Ferri), nel quale viene data una caratterizzazione grafica della famiglia delle rette secanti una quadrica ellittica di $PG(3, q)$, con q dispari.

Caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di $PG(5, q)$.

Nell'ottobre 1957, Tallini prende parte al *Convegno Internazionale sui Reticoli e le Geometrie Proiettive,* organizzato a Palermo ed a Messina da Lucio Lombardo-Radice, che era stato chiamato l'anno precedente come ordinario di geometria all' Università di Palermo. In questo convegno, uno dei primi in campo internazionale ad essere consacrato alle ricerche sulle geometrie finite, Tallini comunica (cfr. [8]) una *caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di $PG(5, q)$*, immagine proiettiva del sistema lineare delle coniche di $PG(2, q)$. La caratterizzazione viene sviluppata nelle due note lincee [10], nelle quali si dimostra che un insieme di $k \geqslant q^2 + q + 1$ piani, congiunti da uno spazio $PG(r, q)$ (con $r \geqslant 5$, q dispari), a due a due incidenti e tali che mai più di due passino per uno stesso punto, è costituito dalla totalità dei piani tangenti ad una superficie di Veronese, risultando quindi necessariamente $r = 5$ e $k = q^2 + q + 1$.

Questa proposizione è l'analogo, negli spazi finiti, del teorema secondo cui l'unica superficie irriducibile, non conica, dello spazio complesso $PG(r, \mathbb{C})$ con $r \geqslant 5$ avente i piani tangenti a due a due incidenti è la superficie di Veronese di $PG(5, \mathbb{C})$; cfr. «P. Del Pezzo, *Sulle superfici dell'n*$^{\text{mo}}$ *ordine imerse nello spazio di n dimensioni, Rend. Circ. Mat. Palermo*, **1** (1887), n. 12». Nel passaggio dal caso classico al caso degli spazi finiti, l'ipotesi di natura differenziale — che esista una superficie a cui quei piani sono tangenti — viene sostituita dall'ipotesi di carattere numerativo che il numero di quei piani sia maggiore od uguale al numero dei piani tangenti ad una superficie di Veronese di $PG(5, q)$.

Sugli aspetti algebrici e combinatori riguardanti la superficie di Veronese, Tallini tornerà nel 1982 nel Quaderno [78], in cui viene considerato anche il caso generale di un campo arbitrario, e, nel caso finito, vengono illustrati tutti i risultati noti relativi alle *calotte di data specie* (vedi appresso) contenute sulla superficie stessa.

Caratterizzazione grafica di certe superfici cubiche di $PG(3, q)$.

Nelle due note lincee [12] del 1959, Tallini caratterizza graficamente in $PG(3, q)$ (con $q > 3$ dispari) le superfici rigate cubiche generali (cioè a direttrici rettilinee distinte) e le superfici cubiche contenenti quattro o tre punti doppi indipendenti, come insiemi di punti godenti della proprietà di *contenere ogni retta avente più di tre punti in comune con essi* e della proprietà *di contenere almeno tanti punti quanti ne ha una superficie cubica del tipo indicato.* Le cardinalità di queste superfici cubiche erano state determinate tre anni prima da L. A. Rosati, cfr. «L. A. Rosati, *Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito*, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3), **11** (1956), 412-418».

Altre caratterizzazioni di varietà algebriche in spazi di Galois.

Dal 3 al 15 settembre 1973 si tiene a Roma un memorabile congresso, il Convegno Internazionale di Geometrie Combinatorie, organizzato presso l'Accademia Nazionale dei Lincei da un comitato scientifico presieduto da Segre e di cui fanno parte Barlotti e Tallini insieme ad Enrico Bombieri, Lucio Lombardo-Radice, Giovanni Ricci, Guido Zappa, Marshall Hall, Gian-Carlo Rota, Bruce Rothschild, e William T. Tutte. In quell' anno ricorreva il 70º compleanno di Segre, ed i maggiori cultori del settore si sono dati appuntamento a Roma per onorare l'opera scientifica di questo grande matematico, che è tra i pionieri e fondatori della geometria combinatoria. È una grande occasione per fare il punto sulle ricerche in questo settore, che si è ormai ampiamente sviluppato in svariate direzioni, affermandosi come ramo vitale e fecondo della geometria di questo secolo. A Tallini spetta il compito di riferire sulle caratterizzazioni delle varietà algebriche negli spazi di Galois, cfr. [54]. Il panorama che si presenta agli studiosi si è notevolmente sviluppato da quel lontano 1954 in cui Segre aveva annunciato il suo teorema di caratterizzazione delle coniche. Accanto ai sopracitati lavori di Tallini stesso, sono da ricordare vari lavori di Gianfranco Panella, Marialuisa de Resmini, Marcello Cicchese ed Osvaldo Ferri; e la caratterizzazione delle curve razionali normali (B. Segre, J. A. Thas). Particolarmente elegante è la caratterizzazione delle varietà hermitiane di $PG(r, q)$ dello spazio di Galois di ordine q quadrato, ottenuta nel 1966 da Maria Scafati Tallini (e per il caso $q = 4$ da Adriano Barlotti).

Caratterizzazione grafica delle grassmanniane e di altre varietà algebriche.

Nell' articolo [54] precedentemente citato, Tallini effettua fra l'altro una rivisitazione dei suoi risultati sulla superficie di Veronese in termini di proprietà della varietà grassmanniana dei piani di uno spazio di Galois.

Ciò prelude al suo studio sistematico — iniziato nello stesso 1973 in [50] e poi proseguito in una serie di lavori dei primi anni '80 — della varietà di Grassmann $G(r, d, q)$ rapprentativa dei sottospazi d-dimensionali di uno spazio di Galois $PG(r, q)$.

Un primo lavoro in questa direzione è il [67] del 1980, intitolato «I k-insiemi di rette di uno spazio di Galois studiati rispetto ai fasci di rette» e riguardante insiemi notevoli K di punti della varietà di Grassmann $G(r, 1, q)$ delle rette di $PG(r, q)$. Si tratta del testo di due seminari, raccolti rispettivamente da Pia Maria Lo Re e da Antonietta Venezia. Il primo dà un inizio di classificazione per gli insiemi K di rette di $PG(r, q)$ in funzione del loro *tipo* e dei loro *caratteri* rispetto ai fasci di rette. La seconda parte (pubblicata in inglese in [82]) riguarda specificatamente gli insiemi di rette di tipo $(0, n)$, ove si dice che un insieme K di rette è *di tipo* $(m_1, m_2, \ldots, m_h)$ se ogni fascio di rette incontra K in m_i rette, per qualche i; si dice poi che K ha i *caratteri* $(t_1, t_2, \ldots)$ se t_s è il numero dei fasci di rette che incontrano K in esattamente s rette, per $s = 1, 2, \ldots$.

Un analogo accurato studio combinatorio della varietà di Grassmann $G(r, d, q)$ viene sviluppato in [68] (di cui [79] è la versione inglese), in relazione alle proprietà di incidenza di un insieme K di punti della varietà rispetto a certi sottospazi della grassmanniana rappresentativi di certe stelle di spazi di $PG(r, q)$.

Successivamente Tallini ha considerato, più in generale, la varietà di Grassmann $G(r, d, K)$ rapprentativa dei sottospazi d-dimensionali di uno spazio $PG(r, K)$ su un campo K qualunque, o — ancor più in generale — dello «spazio di Grassmann» $G(d, \mathbb{P})$ dei *d-sottospazi* di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ qualunque, eventualmente riducibile, pervenendo a loro caratterizzazioni estremamente eleganti.

