

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE DELLA *MATEMATICA LOGICO INTUITIVA*

Bruno de Finetti

Un'opera di matematica e un insegnamento matematico che si rivolgano a studiosi di discipline prevalentemente piuttosto lontane dalla matematica devono indubbiamente proporsi finalità e battere vie loro proprie; il dubbio si affaccia invece quando si tratta di concretare in qual senso e modo realizzare questi intendimenti. Bisogna – s'intende – ridurre e semplificare il programma rispetto a quelli (tanto per un lontano ma sicuro punto di riferimento) del biennio di Scienze, ma lo si può fare o coll'idea che tale insegnamento risponda a finalità applicative particolari e si debbano quindi far imparare certi risultati col minimo sforzo concettuale, o che esso serva all'opposto a integrare organicamente con un appropriato innesto di elementi di pensiero matematici la formazione mentale, e occorra quindi presentare nozioni e concetti in una sintesi ridotta al minimo di quantità attraverso il massimo di concentrazione.

È mia precisa convinzione che lo scopo da proporsi, specie rivolgendosi a studiosi di scienze sociali, debba essere quest'ultimo. Mentre per coloro che, come ad es. gli ingegneri, hanno effettivo bisogno della tecnica del calcolo è concepibile che taluno (non io) ritenga vantaggioso farla apprendere colla minor fatica anche a scapito della profondità di comprensione, nel nostro caso tale fatica sarebbe del tutto sterile e sprecata, perché il bisogno di svolgere calcoli non si presenta mai o quasi mai, mentre il bisogno di impostare e intuire problemi complessi ed astratti coll'ausilio della matematica è forse più impellente che in qualsiasi altro campo.

A questo concetto informatore mi sono attenuto e ispirato, ritornando anche ripetutamente nel testo (v. ad es. in modo speciale il n. 77) a giustificare e chiarire le ragioni di tale atteggiamento. Ne è risultata una trattazione sensibilmente diversa dalle usuali sotto molti aspetti, e perciò sarà particolarmente necessario premettere anche qualche chiarimento.

La materia è – naturalmente – press'a poco quella che tradizionalmente si svolge nel corso di Matematica generale delle Facoltà di economia e commercio, sfrondata però quanto più possibile degli sviluppi pesanti richiedenti un eccessivo tecnicismo, ma integrata in compenso da qualche argomento che vale a completare la trattazione coordinandola in un disegno unitario e a renderla indipendente da ogni eventuale reminiscenza di anteriori studi matematici.

Più però che per la sua delimitazione, la materia del corso apparirà divergere dalle usuali trattazioni per altri aspetti ed effetti del costante sforzo di coordinamento, e più ancora di fusione, fra argomenti suscettibili di essere considerati come diverse interpretazioni di un medesimo schema di ragionamento. L'immediata introduzione del concetto di funzione o operazione nel suo più ampio significato logico costituisce ad es. una premessa che riaffiora continuamente; e con analogo ufficio di comune fondamento per molteplici sviluppi è introdotto con massima generalità il concetto di sistema lineare (spazio vettoriale), ciò che porta – come effetto più appariscente – alla trattazione dei determinanti sostanzialmente fusa con la geometria analitica; altro esempio di fusione, quello delle serie la cui trattazione è assorbita in quella delle serie di potenze. Oltre che in tali accorgimenti d'impostazione, intesi ad evitare ripetizioni e sdoppiamenti di ragionamento che (oltre a far perdere tempo e spazio) mi sembrano offuscare la limpida chiarezza che proviene dal prospettare i problemi secondo la loro vera natura, la tendenza fusionista si manifesta nel concepire ogni ente o problema astratto non come una vuota entità formale ma come un nome comune in cui si possono identificare volta a volta tutte le entità concrete delle applicazioni (v. anche quanto detto nel n. 2 sul senso d'astrazione); così ad es. «vettore» può essere un saldo contabile in più monete o un insieme di merci, con evidente riferimento ad applicazioni di ragioneria, o una forma d'assicurazione, il che prelude a un'eventuale trattazione della matematica attuariale da svolgere in continuazione del presente corso, nella quale la considerazione delle operazioni assicurative come numeri aleatori costituenti un sistema lineare (come sostanzialmente già si fa nell'indirizzo del Cantelli) dovrebbe ritrarre il massimo giovamento dall'inquadrarsi nell'immagine vettoriale. Anche in numerosi altri punti l'inclusione di certi argomenti o il modo di presentarli deriva dalla previsione del ruolo che avrebbero nel calcolo delle probabilità e nella matematica attuariale (p. es. la formula di Stirling, le considerazioni sulla rapidità della crescita di $\log \log x$ per il teorema di Khintchine-Kolmogoroff, l'integrale di e^{-x^2} , il cenno sull'integrale di Stieltjes, le stesse iniziali nozioni di calcolo logico in nesso alle operazioni logiche sugli «eventi», ecc.).