Queste caratterizzazioni degli spazi di Grassmann, in particolare delle varietà di Grassmann, sono ottenute utilizzando le proprietà d'incidenza intrinseche alle strutture considerate. Tale punto di vista può essere così riassunto. Ogni varietà di Grassmann $G(r, d, K)$ — considerata come l'insieme dei suoi punti unitamente all'insieme delle sue rette — è uno «spazio semilineare» (i.e. «due punti distinti qualunque sono incidenti ad al più una retta») verificante certe proprietà combinatorie. Più generalmente, ogni spazio di Grassmann $G(d, \mathbb{P})$ può essere considerato come uno spazio semilineare $(P, \mathcal{L})$, il cui insieme P dei punti è l'insieme dei d-sottospazi di $\mathbb{P}$ ed il cui insieme $\mathcal{L}$ di rette è l'insieme dei fasci di d-sottospazi di $\mathbb{P}$; tale spazio $(P, \mathcal{L})$ verifica ben determinate proprietà combinatorie. I teoremi di caratterizzazione dicono che, sorprendentemente, ogni spazio semilineare astratto che verifichi quelle proprietà è ottenuto da uno spazio di Grassmann $G(d, \mathbb{P})$.

Bruce Coopertein aveva trovato nel 1977 una caratterizzazione della varietà di Grassmann $G(r, 1, q)$ delle rette di uno spazio finito irriducibile $PG(r, q)$. Tallini (nel 1980-81, [69], [74]) è riuscito a dare una caratterizzazione dello spazio di Grassmann $G(1, \mathbb{P})$ delle rette ed ha poi ottenuto (1981, [72] con Alessandro Bichara) una caratterizzazione dello spazio di Grassmann $G(2, \mathbb{P})$ dei piani, e finalmente (1982-83, [79]; e [80], [90] con A. Bichara) una caratterizzazione dello spazio di Grassmann $G(d, \mathbb{P})$ dei d-sottospazi di uno spazio $\mathbb{P}$, per ogni $d \geqslant 1$. Un ulteriore passo è costituito (1988, [123] con Jürgen Misfeld e Corrado Zanella) dalla caratterizzazione degli *spazi di Grassmann topologici* e poi (1991, [137] con A. Bichara, J. Misfeld e C. Zanella) dalla caratterizzazione degli *spazi di Grassmann ordinati.*

Le ricerche di Tallini sono state il punto di partenza per ulteriori caratterizzazioni — ad opera dei suoi allievi A. Bichara, F. Mazzocca, C. Somma, P.M. Lo Re, D. Olanda, N. Melone, C. Zanella — di molte varietà algebriche rigate di tipo classico come le stesse varietà Grassmanniane, la varietà di Schubert, la varietà di Veronese e la varietà di Segre. Questi risultati sono presentati in modo organico negli articoli di rassegna [105], [106] e [127].

Allo scopo di ottenere un approccio unificato allo studio di una ampia classe di varietà algebriche di uno spazio proiettivo, Tallini ha introdotto nel 1991 la teoria generale delle cosiddette (n)-*varietà* dello spazio. Una n-varietà è un insieme di punti tale che ogni retta dello spazio sia esterna, o tangente, o n-secante, o sia contenuta nell' insieme. Con questa terminologia, un «Tallini set» (come definito prima) è una (2)-varietà e viceversa. Per esempio, le quadriche, le varietà di Grassmann, di Segre e di Schubert sono

(2)-varietà, mentre ogni varietà hermitiana di $PG(r, q^2)$ è una $(q+1)$-varietà. Pur nella sua generalità, la teoria contiene molti teoremi significativi, cfr. [138], [140], [142].

ALTRI ARGOMENTI DI GEOMETRIA COMBINATORIA.

Lo studio delle varietà algebriche costituisce soltanto una parte delle ricerche di Tallini nel campo della geometria e della combinatoria di uno spazio finito.

I suoi contributi riguardano da un lato argomenti specifici di gemetria in uno spazio di Galois, come gli *archi* e le *calotte*, le *fibrazioni* ed i *blocking set*; e dall'altro argomenti più generali quali i *disegni combinatori*; gli *spazi lineari e semilineari* ; gli *spazi planari* e gli (n,d)-sistemi; la *teoria dei codici* ed i *sistemi di autentificazione*; l'*algebra e geometria delle iperstrutture* .

Tallini ha studiato anche queste seconde tematiche usando la loro chiara connessione con le geometrie di Galois, come quella che intercorre tra *codici e calotte*, od anche «inventando» nuove connessioni *ad hoc*, come ad esempio in [132] (in collaborazione con A. Beutelspacher e C. Zanella) dove le geometrie di Galois vengono utilizzate per costruire sistemi di autentificazione con ampio margine di sicurezza.

Archi, calotte e codici.

Per le applicazioni alla statistica ed alla teoria dei codici (cfr. [13]) è importante stabilire, per assegnati valori di s, r e q, il massimo valore di k per il quale esista una k-calotta di specie s di $\mathbb{P} = PG(r, q)$, cioè un insieme $k^s_{r,q}$ di k punti generante $\mathbb{P}$ ed avente $s+2$ come minimo numero di punti dipendenti, cfr. [14], ove si ottengono limitazioni per k e si studia il problema dell'immersione di una $k^s_{r,q}$ in una calotta di specie inferiore. Ad ogni $k^s_{r,q}$ è associato un codice C sopra $GF(q)$ di lunghezza k, dimensione $k-r-1$ e distanza $s+2$, e viceversa. Basta prendere come matrice di controllo di C la matrice le cui colonne sono i vettori delle coordinate dei punti della calotta. Il codice C è perfetto se e soltanto se la calotta $k^s_{r,q}$ è completa, cioè non è contenuta in alcuna $(k+1)^s_{r,q}$. Questo legame rende possibile l'applicazione della teoria dei codici alla teoria delle calotte, e viceversa; per esempio, esso conduce da un lato a trovare limitazioni superiori per la cardinalità k di una $k^s_{r,q}$ e dall'altro a trovare una dimostrazione geometrica del fatto che i soli codici lineari 2-correttori con distanza 5 sono il codice binario di ripetizione ed il codice ternario di Golay, cfr. [70], [81].

Nei lavori [20] e [32], facendo uso di argomentazioni geometriche poggianti sulla nozione di *k-arco* di un $PG(r, q)$, si dà risposta a questioni di statistica riguardanti gli *esperimenti fattoriali.* In [23] viene determinata una classe di calotte complete di un $PG(4, q)$: precisamente quelle possedenti due sezione iperpiane che sono quadriche ellittiche.

La nozione di calotta viene usata anche in un contesto molto più generale. Sia I una qualunque struttura d'incidenza con v punti, b blocchi e con matrice d'incidenza M. Siano $d+2$ il rango di M su $GF(2)$ ed $s+2$ il minimo numero di colonne che sono linearmente dipendenti, e si supponga $d+1<b$; tutte queste condizioni hanno il significato geometrico che certi insiemi associati alla struttura d'incidenza hanno cardinalità pari. Allora le colonne di M formano una calotta $b^s_{d,2}$ di $PG(v-1, 2)$; se inoltre h punti qualsiasi sono incidenti con al più un blocco e se ogni blocco è incidente con almeno ϱ punti, allora $d \geqslant s \geqslant [(\varrho-1)/(h-1)]$; e dualmente. Da questo risultato si deducono interessanti proprietà per la matrice di incidenza (e per il codice lineare di cui è matrice di controllo) di una vasta classe di strutture di incidenza, come gli spazi lineari uniformi (cioè i sistemi di Steiner) e di altre strutture d'incidenza aventi uno speciale significato geometrico. Un caso considerato sistematicamente da Tallini è la struttura di incidenza (P', B', ε), associata ad una assegnata struttura d'incidenza classica (P, B, ε), nel modo seguente: $P' := P$ e B' è l'insieme dei sottoinsiemi di P di tipo pari (dispari), cioè che intersecano ogni blocco di B in un insieme di cardinalità pari (dispari); o dualmente: $P' := B$, e B' è

l'insieme dei sottoinsiemi X di B di tipo pari (dispari), cioè tali che per ogni punto di P passi un numero pari (dispari) di blocchi di X. Cfr. anche [113], [119], [120], [131], [158], [162].

Lo studio degli archi e delle calotte è caso particolare dello studio di insiemi notevoli di punti di un piano e di uno spazio di Galois, aventi assegnati «caratteri». Se K è un insieme di k punti in $PG(r, q)$ o in $AG(r, q)$, un *carattere* t_s di K è il numero delle rette che intersecano K in esattamente s punti; con il metodo del «doppio conteggio» si trovano tre equazioni nei t_i — utilizzando opportunamente le quali ed effettuando sofisticate argomentazioni combinatorie — si perviene a risultati significativi, cfr. [9], [14], [23], [52], [67], [82], [93], [99], [100], [102], [115]. Fin dai suoi primi lavori in quest'àmbito, Tallini dà prova di grande abilità. Segre aveva dato un teorema di incompletezza per per i q-archi di $PG(2, q)$ con q dispari (cfr. B. Segre, *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti, Ann. Mat.* (4), **39** (1955), 357-379). La stessa questione si poneva nel caso q pari, ma appariva di difficile soluzione. Essa era stato risolto soltanto nel più semplice caso non banale $q = 8$, nel citato lavoro di Segre. Ebbene, Tallini la risolve brillantemente nella nota [9] del 1957, nella quale dimostra che ogni q-arco di $PG(2, q)$ con $q > 2$ pari è incompleto nel senso che è contenuto in un $(q+2)$-arco, univocamente determinato se $q \geqslant 4$. Il risultato viene conseguito dimostrando che le $2q$ tangenti al q-arco appartegono ad una stessa conica inviluppo, la quale deve necessariamente degenerare in due distinti fasci di rette, perché il numero delle sue rette è maggiore o uguale a $2q$ e quindi maggiore di $q+1$, che è il numero delle rette di una conica inviluppo non degenere o doppiamente degenere. I punti del q-arco, insieme ai due centri dei due fasci anzidetti, formano un $(q+2)$-arco, che completa il q-arco dato. Più arduo è il problema, da lui trattato in [99], dell'esistenza di q-archi completi di un piano proiettivo *non desarguesiano* di ordine q pari. Per il caso dispari, sono invece noti (A. Barlotti, 1965) esempi di 9-archi in piani non desarguesiani d'ordine $q = 9$.

Fibrazioni e blocking set.

Una *fibrazione parziale* è un insieme di rette di $PG(r, q)$ a due a due sghembe. Una *fibrazione* è una fibrazione parziale che sia un ricoprimento dell'insieme dei punti dello spazio; questa esiste se e solo se r è dispari.

Nei lavori [76], [77], [83], Tallini applica la teoria dei caratteri alle fibrazioni parziali, per studiare quanto una fibrazione parziale possa essere «regolare». Ad esempio, in dimensione superiore a 3, non esistono fibrazioni parziali tali che ogni sottospazio 3-dimensionale ne contenga un numero (positivo) fisso di rette; pertanto egli si rivolge allo studio delle fibrazioni parziali che hanno due caratteri rispetto agli S_3, trovando per esse vari teoremi di non esistenza. D'altra parte, dimostra che in dimensione 5 una fibrazione F, che abbia almeno una retta in comune con ogni sottospazio 3-dimensionale è necessariamente una fibrazione «geometrica» (per una generalizzazione di questa proprietà, cfr. A. Beutelspacher, J. Ueberberg, *Europ. J. Combinatorics*, **12** (1991), 277-281). In dimensione pari, le fibrazioni sono necessariamente parziali, e ne viene calcolato il numero massimo di rette che esse possono avere.

Ad un accurato studio delle fibrazioni parziali della quadrica non singolare di $PG(4, q)$, con particolare riguardo a quelle massimali, sono dedicati i lavori [125], [126], [128], [136].

Lo studio delle fibrazioni parziali massimali è collegato a quello dei *blocking set*, cioè degli insiemi di punti di $PG(r, q)$ non contenenti rette ed incontrati da ogni retta in almeno un punto. Allo studio di questi enti, Tallini dedica la serie di lavori [87], [88], [91], [98], [122], [133]. In essi, partendo al solito dalle equazioni dei caratteri di un insieme di punti, egli comincia con lo studiare le proprietà generali degli insiemi di punti a seconda che ammettano o meno rette esterne. Egli dimostra che il complementare di un blocking set irriducibile di un piano proiettivo è necessariamente un blocking set riducibile; al riguardo pone il problema se ciò accada anche negli spazi di dimensione superiore. Notevoli sono le sue costruzioni di varie classi di blocking set in $PG(3, q)$ con $q > 4$, la sua elegante caratterizzazione degli archi hermitiani di un piano d'ordine q come caso estremale di blocking set. Particolarmente significativo è il risultato asintotico secondo cui ogni spazio $PG(r, q)$ di dimensione r fissata possiede qualche blocking set, a patto che il suo ordine q sia abbastanza grande; cfr. [88] (di cui [98] è la versione inglese), in collab. con Francesco Mazzocca.

Spazi lineari e disegni.

Un contributo importante di Tallini alla teoria dei disegni è dato dalle sue ricerche sulla *composizione di disegni* e sulle *varietà di sistemi di Steiner*. Si ha una *composizione di disegni* allorché venga assegnato un disegno, in ciascun blocco del quale venga a sua volta introdotta una struttura di disegno; questo procedimento fornisce un metodo di costruzione di svariati disegni a partire da spazi di Galois , cfr. [144], [145], [161].

Un *sistema di Steiner* può essere definito come uno spazio lineare uniforme. Ricordiamo che uno *spazio semilineare* (risp. *lineare*) $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ è il dato costituito da un insieme non vuoto $\mathbb{P}$ di elementi, detti *punti*, e da un insieme $\mathcal{L}$ di sottinsiemi di $\mathbb{P}$, dette *rette*, tale due punti distinti qualsiasi appartengano ad al più una retta (risp. ad esattamente una retta); si dice che $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ è *uniforme* se le sue rette hanno un medesimo numero di punti. Una teoria generale sui rapporti fra spazi lineari (in particolare sistemi di Steiner) e «spazi combinatori» nel senso di G.-C. Rota viene data in [64], dove vengono introdotti e studiati gli spazi d-immergibili in uno spazio proiettivo. Inoltre, in analogia alla teoria dei caratteri negli spazi di Galois, viene sviluppata in [94] una teoria dei caratteri di un sottinsieme di un sistema di Steiner generale. Alla teoria degli spazi lineari e semilineari sono anche dedicati i lavori [65], [86], [142], [156], [157]; in particolare, in [156] vengono introdotti e studiati alcuni sottoinsiemi notevoli (le cliques, le anticliques, i punti vertice, i blocking sets e gli ovoidi) di uno spazio semilineare, con particolare riguardo al caso di uno spazio semilineare finito uniforme per ciascun punto del quale passi un numero costante di rette.