Anche nelle esemplificazioni vere e proprie e nelle considerazioni intese a illustrare praticamente il significato e l'importanza delle nuove nozioni si è avuto cura di mettere in particolare risalto le applicazioni finanziarie (ad es. per la definizione del logaritmo, di «e» (cfr. fig. 98), per la somma della serie geometrica, per l'equazione differenziale lineare del 1° ordine, per la serie esponenziale), statistiche (ad es. per i diagrammi in scala logaritmica e doppiamente logaritmica, il coefficiente di correlazione considerato come coseno, le «intensità» di mortalità ecc., l'accrescimento della popolazione nelle ipotesi di Malthus e di

Verhulst-Pearl, ecc.) o economiche (ad es. l'elasticità della domanda, ecc., cenni su certe concezioni di dinamica economica, su i concetti di prezzo, di «optimum», ecc.).

Se le esemplificazioni offerte da tali campi ebbero la debita preferenza, quelle d'altra natura non furono tuttavia trascurate ma anzi moltiplicate ovunque ciò servisse a illuminare sulla ricchezza di contenuto e la varietà di interpretazioni ed applicazioni cui si prestano i concetti e metodi che via via si apprendono. A tale scopo gli esempi furono tratti da campi il più possibile disparati, pur mantenendoli al livello di semplicità e facilità necessario perché l'efficacia ne potesse riuscire immediata e viva: o si tratta di esemplificazioni del tutto ovvie atte a render senz'altro familiare il concetto ad ogni lettore, o, se qualche volta si esorbita dall'ambito delle sue presumibili conoscenze, sarà perché l'occasione apparirà propizia per cogliere senza incontrare difficoltà il duplice vantaggio di aprire uno spiraglio su nuovi campi in cui si rivelano le possibilità dei metodi matematici, e di chiarire il significato che essi vi assumono.

Si realizzerà così quello che anche nella realtà dello sviluppo storico costituisce il vero stimolo al progresso e all'evoluzione delle idee: il continuo scaturire di idee generali dai problemi particolari e di osservazioni particolari da teorie generali, il continuo trapasso dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto finché si fondano nell'intuizione d'un'unica magica realtà, in cui tutte le risorse concettuali vengono messe al servizio della visione pratica dei problemi e tutti i problemi pratici concorrono a servizio della elaborazione concettuale, questa e quella, volta a volta, mezzo e fine, superando ogni antagonismo.

Queste premesse varranno a spiegare la ragione di quello che altrimenti potrebbe apparire uno squilibrio sconcertante fra l'elevatezza dell'impostazione d'insieme e la grossolanità di talune considerazioni o esemplificazioni cui si appoggia, od anche – per scendere a un dettaglio – la voluta materialità di certe immagini: perché ad es. parlando di ellissi ottenute da sezioni oblique di un cilindro ci si dovrebbe inibire di dar corpo e sapore al concetto materializzandolo nell'immagine dell'affettare un salame? Dire «cilindro» è preferibile se ed in quanto tale termine astratto risvegli molte sensazioni concrete anziché una sola: oltre che salame anche colonna o tubo o torrione ecc., ma è esiziale quando in esso non si sia imparato a vedere né un salame né una colonna o tubo o torrione o null'altro salvo una figura che si trovi nei testi di geometria per servire di pretesto a interrogazioni e bocciature.

Perché il primo problema è non tanto quello di far apprendere la matematica, ma di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero, che vi risponde a bisogni insostituibili della mente in cui si fondono i motivi pratici che ne danno occasione e l'elaborazione scientifica e concettuale che ne ricava costruzioni di limpida eleganza e bel-

lezza quasi sovrumana. E farla comprendere significa anzitutto farla amare, farla sentire non avulsa dai pensieri e meditazioni e preoccupazioni d'ogni giorno, ma ad essi siffattamente frammista da far apparire all'opposto arido e opaco il pensiero che non sappia attingere alla sua luce.