Un *sottospazio* di uno spazio semilineare $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ è un insieme $\mathbb{P}'$ di punti, che contenga la retta congiungente due suoi punti arbitrari distinti. Una *varietà di spazi lineari* è uno spazio semilineare, il cui insieme di sottospazi massimali è ripartito in m insiemi $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m$ tali che gli spazi di $\mathcal{S}_i$ hanno hanno la stessa cardinalità u_i ed per ogni punto passa un numero costante n_i di spazi di $\mathcal{S}_i$. Se lo spazio semilineare è uniforme, si parla più specificata-mente di *varietà di sistemi di Steiner*. Le quadriche non singolari, le forme hermitiane non singolari, le varietà di Grassmann, di Segre e di Veronese di uno spazio di Galois forniscono gli esempi fondamentali di varietà di sistemi di Steiner. Altri esempi significativi sono dati dalle geometrie parziali (nel senso di Bose) e dai quadrangoli generalizzati. Tallini stabilisce per le strutture considerate varie proprietà generali, riguardanti in particolare gli insiemi non collineari, gli insiemi intersezioni (cioè che hanno intersezione non vuota con ogni retta), i blocking set (cioè insiemi intersezione i cui complementari sono anch'essi insiemi intersezione) e le fibrazioni in rette (cioè insiemi di rette a due a due disgiunte), cfr. [124], [130]).

(n, d)-sistemi e spazi planari.

Nel 1985, nella raccolta di lezioni [101], Tallini delinea una teoria dei cosiddetti (n, d)-sistemi di uno spazio affine o proiettivo, teoria ulteriormente sviluppata in [108] (in collab. con P. V. Ceccherini). Sia $(\mathbb{P}, \mathcal{S})$ uno spazio affine o proiettivo di dimensione r, per il quale $\mathbb{P}$ denota l' insieme dei punti, $\mathcal{S}$ l'insieme dei sottospazi ed $\mathcal{S}_d$ l'insieme dei sottospazi d-dimensionali. Un sottinsieme $\mathcal{F}_{n,d} \subset \mathcal{S}_d$ si chiama un (n, d)-sistema se per ogni insieme indipendente $X \subset \mathbb{P}$ con $|X| = n$, esiste esattamente un $F \in \mathcal{F}_{n,d}$ con $X \subset F$. Se $(\mathbb{P}, \mathcal{S})$ ha ordine 1, cioè se $\mathcal{S} = P(\mathbb{P})$, allora $\mathcal{F}_{n,d}$, è un sistema di Steiner e viceversa. Ogni $\mathcal{F}_{1,d}$ è una d-fibrazione, cioè una partizione dell' insieme dei punti con sottospazi d-dimensionali, e viceversa; [e si dimostra che un $\mathcal{F}_{1,d}$ esiste in uno $PG(r, q)$ se e soltanto se $d + 1$ divide $r + 1$].

Lo sviluppo della teoria degli (n, d)-sistemi unifica pertanto situazioni apparentemente lontane.

Nel caso finito viene calcolata la cardinalità $|\mathcal{T}_{n,d}|$, si trovano condizioni necessarie per l'esistenza di (n, d)-sistemi, e si mostra come l'esistenza di certi sistemi implica quella di certi altri. Ad esempio dall'esistenza di un (n, d)-sistema in un $PG(r, K)$ (risp. in un $AG(r, K)$) segue quella di un $(n+1, d+1)$-sistema in un $AG(r+1, K)$ e di un $(n-1, d-1)$-sistema in un $PG(r-1, K)$ (risp. di un $(n-1, d-1)$-sistema in un $PG(r-1, K)$). Nel caso finito si hanno vari teoremi di non esistenza, come il seguente: se $r-d$ è un numero primo e $2 \leqslant n \leqslant d$, allora non esiste alcun $\mathcal{T}_{n,d}$ in $PG(r, q)$. Al contrario, nel caso infinito (numerabile) esiste sempre qualche $\mathcal{T}_{n,d}$ in $PG(r, K)$ ed in $AG(r, K)$, qualunque siano gli interi n, d, r tali che $1 \leqslant n \leqslant d$ ed $r \geqslant 2d - n + 2$.

Con gli (n, d)-sistemi si possono costruire rilevanti esempi di matroidi di un tipo speciale, i cosiddetti (σ, n)-spazi. Una *matroide semplice* (o *spazio combinatorio*) M su un insieme P di punti è una matroide su P tale che il vuoto, ogni singleton di P e P stesso sono chiusi. Se M_i è l'insieme degli i-chiusi (chiusi di rango i) di una matroide semplice M di rango r, allora $M_0 = \emptyset$, $M_1 = P$ e $M_{n+1} = \{P\}$; e si scrive $M = (M_1, \dots, M_n)$. Gli elementi di $M_2, M_3, \dots, M_n$ si chiamano rette, piani, ..., iperpiani. Gli *spazi lineari* $(P, \mathcal{L})$ sono matroidi semplici di rango 3 con $M_1 = P$, $M_2 = \mathcal{L}$; e viceversa. Gli *spazi planari* $(P, \mathcal{L}, \Pi)$ sono matroidi semplici di rango 4 con $M_1 = P$, $M_2 = L$, $M_3 = \Pi$; e viceversa. Ricordiamo che per definizione uno *spazio planare* è una terna $(\mathbb{P}, \mathcal{L}, \Pi)$, ove $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ è uno spazio lineare e Π è un insieme di sottospazi, chiamati *piani*, verificante le tre condizioni seguenti: $|\Pi| > 1$, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati, tre punti non allineati qualsiasi di $\mathbb{P}$ appartengono ad esattamente un piano.

Sia $M = (M_1, \dots, M_n)$ una matroide semplice di rango $n+1 \geqslant 4$ su un insieme $P = M_1$. Ogni k-chiuso Y di rango $k \geqslant 3$ di M può essere considerato come uno spazio lineare su Y. Se ogni n-chiuso di M è isomorfo (come spazio lineare) ad un dato spazio lineare, allora M si chiama un (σ, n)-spazio. Per esempio, un $(\sigma, 3)$-spazio è un σ-spazio nel senso di F. Buekenhout e R. Deherder (*Bull. Soc. Math. Belg.*, **23** (1971), 348-359), cioè è uno spazio planare con tutti i piani isomorfi ad un dato spazio lineare σ. Primi esempi di (σ, n)-spazi possono desumersi dai t-sistemi di Steiner (con $t \geqslant 3$) e dagli spazi proiettivi od affini. Altri esempi significativi si possono proprio ottenere da un (n, d)-sistema $\mathcal{T}_{n,d}$ di uno spazio affine o proiettivo r-dimensionale $\mathbb{P}$, considerando il (σ, n)-spazio $M = (M_1, \dots, M_n)$, dove M_i è l'insieme dei sottospazi $(i-1)$-dimensionali di $\mathbb{P}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ ed $M_n = \mathcal{T}_{n,d}$.