Ben lo sapevano gli antichi, per i quali il pensiero filosofico era in gran parte costituito dal pensiero scientifico e in particolare matematico. E mostreremmo – parmi – assai più reale fedeltà alla tradizione classica perpetuando nell'ambito della cultura contemporanea tale armoniosa compenetrazione di elementi indissolubilmente connaturati, che non accanendosi nel feticismo per troppi particolari caduchi e superati del pensiero di epoche ormai remote. Tale collegamento è invece oggi manchevole, e ciò mi sembra stia alla radice di tre aspetti sintomatici della crisi che affligge la civiltà contemporanea:

l'incompletezza del regno del pensiero, così nella scienza che senza l'ausilio della filosofia non può concludere il travaglio dei problemi che essa incessantemente incontra e solleva, come nella filosofia che, straniandosi da tale compito, rifiuta la sua propria linfa vitale;

l'incomprensione che fa considerare e disdegnare l'aspetto tecnico e materiale della civiltà moderna come qualcosa di estraneo allo spirito, anziché vedervi una manifestazione tangibile (e sia pure accessoria) di alcune fra le sue più alte e pure conquiste;

l'incertezza nell'analisi dei problemi sociali, che, irretita nel groviglio dei concetti derivati da particolarità contingenti, solo svincolandosi e assurgendo a un'impostazione scientifica che non pregiudichi e mutili a priori il campo delle soluzioni possibili saprà illuminare fin nelle radici più profonde le contraddizioni e i sofismi per cui si dilania l'umanità.

Quale parte spetti al pensiero matematico nell'approfondire la visione di tutti questi problemi e correggerne le manchevolezze, non si potrà certo pretendere di dimostrare con osservazioni incidentali in un testo di matematica (se mai, sarà oggetto di un'opera a sé, che da tempo mi si sta delineando), ma non per questo con minor cura ho cercato ovunque di orientare verso tali fini generali la comprensione delle particolari concezioni e trattazioni.

A questo stesso fine giova ed occorre che l'intonazione generale sia quanto più elevata possibile. Non nel senso di adoperare un cannone per colpire un passerotto: è anzi proprio il possesso di nozioni frammentarie e imparaticce che induce certa gente in tale tendenza per farne compassionevole sfoggio, e preferirei non avere mai intrapreso l'insegnamento piuttosto che vedere anche un solo dei miei allievi imbrancarsi in tale andazzo. Intonazione elevata è all'opposto quella che insegna a seguir sempre la via naturale, quella che insegna a trarre il massimo frutto da ogni sforzo assurgendo da ogni risultato particolare a riconoscere le

conclusioni d'ordine generale che in esso sono implicite e con esso si sono raggiunte. Sono esse, ed esse sole, che valgono del resto a porre il risultato stesso nella sua vera luce, nella sua più semplice intuizione, in modo da renderlo indelebilmente ovvio alla mente senza barbari sforzi mnemonici, e che d'altra parte costituiscono un arricchimento più sostanziale che non il risultato cercato di per sé. Così ad es. si troveranno sistematicamente illustrate e poste in risalto delle questioni d'indole generale, come il significato e il valore del ragionamento per induzione (n. 23), dell'uso di grandezze con segno (n. 66), delle convenzioni sull'«infinito» (nn. 46, 56, 75), della critica dei principi in geometria e in altri campi (nn. 77 e 143), ecc. (anche per la preoccupazione e con il vantaggio di prevenire dubbi facili a sorgere), e in genere – anche se incidentalmente, e quando opportuno per non appesantire il testo magari con note in calce – si vedrà la tendenza ad accennare agli sviluppi che dopo certe considerazioni risultano implicitamente conseguiti.

Sebbene a un livello tanto meno elevato, non sarà qui meno opportuno cercare di «aprire molte finestre nell'immenso orizzonte matematico» come si propone il Severi in *Lezioni di Analisi*. Avvezzare e dare il gusto e convincere dell'utilità anche immediata di tale integrale sfruttamento strategico dei successi tattici nel campo del pensiero dovrebbe costituire – mi sembra – la chiave del segreto per avvicinare alla matematica le menti adatte e per avvicinare nel grado desiderabile e possibile quelle intelligenze in cui la prevalente tendenza artistica o filosofica o d'altra natura qualsiasi troverebbe nella intuizione delle fondamentali concezioni matematiche un prezioso complemento. Un vantaggio che si raggiunge è infatti quello di far apparire assai più breve di quanto usualmente non sembri la distanza fra i concetti elevati della matematica e quelli del modo di ragionare di altre discipline o addirittura del comune quotidiano ragionamento, in quanto per giungervi non si richiede affatto di soffermarsi preventivamente in dettaglio su tante teorie particolari e magari pesanti. Così la generalità degli intendimenti e la concretezza delle immagini concorrono allo scopo di persuadere che la matematica non è un meccanismo a sé da sostituire al ragionamento, ma è la naturale base e prosecuzione dell'ordinario ragionamento.