Agli spazi planari ed agli ovoidi in essi contenuti è specificatamente dedicato il lavoro [97], di cui [109] è la versione inglese. Tallini chiama *ovoide* di uno spazio planare $(\mathbb{P}, \mathcal{L}, \Pi)$ una calotta Ω (insieme di punti di $\mathbb{P}$ a tre a tre non allineati), tale che, per ogni suo punto P l'unione delle rette tangenti in P ad Ω è un sottospazio di $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ intersecato da ogni piano per P secondo una retta. Egli dà le seguenti eleganti caratterizzazioni degli ovoidi e delle quadriche ellittiche di $PG(3, q)$. (1) Uno spazio planare uniforme (cioè con rette equipotenti) che contenga un ovoide è necessariamente $PG(3, q)$; inoltre l'ovoide è un ovoide classico di $PG(3, q)$ (una quadrica ellittica se q è dispari). (2) Sia dato uno spazio planare uniforme $(\mathbb{P}, \mathcal{L}, \Pi)$, per il quale R ed r denotano il numero delle rette di una stella e di un fascio rispettivamente, e sia H una calotta di $(\mathbb{P}, \mathcal{L}, \Pi)$ contenente h punti. Se r è pari, oppure se r è dispari ed ogni sezione piana di H contiene un numero di punti diverso da $r+1$, allora $h \leqslant R - s + 1$, ove vale l'uguaglianza sse $(\mathbb{P}, \mathcal{L}, \Pi) = PG(3, q)$ ed H ne è un ovoide.

Iperstrutture.

Allo studio dele strutture algebriche multivoche Tallini ha dedicato una serie di lavori ([61], [95], [104], [134], [143], [149], [152]), che ne mettono in luce interessanti aspetti geometrici e combinatori. Data una *operazione multivoca* $o: \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to P(\mathbb{P}): (x, y) \mapsto xoy$, la coppia $(\mathbb{P}, o)$ si chiama un *ipergruppoide* se $\emptyset \notin \mathbb{P}o\mathbb{P}$, e si chiama un *ipergruppo* se, inoltre, verifica la proprietà associativa: «$\forall x, y, z \in \mathbb{P}: (xoy)\, oz = xo(yoz)$» e la proprietà dei quozienti: «$\forall x \in \mathbb{P}: (xoy)\, oz = xo(yoz)$». In [61] e [95] vengono presentati gli aspetti geometrici delle strutture multivoche, associando ad ogni ipergruppoide $(\mathbb{P}, o)$ i seguenti sottinsiemi di $P(\mathbb{P})$:

$$\mathcal{L} := \{xoy \mid x, y \in \mathbb{P} : x \neq y\}, \qquad \mathcal{C} := \{X \in P(\mathbb{P}) \mid XoX \subset X\} \cup \{\emptyset\}.$$

La coppia $(\mathbb{P}, \mathcal{C})$ risulta essere un *sistema di chiusura* (rispetto all'intersezione). Inoltre $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ è uno *spazio lineare* se

$$\forall x, y \in \mathbb{P} : \; x, y \in xoy, \qquad \text{«}|xoy| = 1 \text{ sse } x = y\text{»},$$

$$(xoy)\, ox = xo(yox), \qquad (xox)\, oy = xo(xoy), \qquad (xoy)\, oy = xo(yoy).$$

Se tale spazio lineare è un k-sistema di Steiner (cioè se «$\forall x \neq y \in \mathbb{P}$: $|xoy| = k$»), si dice che $(\mathbb{P}, o)$ è un k-ipergruppoide di Steiner. Viceversa, ogni spazio lineare $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ diviene un ipergruppoide $(\mathbb{P}, o)$ definendo «o» come la composizione idempotente che associa a due punti distinti l'insieme dei punti della retta che li congiunge. In quest'ordine di idee, Tallini dimostra il bel risultato di caratterizzazione, secondo cui $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ è uno spazio proiettivo sse $(\mathbb{P}, o)$ è un ipergruppo di Steiner. Più generalmente, Tallini determina in [134] le condizioni necessarie e sufficienti per (P, o) affinché $(P, \mathcal{L})$ sia uno spazio semilineare, e dimostra che (P, o) è associativo sse $(P, \mathcal{L})$ è l' unione di spazi proiettivi a due a due disgiunti.

In [104], dato un qualunque ipergruppoide $(\mathbb{P}, o)$ con $|\mathbb{P}| = n \in \mathbb{N}$, si considera la funzione caratteristica $\chi: P(\mathbb{P}) \to (Z_2)^n$: la χ associa all' insieme delle rette di $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ l' insieme delle *parole* di un codice binario di lunghezza n, ovvero, se si vuole, un insieme di *punti* dello spazio proiettivo $PG(n-1, 2)$. L'interesse di questa associazione sta nel fatto che le proprietà geometriche di tali enti vengono in tal modo messe in relazione alle proprietà algebriche dell'ipergruppoide assegnato.

In [134] viene sviluppata una teoria della dimensione per gli ipergruppi. La stessa teoria viene successivamente estesa, in [150], per il caso astratto di un qualunque sistema di chiusura $(\mathbb{P}, \mathcal{C})$, nel quale cioè l'insieme $\mathbb{P}$ dei punti è un insieme qualunque e l'insieme $\mathcal{C}$ dei chiusi è un qualunque sottinsieme di $P(\mathbb{P})$ chiuso rispetto all'intersezione.

* * *

I libri, le dispense di corsi, e la raccolta di seminari, che Tallini ha dedicato alle geometrie combinatorie (cfr. ad esempio [58], [59], [96], [114], [129], [141], [146], [154], [158]), sono soltanto una piccola parte del suo enorme impegno rivolto ad indirizzare i giovani alle molteplici problematiche presenti in questo campo di ricerca. La sua passione per l'insegnamento era grandissima, accompagnata com'era da un irresistibile necessità di comunicare idee matematiche agli altri. Ha sempre donato agli studenti ed agli allievi gran parte del suo tempo, prodigandosi generosamente nell'infondere in loro nuove idee e la sua stessa passione per la geometria e la combinatoria. Molti di questi allievi, divenuti a loro volta professori universitari, continuano a sviluppare la scuola italiana di geometria combinatoria seguendo i suoi insegnamenti. Il suo lavoro scientifico continua a vivere nel lavoro e nell'affetto dei suoi numerosi allievi ed amici.

PIER VITTORIO CECCHERINI

PUBBLICAZIONI

[1] *Sopra un teorema di A. Lichnerowicz sulla geometria kähleriana*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **17** (1954), 204-209.

[2] *Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8), **18** (1955), 367-373.

[3] *Caratterizzazione delle quadriche negli spazi lineari finiti di dimensione qualunque e di ordine dispari*, Atti V Congresso UMI, Pavia-Torino, 1955, Cremonese, Roma (1956), 337-338.
[4] *Su una estensione del teorema di Desargues*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **11** (1956), 46-48.
[5] *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti*, Note I, II, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **20** (1956), 311-317, 442-446.
[6] *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **42** (1956), 119-164.
[7] *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. Appl. (5), **16** (1957), 328-351.
[8] *Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti*, Convegno Internazionale Reticoli e Geometrie Proiettive, Palermo-Messina, 1957, Cremonese, Roma (1958), 136-139.
[9] *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica* $p = 2$, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **23** (1957), 242-245.
[10] *Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti*, Note I, II. Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **24** (1958), 19-23, 135-138.
[11] *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche in uno spazio finito*, La Ricerca Scientifica (28), 4 (1958), 820-823.
[12] *Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di* $S_{3,q}$, Note I, II, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **26** (1959), 484-489, 644-648.
[13] *Le geometrie di Galois e le loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione*, Rend. Mat. Appl. (5), **19** (1960), 379-400.
[14] *On caps of kind s in a Galois r-dimensional space*, Acta Arith., **7** (1961), 19-28.
[15] *Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **30** (1961), 706-712.
[16] *Sulle ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che contengono tutti i punti di uno spazio di Galois* $S_{r,q}$, Rend. Mat. Appl. (5), **20** (1961), 431-479.
[17] *Una proprietà in grande delle varietà a connessione affine compatte con applicazioni alle varietà a connessione proiettiva*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **32** (1962), 644-648.
[18] *Sulle connessioni proiettivamente equivalenti di una* V_n *compatta*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **33** (1962), 244-252.
[19] *Intorno alle forme di uno spazio di Galois ed agli spazi subordinati giacenti su esse*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **33** (1962), 421-428.
[20] *Un'applicazione delle geometrie di Galois a questioni di statistica*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **35** (1963), 479-485.
[21] *Lezioni di geometria differenziale: Varietà riemanniane compatte*, Ist. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. Roma, a.a. 1962-63.
[22] *Sulle connessioni di Weyl localmente metriche*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8), **36** (1964), 1-7.
[23] *Calotte complete di* $S_{4,q}$ *contenenti due quadriche ellittiche quali sezioni iperpiane*, Rend. Mat. Appl. (5), **23** (1964), 108-123.
[24] *Újabb eredmények a Galois-Geometriákban*, A Magyar Tudományos Akademia, III (14), **2** (1964), 183-192.
[25] *Connessioni dotate di metriche locali su una varietà differenziabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, **25** (1965-66), 1-10.
[26] *Sulla struttura algebrica delle trasformazioni tra parti di un insieme*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **71** (1966), 295-322.
[27] *Local metrics with a global connection*, Annales Univ. Sci. Budapestinensis, Sectio Math., **9** (1966), 23-26.
[28] *Lezioni di geometria differenziale*, Ist. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. Roma (1966).
[29] *Appunti di algebra*, Ist. Mat., Univ. L'Aquila (1966-67).
[30] *Metriche locali dotate di una connessione globale su una varietà differenziabile*, Periodico di Matematiche (4), **46** (1968), 340-358.
[31] *Lezioni di istituzioni di geometria superiore*, Ist. Geometria, Univ. Torino (1968).
[32] *Una soluciòn geomètrica a ciertos problemas de estadística*, Atti Simposio Panamericano de Matemàtica Aplicada (1968).
[33] *Lecciones de geometria superios: cohomologia de las formas sobre una variedad diferenciable*, Parte I, II. Inst. Mat. Univ. Rosario (1968).
[34] *Introduzione alla coomologia a coefficienti in un fascio*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **117** (1969), 1-24.
[35] *Geometria de Lobachewsky en un espacio finito* $P_n[GF(q)]$, ($n = 1, 2$; *q impar*), Revista Mat. Fis. Teor. Univ. Tucuman (A), **20** (1970), 203-232 (with S. BRUNO).
[36] *Categorie e funtori*, Ist. Mat. Univ. Napoli (1969).

[37] *Geometria iperbolica in un piano di Galois $S_{2,q}$, con q dispari*, Ricerche di Matematica, **19** (1970), 48-78 (in collab. con S. BRUNO).
[38] *Appunti sui fondamenti di geometria affine e proiettiva*, Ist. Mat. Univ. Napoli (1970).
[39] *Ruled graphic systems*, Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni (Perugia, 11-17 settembre 1970), Oderisi, Gubbio (1971), 385-393.
[40] *Geometrie di Galois e loro applicazioni alla fisica*, Sem. Lab. Naz. CNEN, Frascati (1970), LNF-70/63, 1-27 (in collab. con E. G. BELTRAMETTI).
[41] *Strutture geometriche: spazi topologici e varietà differenziabili*, Liguori, Napoli (1970).
[42] *Cohomologia de Cech y cohomologia a coeficientes en un haz*, Mathematicae Notae, **22** (1970-71), 27-47.
[43] *Lezioni di geometria superiore: spazi proiettivi*, Ist. Mat. Univ. Napoli (1970-71).
[44] *Topologia associata ad uno spazio grafico*, Ricerche di Matematica, **20** (1971), 253-259.
[45] *Sistemi grafici rigati*, Ist. Mat. Univ. Napoli, Relaz., **8** (1971), 1-47.
[46] *Strutture d'incidenza dotate di polarità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **41** (1971), 1-42.
[47] *Lezioni di geometria superiore: coomologia a coefficienti in un fascio*, Ist. Mat. Univ. Napoli (1971-72).
[48] *Strutture grafiche proiettive*, Liguori, Napoli (1973).
[49] *Varietà differenziabili e coomologia di De Rham*, Cremonese, Roma, 1973.
[50] *Probemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Ist. Mat. Univ. Napoli, Relaz., **30** (1971), 1-30.
[51] *Una dimostrazione del teorema di De Rham*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **139** (1975), 1-16.
[52] *I k-insiemi di classe $[0, 1, n, q+1]$ regolari di $S_{r,q}$*, Quad. Gruppi Ric. Mat. del CNR, Atti Convegno del GNSAGA (Modena, 10-11 gennaio 1975), Firenze (1976), 101-110.
[53] *Lezioni sulla teoria dei gruppi di Lie*, Sem. Lab. Naz. CNEN, Frascati (1975), LNF-75/16(L), 1-109 (in collab. con C. MENCUCCINI e A. REALE).
[54] *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space, Teorie Combinatorie*, Vol. II, Atti dei Convegni Lincei, **17**, Roma, 3-15 settembre 1973 (1976), 153-165.
[55] *Questioni di geometria combinatoria*, Sem. Ist. Mat. Univ. L'Aquila (1977), 1-16.
[56] *Spazi di rette e geometrie combinatorie*, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **3** (1977).
[57] *Beniamino Segre* (*1903-1977*), Archimede (1977), 143-145.
[58] *Lezioni di Geometria III: Spazi dei cerchi e delle sfere. Lo spazio delle coniche e la superficie di Veronese. Teorie delle coniche in un piano di Galois*, Ist. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. Roma (1977-78).
[59] *Lezioni di Geometria III: Archi, ovali, insiemi quadratici, calotte negli spazi finiti*, Ist. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. Roma (1977-78).
[60] *Grafi e spazi geometrici*, Sem. Ist. Mat. Univ. L'Aquila (1978), 1-18.
[61] *Ipergruppoidi di Steiner e geometrie combinatorie*, Atti Convegno «Sistemi binari e loro applicazioni» (Taormina 1978), 119-125.
[62] *Spazi parziali di rette, spazi polari, geometrie subimmerse in spazi proiettivi*, Appunti redatti da A. Venezia, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **14** (1979), 1-58.
[63] *Introduzione alla teoria dei codici*, Appunti redatti da O. Ferri, Sem. Ist. Mat. Univ. L'Aquila (1979), 1-11.
[64] *Spazi combinatori e sistemi di Steiner*, Riv. Mat. Univ. Parma (4), **5** (1979), 221-248.
[65] *La categoria degli spazi di rette*, Sem. Ist. Mat. Univ. L'Aquila (1980), 1-25.
[66] *Codici e geometrie combinatorie*, Appunti redatti da A. Di Concilio e P.M. Lo Re, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, 23 (1980), 1-16.
[67] *I k-insiemi di rette di $PG(d, q)$ studiati rispetto ai fasci di rette*, Parte I: Appunti redatti da P. M. Lo Re; Parte II: Appunti redatti da A. Venezia, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **28** (1980), 1-17, 1-16.
[68] *La geometria delle grassmanniane di uno spazio di Galois*, Convegno «Strutture combinatorie e loro applicazioni», CIRM, Trento, 20-25 ottobre 1980, 1-33.
[69] *On a characterization of the Grassmann manifold representing the lines in a projective space*, in P. J. CAMERON *et al., Finite Geometries and Designs*, Proc. of the 2nd Isle of Thorns Conference, Cambridge University Press (1981), 354-358 (London Math. Soc., LNS 49).
[70] *Codes, caps and linear spaces*, in P. J. CAMERON *et al., Finite Geometries and Designs*, Proc. of the 2nd Isle of Thorns Conference, Cambridge University Press (1981), 72-80 (London Math. Soc., LNS 49) (in collab. con P. V. CECCHERINI).
[71] *Commemorazione di Beniamino Segre*, Rend. Mat. Appl. (7), **1** (1981), 1-29.