Seguire una tale via, caratterizzata da maggiore ampiezza e profondità di vedute compensata da minor massa di particolari, richiede certamente un maggior sforzo concettuale, le cui conseguenze sono proficue e durature, ma riduce al minimo il passivo sforzo mnemonico, peggio che fatica sprecata, stortura immorale che abbrutisce e diseduca. Lo studente che si volesse dolere di non potersi «preparare» su questo libro secondo tale malcostume, sappia che ho fatto del mio meglio deliberatamente per impedirglielo, nel suo stesso interesse,

perché non sono disposto a considerare sufficiente per l'esame una simile cosiddetta «preparazione».

Anche nei riflessi della carriera scolastica (e possibilmente di tutta la vita, come sarebbe tanto necessario per il bene della collettività e della patria) si cerchi di trarre insegnamento dal fatto che in tutta la trattazione ho cercato di far risultare come chiara e preziosa constatazione: la fallacia del meschino criterio del minimo sforzo inteso nel senso del piccolo e particolare e gretto tornaconto immediato. Ognuno che ha semina semini, ognuno che ha forze si prodighi, e ci saranno per tutte le abbondanti messi che non prosperano dove il seme e il sudore sono lesinati attraverso il miope calcolo dei malintesi egoismi.

Con questo significato più ampio s'intenda ed applichi l'antica massima «non scholae sed vitae discitur»: non solo studiare la materia d'esame pensando che essa tal quale potrà servire anche nella vita (il che spesso non è), ma approfittarne per attrezzare la mente nel modo più organico e ferrato per affrontare nella vita tutti quei compiti particolari che a ciascuno si presenteranno (grandi o piccoli, ma tutti ugualmente importanti, perché una macchina è ugualmente impedita di funzionare per difetto del motore o per rottura dell'ultimo ingranaggio). Se qualcuno poi propendesse per la stravagante idea dei semplicioni che vorrebbero dalla scuola un ricettario «di ciò che serve», rifletta un po' se riterrebbe preferibile (per fare un'espressiva analogia) mandare a memoria un gran numero di itinerari cittadini (ad es.: per recarmi dall'Università alla stazione devo, uscendo, prendere a sinistra, svoltare per la prima trasversale a sinistra e poi per la prima a destra, ecc. ecc.) anziché formarsi un'idea d'insieme sulla pianta della città e imparare, per i casi ove tale ricordo non bastasse, a consultarla.

Nello studio della matematica in ispecie, più che di insegnarla si tratta di aiutare a reinventarla e rendersi conto dei motivi che hanno spinto i maggiori matematici a dischiuderci questo cammino, delle difficoltà che essi in misura ben maggiore di noi ebbero a superare, dello sviluppo storico delle idee in cui tanti sforzi e intuizioni individuali s'inquadrano. A tal fine l'ordinamento seguito è stato esso stesso ispirato alla traccia di una possibile successione di meditazioni che faccia ripercorrere nel modo più svelto il travaglio costruttivo delle concezioni matematiche, dalla fase intuitiva che presenta il problema e fa intravedere i mezzi per affrontarlo a quella logica cui spetta elaborarli e assodarli col dovuto rigore (il che è parso opportuno far risultare, come caratteristica saliente, nel titolo stesso del volume).

Anche la preoccupazione del rigore cambia aspetto: occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza, il che è altra cosa, né necessaria (dove non si tratta che di passaggi materiali non vedo perché ogni principiante dovrebbe accertarsi da sé che non vi sia una svista sfuggita a tutti prima di lui), né sufficiente (perché dopo aver

imparato con quali manipolazioni si ricava una formula da un'altra non è detto che si sia penetrato il contenuto di ragionamento dei passaggi eseguiti). Per lo stesso motivo l'importanza delle formule e dei calcoli risulta in tale trattazione diminuita in confronto a quella data ai concetti e alle immagini, perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella del capire.

Proprio mentre stavo lavorando al presente volume sono apparse delle opinioni estremamente interessanti su questo tema dell'insegnamento della matematica, e giungono talmente a proposito che non voglio omettere di citarle. Tanto più che le rende particolarmente significative il fatto che provengano da spiccate personalità di diversissima tendenza: da tre accademici, uno scrittore, un biologo, un matematico.

Dice Bontempelli (Colloqui, «Tempo», n. 198, marzo 1943, p. 31): «Tutti coloro che si credono più o meno artisti, si fan vanto di avere avuto zero in matematica fin dalle prime classi. Al quale proposito ho avuto modo di osservare che in questa incomprendione verso la matematica la gente è spesso sincera, ma mi sono anche convinto che la colpa è solamente del modo con cui la matematica è insegnata. Il difficile non è capire la matematica, è farla capire; chi si dedicasse per qualche tempo alla specialità pedagogica della matematica e creasse una didattica delle scienze esatte farebbe opera utilissima. Capita, diventerebbe per ogni scolaro la più appassionante delle discipline, e soffusa di mistero».