[72] *Su di una caratterizzazione della varietà di Grassmann rappresentativa dei piani di uno spazio proiettivo*, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **34** (1981), 1-24 (in collab. con A. BICHARA).
[73] *On a theorem by W. Benz characterizing plane Lorentz transformations in Jaernefelt's world*, J. Geometry, **17** (1981), 171-173.
[74] *Su una caratterizzazione della grassmanniana delle rette di uno spazio proiettivo*, Rend. Sem. Mat. Brescia, **6** (1981), 82-86.
[75] *Geometrie d'incidenza e matroidi*, Quad. IAC del CNR (3), **127** (1981), 1-34.
[76] *Fibrazioni in rette di PG*(r, q), Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **37** (1981), 1-17.
[77] *Fibrazioni in rette di PG*(r, q), Appunti curati da O. Ferri, Sem. Ist. Mat. Univ. L'Aquila (1981), 1-16.
[78] *La superficie di Veronese: aspetti geometrici e combinatorici*, Appunti redatti da A. Bichara. Ist. Mat. Appl. Fac. Ing. Univ. L'Aquila (1982), 1-20.
[79] *The geometry on Grassmann manifolds representing subspaces in a Galois space*, Ann. Discrete Math., **14** (1982), 9-38.
[80] *On a characterization of the Grassmann manifolds representing the planes in a projective space*, Ann. Discrete Math., **14** (1982), 129-150 (in collab. con A. BICHARA).
[81] *Caps related to incidence structures and to linear codes*, Ann. Discrete Math., **14** (1982), 175-182 (in collab. con P. V. CECCHERINI).
[82] *On line k-sets of type* $(0, n)$ *with respect to lines in PG*(d, q), Ann. Discrete Math., **14** (1982), 283-292.
[83] *Fibrazioni mediante rette in PG*(r, q), Le Matematiche (1), **37** (1982), 8-27.
[84] *Campi di Galois non standard*, Redazione di P. M. Lo Re, Ist. Mat. e Mecc. Raz. Fac. Ing. Univ. Napoli, Serie rapporti interni, **44** (1982), 1-22.
[85] *Problemi e risultati in geometria combinatoria* (A cura di L. Berardi, F. Eugeni, O. Ferri), Ist. Mat. Appl. Fac. Ing. Univ. L'Aquila (1982), 1-19.
[86] *Spazi di rette finiti e k-insiemi di PG*(r, q), Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **42** (1982), 1-24.
[87] *k-insiemi e blocking sets in PG*(r, q) *e in AG*(r, q), Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. Appl. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, **1** (1982), 1-36.
[88] *On the non existence of blocking-sets in PG*(n, q) *and AG*(n, q) *for all large enough n*, Pubbl. Ist. Mat. Univ. Napoli (3), **31** (1982-83), 1-8 (in collab. con F. MAZZOCCA).
[89] *Beniamino Segre*, Ann. Discrete Math., **18** (1983), 5-12.
[90] *On a characterization of Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space*, Ann. Discrete Math., **18** (1983), 113-131 (in collab. con A. BICHARA).
[91] *Blocking sets nei sistemi di Steiner e d-blocking sets in PG*(r, q) *ed AG*(r, q), Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. Appl. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, **3** (1983), 1-32.
[92] *A characterization of the family of secant lines of an elliptic quadric in PG*$(3, q)$*, q odd*, Rend. Sem. Mat. Brescia, **7** (1984), 297-305 (Atti Convegno «Geometria combinatoria e di incidenza, La Mendola 4-11 luglio 1982») (in collab. con O. FERRI).
[93] *Spazi di rette finiti e k-insiemi di PG*(r, q), Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **192** (1984), 1-24.
[94] *On c-sets in a Steiner systems S*(t, k, v), Mitt. Math. Sem. Giessen (3), **165** (1984), 211-222.
[95] *Geometric hyperquasigroups and line spaces*, Acta Univ. Carolinae Math. Phys., **25** (1984), 69-73.
[96] *Lezioni di Geometria III,* anno accad. 1983-84, Ist. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. Roma «La Sapienza» (1984).
[97] *Ovoidi e calotte in spazi planari*, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **53** (1984).
[98] *On the non-existence of blocking sets in PG*(n, q) *and AG*(n, q)*, for all large enough n*, Simon Stevin, **59** (1985), 43-50 (in collab. con F. MAZZOCCA).
[99] *Sui q-archi completi di un piano proiettivo non desarguesiano di ordine q pari*, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **54** (1985), 1-24.
[100] *On sets of given type in a Steiner system*, in C. A. BAKER and L. M. BATTEN (eds.), *Finite Geometries*, Dekker, New York and Basel (1985), 307-319; Lecture Notes in Pure and Applied Math., **103**.
[101] *Spazi geometrici, spazi di Galois,* (n, d)*-sistemi in* $P_{r,k}$ *e* $A_{r,k}$, Lezioni di Geometria III, Appunti raccolti da A. Ippolito, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **63** (1985), 1-91.
[102] *Teoria dei k-insiemi in uno spazio di Galois. Teoria dei codici correttori*, Lezioni di Geometria III, Appunti raccolti da M. Del Buono, Quad. Sem. Geom. Comb. Ist. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma, **64** (1985).