Profondissima e quasi miracolosa intuizione d'artista questa del comprendere, in contrasto con l'arida mentalità scolastica, che capire significa non eliminare il mistero, ma inoltrarsi nel mistero («il mistero, che è la sola realtà», come ebbe a dire nella commemorazione di Pirandello).

Dice Pierantoni (Confidenze di un biologo, «Scienza e Tecnica», maggio 1943, p. 193): «Non coltivai mai la matematica, non perché non la comprendessi, ma perché trovai sempre una certa difficoltà a ritenere a memoria i dati che non richiedessero un certo sforzo d'intelligenza per essere compresi».

E Giorgi (Risposte di un elettrotecnico, ibidem, p. 188): «Al pari di molti altri, che poi si sono specializzati in matematica, trovo ripugnanza per l'aritmetica e la geometria delle scuole elementari e del Ginnasio. Tutti quegli insegnamenti non potevano soddisfare una mentalità inclinata alle scienze esatte».

Queste due condanne così terribilmente recise nella loro pacata obiettività si riferiscono certo a gradi d'insegnamento meno elevati di quello di cui ci occupiamo, ed anche a tempi non proprio recenti, ma ciò non toglie che debba considerarsi aperto e non facile il compito di rendere appassionante lo studio della matematica facendone penetrare lo

spirito a chi non vi si dedichi espressamente in modo tale da giungervi con la propria meditazione.

Non basta purtroppo la consapevolezza di un male per mettere in grado di ovviarvi, tanto meno per evitare che, rimediando a certi aspetti della questione, non risultino peggiorati altri. Tengo anzi ad avvertire subito che il distacco dalle usuali trattazioni scolastiche è andato sotto qualche aspetto al di là dei miei stessi intendimenti: dovendo contenere la mole del volume, ho preferito ridurre prevalentemente quei passaggi e sviluppi ed esercizi che pur riterrei didatticamente utili piuttosto che le considerazioni che costituiscono la ragion d'essere della trattazione, sia perché tale omissione è più facile da colmare ricorrendo ad altri testi e libri d'esercizi, sia perché essa era essenziale al fine di rendere meno proibitive le difficoltà tipografiche. Senza poter giudicare se e fino a qual punto mi sarà tuttavia riuscito di realizzare in modo efficace l'ideale vagheggiato di presentazione delle idee matematiche, spero di esser almeno pervenuto a dare qualche saggio illustrativo di quello che nella mia intenzione avrebbe voluto essere, in misura sufficiente perché il lettore benevolo possa, su elementi concreti di giudizio, vagliare i criteri informativi della esposizione.

Criteri che non sono – naturalmente – né originali né nuovi: senza parlare di opere prettamente divulgative (il cui carattere è diverso per il fatto stesso che non si propongono di costituire un organico libro di testo), programmi ispirati a vedute analoghe furono da tempo propugnati e propagandati, anche se purtroppo con scarso successo, particolarmente da F. Klein di cui devo ricordare i tre volumi di *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* come una delle opere maggiormente tenute presenti nella preparazione del corso. Nello stesso senso agì l'influenza dell'insegnamento del Chisini: vedansi i molti punti di contatto fra questa prefazione e quella di F. Enriques e O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni algebriche*, e anche varie altre opere dell'Enriques o da lui promosse sul significato della storia del pensiero scientifico e in particolare matematico. Ciò sia inteso però senza alcun esclusivismo nel senso di adesione programmatica a determinate «scuole»: come risulterà dalla breve seguente rassegna degli Autori da cui più ho tratto ispirazione nella materia dei singoli capitoli, non minore apprezzamento ho per la «scuola» logica di Peano, e deploro le reciproche incomprensioni: devo molto alla lettura e meditazione della *Logica matematica* di C. Burali-Forti per la chiarificazione di idee cui mi obbligò sia pure progressivamente allontanandomene, e all'insegnamento di Cassina; probabilmente risale a quando lo seguivo la convinzione che la vera causa degli inconvenienti che si sogliono imputare a deficiente preparazione nella scuola media stia nella mancanza di una sia pur succinta introduzione logico-matematica intesa a ricostruire all'inizio degli studi universitari le nozioni su cui sarà impostata l'analisi,

nozioni apprese in modo più o meno criticabile e più o meno riformabile, ma non soltanto né soprattutto per ciò insufficienti, bensì per la logica diversità di livello dei diversi ordini di studi.