[103] *Introduzione alla teoria dei codici correttori*, Dip. Mat. Univ. Roma «La Sapienza» (1985).
[104] *On Steiner hypergroups and linear codes*, Atti Convegno «Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni», Univ. Udine (1985), 87-91.
[105] *Partial line spaces and algebraic varieties*, Atti Convegno Combinatorica (Roma, 1983), Ist. Naz. Alta Mat., Symposia Mathematica, **28** (1985), 203-217.
[106] *Caratterizzazione grafica di varietà algebriche rigate*, Rend. Circolo Mat. Palermo (2), 8 (1985), 251-268.
[107] *Beniamino Segre*, Acta Arithmetica, **45** (1985), 1-3.
[108] *A new class of planar π-spaces and some related topics*: (n, d)*-systems and* (s, n)*-spaces*, J. Geometry, **27** (1986), 69-86 (in collab. con P. V. CECCHERINI).
[109] *Ovoids and caps in planar spaces*, Ann. Discrete Math., **30** (1986), 347-354.
[110] *Campi di Galois non standard*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **209** (1986), 1-17.
[111] *Spazi parziali di rette e codici correttori, Lezioni di Geometria Superiore*, Appunti curati da M. Tito, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **62** (1986), 1-42.
[112] *Linear codes associated with geometric structures*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **66** (1986), 1-10.
[113] *Spazi geometrici e codici lineari associati*, Pubbl. Dip. Mat. e Appl. Univ. Napoli, Preprint, **9** (1987), 1-17.
[114] *Lezioni di Geometria III*, anno accad. 1986-87: *Campi di Galois* (Appunti raccolti da F. Mazzocca e D. Olanda, 1-29); *Spazi geometrici* (Appunti raccolti da E. Manduchi, 1-39); *Varietà algebriche proiettive* (Appunti raccolti da R. Rota, 1-43); *Ipersuperficie algebriche* (Appunti curati da M. Tito, 1-24); *Quadriche e varietà grassmanniane in* $PG(r, q)$ (Appunti curati da E. Zizioli, 1-100), Dip. Mat. Univ. Roma «La Sapienza» (1987).
[115] *Some new results on sets of type* (m, n) *in projective planes*, J. Geometry, **29** (1987), 191-199.
[116] *Linear codes associated with geometric structures*, Results in Math., **12** (1987), 411-422.
[117] *Sugli insiemi di rette di tipo pari di uno spazio di Galois* $PG(3, q)$, Rend. Mat. Appl. (7), **7** (1987), 1-16.
[118] *Spazi parziali di rette e codici correttori*, Rivista Mat. Pura Appl., **1** (1987), 43-69.
[119] *Spazi geometrici e codici lineari associati*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **57** (1987), 321-336.
[120] *Codici correttori e strutture geometriche*, Quad. Dip. Mat. Univ. Messina, **1** (1987), 1-16.
[121] *Insiemi di rette di tipo pari in* $PG(3, q)$, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. Pura Appl. Univ. L'Aquila, **10** (1987), 1-23.
[122] *On blocking sets in finite projective and affine spaces*, Ann. Discrete Math., **37** (1988), 433-450.
[123] *Topological Grassmann spaces*, Rend. Mat. Appl. (7) 8 (1988), 223-240 (in collab. con J. MISFELD e C. ZANELLA).
[124] *Varietà di sistemi di Steiner*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **88** (1988), 1-71.
[125] *Fibrazioni mediante rette in una quadrica non singolare* $Q_{4,q}$, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **90** (1988), 1-22.
[126] *Fibrazioni mediante rette in quadriche e varietà di Grassmann di* $PG(r, q)$, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **100** (1988),1-31.
[127] *Varietà algebriche e spazi parziali di rette*, Atti Convegno GNSAGA del CNR, Torino (1984) (1988), 197-220.
[128] *Fibrazioni mediante rette in una quadrica non singolare* $Q_{4,q}$*, di* $PG(4, q)$, Atti Accad. Pelor. Peric., Cl. I Sc. Fis. Mat. Nat., **66** (1988), 127-146.
[129] *Lecture on Galois geometries and Steiner systems*, Corso tenuto al «Centre Internazional des Sciences Meccaniques» (Udine, giugno 1989), Dip. Mat. Univ. Roma «La Sapienza» (1989).
[130] *Varietà di sistemi di Steiner*, Rend. Mat. Appl. (7) **9** (1989), 545-588.
[131] *Even type and odd type sets in a Steiner system and linear codes*, Le Matematiche, **45** (1990), 187-195.
[132] *Examples of essentially s-fold secure geometric authentication systems with large s*, Rend. Mat. Appl. (7), **10** (1990), 321-326 (in collab. con A. BEUTELSPACHER e C. ZANELLA).
[133] *Teoria dei c-insiemi in uno spazio di Galois. Blocking sets in* $PG(r, q)$ *ed in* $AG(r, q)$, Lezioni di Geometria III, Appunti redatti da G. Senia, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **101** (1990), 1-129.
[134] *General multivalued algebraic structures and geometric spaces*, Proc. Fourth Int. Congress on «Algebraic Hyperstructures and Applications», Xanthi (1990), 197-202.

[135] *The geometry of a countable dimensional Galois space $PG(N, q)$*, J. Geometry, **39** (1990), 24-25.
[136] *Blocking sets with respect to planes in $PG(3, q)$ and maximal spreads of a non-singular quadric in $PG(4, q)$*, Mitt. Math. Sem. Giessen, **201** (1991), 141-147.
[137] *On the order structure in the line geometry of a projective space*, J. Geometry, **41** (1991), 16-32 (in collab. con A. BICHARA, J. MISFELD e C. ZANELLA).
[138] *Le (n)-varietà di uno spazio proiettivo $P_{r,k}$*, Lezioni di Geometria IV, Appunti redatti da L. Leone, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **102** (1991), 1-43.
[139] *Asymptotic questions in Galois geometries*, Atti Convegno «Linear Spaces» (Capri, 1991), 1-23.
[140] *Le (n)-varietà di uno spazio proiettivo $P_{r,k}$*, Ratio Mathematica, **5** (1992), 107-154.
[141] *Spazi di chiusura; spazi lineari; reticoli e spazi lineari*, Lezioni di geometria superiore, anno accad. 1991-92, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **104** (1992).
[142] *Le (n)-varietà in spazi lineari*, in G. FAINA e G. TALLINI (eds.), *Giornate di Geometrie Combinatorie*, Dip. Mat. Univ. Perugia (1993), 25-55.
[143] *Dimensione negli ipergruppi*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **107** (1993), 1-20.
[144] *Composizione di disegni*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **109** (1993), 1-36.
[145] *Composizione di disegni*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **254** (1993), 1-25.
[146] *Archi, ovali, calotte, ovoidi*, Lezioni tenute nel corso della Scuola Estiva di Geometria Combinatoria. Univ. della Basilicata, Potenza (1993).
[147] *Disegni e spazi lineari*, Lezioni di Geometria IV, anno accad. 1992-93 Dip. Mat. Univ. Roma «La Sapienza», 1993, 1-184.
[148] *Insiemi prospettivi*, Le Ricerche di Matematica (1994).
[149] *Dimensione negli ipergruppi*, in *Scritti in onore di Giovanni Melzi*, Ed. Vita e Pensiero (1994).
[150] *Dimensione negli spazi geometrici*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **115** (1994), 1-16.
[151] *Geometria elementare da un punto di vista superiore*, Periodico di Matematiche (1994), 5-13.
[152] *Dimensions in multivalued algebraic structures*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **1** (to appear).
[153] *Insiemi prospettivi*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **113** (1994), 1-12.
[154] *Lezione di Geometria IV*, anno accad. 1993-94, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **117** (1995), 1-155.
[155] *Questioni combinatorie negli spazi lineari infiniti*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **118** (1995), 1-4.
[156] *Sui sottoinsiemi notevoli di uno spazio semilineare*, Quad. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. «G. Castelnuovo» Univ. Roma «La Sapienza», **119** (1995), 1-7 (in collab con M. SCAFATI).
[157] *Semilinear spaces and their remarkable subsets*, J. Geometry, **56** (1996), 161-167 (in collab. con M. SCAFATI).
[158] *Geometria di Galois e teoria dei codici*, Ed. CISU, Roma, 1995 (in collab. con M. SCAFATI).
[159] *Composed designs*, Journal of Statistical Planning and Inference (Bose Conference issue, to appear).
[160] *Combinatorial problems in infinite spaces*, Designs, Codes and Cryptography, **9** (1996), 247-249.
[161] *On the meaning of dimension in a geometric structure*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **2** (in collab. con M. SCAFATI).
[162] *Geometria combinatoria e teoria dei codici.* Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche (1995), 132-164.