Appunto perciò, e approfittando anche della condizione per tal verso vantaggiosa del corso, di abbracciare sia pur rudimentalmente tutta la matematica evitando sovrapposizioni o lacune di collegamento o difformità di vedute fra insegnamenti paralleli, ho sostituito con un'introduzione così concepita la consueta ripetizione intesa a richiamare secondo gli stessi criteri delle scuole medie quella massa di nozioni che, se dopo centinaia di lezioni e di metri quadrati d'esercizi sono malferme, non c'è da illudersi non lo siano dopo qualche affrettata lezione in più. Anziché tentar di rinforzare con iniezioni di cemento il vecchio edificio per sopraelevarlo, ho cercato di non cimentarlo facendo gravare direttamente sul terreno con nuovi pilastri il peso delle sovrastrutture, limitandomi a utilizzare le preesistenti pareti divisorie servizi, ecc. opportunamente inseriti nel nuovo disegno.

Tale parte introduttiva può considerarsi estesa a un capitolo e mezzo, o tre, o sei, in quanto in misura crescente frammista ad argomenti del programma universitario, come ora sarà precisato al duplice scopo di dare qualche spiegazione sui criteri informativi della trattazione dei singoli argomenti e di indicare gli Autori cui mi sono più o meno direttamente ispirato.

Cap. I - Logica e matematica

Ha lo scopo di inquadrare in una visione d'insieme l'esposizione futura, da un lato dando i concetti di funzione, operazione, gruppo, in forma generale e intuitiva e dall'altro orientando le idee con considerazioni generiche sul significato e lo scopo della matematica, per abituare a farne strumento di pensiero e non considerarla come un arido dogmatismo da apprendere passivamente. Alle citazioni già fatte potrei forse aggiungere G. Vailati, *Scritti* e opere di (o opinioni sulla) logica matematica di diversi autori (da Hilbert a Poincaré, dai «viennesi» ai polacchi), ma ciò sarebbe sproporzionato ai modesti limiti delle considerazioni svolte.

Cap. II - I numeri interi

Si propone di prospettare l'aritmetica nel quadro delle nozioni e concezioni logiche del Cap. I, facendone apparire come naturale prosecuzione il calcolo combinatorio, nonché il concetto di numero infinito: dal momento che la definizione di numero come «numero cardinale» li intro-

duce di per sé, mi sembrò infatti opportuno spiegare sommariamente il significato di «numerabile» e «continuo», piccolo sforzo largamente compensato dal non trovarsi impotenti ad esprimere per mancanza di tali concetti molte semplici interessanti chiarificatrici osservazioni.

A parte la presentazione, nulla di men che notorio, in questo come nel successivo capitolo.

Cap. III - I numeri reali

Costituisce il momento più complesso della trattazione per il confluire e il diramarsi dei diversi argomenti e intendimenti, per così dire il crogiolo in cui, stabilita, in modo alquanto sommario ma aderente (ciò che più mi premeva) alle finalità pratiche e concettuali della sua introduzione, la nozione di numero reale, e collegata alla rappresentazione delle ascisse su di una retta, si applicano i concetti generali di funzione a definire le funzioni di variabile reale in generale e in particolare quelle monotone e continue, e s'introduce contemporaneamente come strumento di rappresentazione il riferimento cartesiano nel piano e – per cenni di primo orientamento – nello spazio. Tale strumento di fusione viene subito saggiato per riprendere, alla luce del punto di vista funzionale e dell'interpretazione geometrica che nel tempo stesso costituisce un'introduzione alla geometria analitica, la «ripetizione» sulle operazioni aritmetiche attraverso le funzioni lineari, l'esponenziale, il logaritmo, le potenze. Inoltre è messa in rilievo la vastità delle applicazioni pratiche, è fatto spesso presentire l'avvento delle nozioni differenziali che seguiranno nella 2^a parte, e, alla fine, si conduce a introdurre l'«infinito» (che mi sono deciso a trattare nel campo reale con la stessa familiarità e significato che in quello complesso, ovviando a discordanze) e ad accorgersi della necessità d'introdurre l'immaginario.

Nelle Facoltà d'economia e commercio non si trattava – per quanto mi consta – l'argomento dell'omogeneità di grandezze e sistemi di misura: tale lacuna mi apparve grave – anche se non quanto per degli ingegneri – e l'ho colmato.

Cap. IV - I numeri complessi

La solita rappresentazione del piano complesso viene senz'altro tradotta nell'identificare i numeri complessi alle similitudini piane, di immediata espressione riferendosi a coordinate polari (modulo e argomento), dal passaggio al riferimento cartesiano (componenti reale e immaginaria) si trae occasione per introdurre – e, come digressione, studiare – le funzioni circolari.

Ma intendimento principale è di suscitare nel modo più semplice e rapido possibile un'immagine intuitiva del campo complesso conforme alle concezioni della teoria delle funzioni analitiche, naturalmente appena adombrata, se, sia pure parzialmente e imperfettamente, tale difficilissimo compito potrà risultare conseguito (del che non sono affatto sicuro, essendo più che mai aleatorio in tal campo lo sforzo d'indovinare e immedesimarsi nella mentalità del principiante), il merito precipuo sarà di una breve e (mi sembra) fin qui inosservata comunicazione al Congresso internazionale dei matematici di Bologna del 1928: G. Giorgi, *Fondamenti per una teoria intrinseca delle funzioni di variabile complessa* (Atti, vol. III), le cui idee direttive ho cercato di adattare senza guastarle più del necessario a scopi pressoché divulgativi. In particolare, ammettendo provvisoriamente senza prova che le funzioni algebriche sono funzioni analitiche nel senso di tale presentazione, acquistano allora un significato intuitivo evidente il teorema fondamentale dell'algebra e le sue immediate conseguenze.

Altro esempio di trattazione succinta e suggestiva dell'argomento che tenni presente: F. Tricomi, *Funzioni analitiche*.

Cap. V - Sistemi lineari

Ho già accennato in questa prefazione al ruolo che attribuisco al concetto di sistema lineare, e così a quello di operazione lineare, estendendone l'applicazione anche fuori dei campi più abituali. Tale persuasione mi si formò leggendo (allora nell'edizione francese del 1912) l'opera di C. Burali-Borti e R. Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*. In particolare la nozione di determinante, che mi era rimasta ostica per la sua apparente artificiosità, mi parve tanto evidente dal teorema sugli operatori lineari alternati da meravigliarmi non venisse assunto senz'altro a definirla. Ciò richiede, è vero, l'introduzione del concetto di vettore, ma – a parte che riesce tanto utile da giustificare anche un eventuale sforzo – esso è talmente espressivo che, se rivado all'epoca in cui lo appresi nelle lezioni del Cisotti (che per prime mi appassionarono alla matematica, sì da provocare in seguito il mio passaggio dal Politecnico a Scienze) ritengo sia stato forse l'unico concetto nuovo la cui introduzione non incontrò momentanee perplessità incomprensioni incertezze od equivoci da parte mia o dei condiscipoli; più ancora mi ha incoraggiato la testimonianza in tal senso di due grandi geometri non vettorialisti ad oltranza per questioni di scuola, il Severi e il Comessatti, il quale ultimo fu anzi indotto a una «più totalitaria» impostazione vettoriale nel rielaborare, tra la I ed. del 1929 e la II del 1940, le sue *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (cfr. «Premessa alla 2^a ed.» p. X).

Più grave forse apparirà il fatto di dover introdurre gli spazi a n di-

mensioni per n qualunque; ma proprio per gli economisti e statistici, per i quali la geometria non è che uno schema rappresentativo, la differenza tra ≤ 3 ed $n > 3$ è priva di importanza effettiva pur di indurre a superarla in modo convincente, il che ho tentato nel n. 63.

Per le stesse ragioni, la trattazione è mantenuta nel puro campo affine e basata sui concetti originali e in gran parte non ancora adeguatamente sfruttati di H. Grassmann, *Ausdehnungslehre*, meno particolarmente improntati alla geometria dello spazio fisico, e in particolare sul prodotto alterno. Per la trattazione dei determinanti e sistemi d'equazione lineari ho trovato esposizioni di analoga seppur meno totalitaria ispirazione in Carathéodory, *Verlesungen über reelle Funktionen* e Beppo Levi, *Analisi matematica*.

Cap. VI - Geometria analitica

La geometria proiettiva e quella metrica si riconducono a quella affine, istituita nel Cap. V, mediante abolizione della distinzione fra elementi propri e impropri (resa intuitiva con considerazioni di prospettiva) risp. mediante introduzione della nozione di ortogonalità o di quella equivalente di distanza: come e perché ciò aderisca al modo di pensare adatto per uno studioso di scienze sociali è ampiamente spiegato nel testo (specialmente nel n. 77) e sarebbe difficile darne un'idea riassumendolo.

La trattazione particolareggiata si limita a brevi (ma, grazie alle nozioni premesse che tendono a rendere accessibile il concetto di «polarità», abbastanza sistematiche) informazioni su rette, cerchi, coniche e problemi immediati su di esse, con simultaneo cenno di analoghi problemi nello spazio (o iperspazi) su piani, sfere quadriche. Un cenno sui moti rigidi (trasformazioni di coordinate ortogonali) dà nuova prova dell'utilità della nozione di omografia vettoriale (introducendo le isomerie).

Cap. VII - Limiti

Ho cercato particolarmente di render chiaro il valore concettuale dell'introduzione del limite e le tappe della storia di tale nozione; per stabilirla ho trovato particolarmente indovinato basarmi sul termine «definitivamente» introdotto da M. Picone, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, ricollegandolo, per un cenno sul limite in un campo qualsiasi, alle concezioni di M. Fréchet, *Les espaces abstraits*. Sulle serie solo un cenno preliminare (i maggiori sviluppi essendo rinviati al Cap. IX). Circa la continuità ho ritenuto opportuno illustrare, almeno graficamente, i vari

casi di discontinuità, perché una condizione di «regolarità» mi sembra priva di ogni potere immaginativo finché non sia presentata come negazione di certe irregolarità ben imparate a conoscere.

Cap. VIII - Derivate

Concetti direttivi come nel Cap. VII; sono incluse l'integrazione come operazione inversa della derivazione, e i cenni sulle equazioni differenziali e sul significato che per esse il calcolo differenziale assume come strumento d'espressione delle leggi naturali. Per tale modo di familiarizzare colle concezioni dell'analisi infinitesimale, facendone apprezzare al più presto l'interesse applicativo, ho in parte seguito l'esempio di R. Courant, *Differential and integral Calculus*.

Si giunge alla formula di Taylor, ed a porre la questione della validità dello sviluppo in serie di Taylor.

Cap. IX - Serie e serie di potenze

La questione predetta dà occasione d'impostare nel modo più opportuno quella della convergenza d'una qualunque serie Σa_n attraverso l'introduzione d'un'indeterminata z che porta a considerare $\Sigma a_n z^n$, e quindi il cerchio di convergenza per il teorema di Cauchy-Hadamard da cui come corollari i criteri usuali. Tutto ciò, mi sembra, in modo più facile che per giungere soltanto ai criteri per le serie indipendentemente dalle serie di potenze; ne ebbi la persuasione da un parziale passo in tal senso di Courant (op. cit. ad Cap. VIII).

Stabilendo il legame tra serie di potenze e funzioni analitiche, si proseguono le considerazioni abbozzate nel Cap. IV con dei cenni secondo il punto di vista di Weierstrass, per il quale mi sono valso dell'esposizione di Vivanti, *Funzioni analitiche*, e del suo insegnamento da cui ebbi la prima rivelazione di quanta matematica ci fosse al di là del programma del biennio e di come potesse esser padroneggiata da mente d'uomo.

Cap. X - Problemi in più variabili

Sono trattati e collegati gli argomenti ove intervengono più variabili dipendenti (p. es. curve nello spazio) o più variabili indipendenti (funzioni di più variabili), in quanto richiedono una rappresentazione spaziale (o iperspaziale); di essa ci si vale sistematicamente per

appoggiare le nozioni analitiche a concetti geometricamente o anche fisicamente intuibili (campo vettoriale, gradiente, ecc.).

Nella succinta trattazione, due cenni un po' più ampi sono quelli sui sistemi d'equazione differenziali con particolare riguardo ai punti d'equilibrio stabile e instabile, e quello sui problemi di massimo, di massimo vincolato o di «optimum» in più variabili; entrambi con l'intendimento di richiamare l'attenzione sul concetto dell'interdipendenza dei fenomeni e con speciale riferimento ai problemi di carattere statistico e economico, sia pur ravvicinati a chiarificatrici applicazioni fisiche.

Non si tralascia comunque, all'occasione, di toccare anche argomenti di pura matematica (fattore integrante, condizioni di monogeneità, funzioni armoniche, ecc.).

Cap. XI - Integrali

L'integrale come operazione inversa della derivazione è già noto dal Cap. VIII; qui si tratta perciò di proseguire lo studio riprendendo il concetto secondo la definizione diretta (Riemann; Mengoli-Cauchy) e accennando alle principali regole d'integrazione. Ma più che altro necessita estendere il concetto d'integrale a casi più generali, come da tale punto di vista è spontaneo, e come è necessario per introdurlo senza restrizioni innaturali nelle applicazioni al calcolo delle probabilità, alla statistica e alla matematica finanziaria e attuariale: si tratta di passare dall'integrazione in una a quella in n dimensioni, e dall'integrazione ordinaria a quella nel senso di Stieltjes.

Terminata la scorsa al contenuto dei singoli capitoli, dovrei menzionare ancora altri numerosi trattati che consultai confrontando, ove incontravo incertezze di scelta, le forme di esposizione, ma sarebbe un'arida lunga e pur sempre incompleta elencazione; farò solo una eccezione per F. Tricomi, *Analisi Matematica*, che per il tono facile dell'esposizione mi sembra consigliabile a chi volesse allargare le prime nozioni qui apprese. Inutile aggiungere la citazione dei diversi e spesso pregevoli libri o dispense in uso nelle Facoltà d'Economia e Commercio, già tanto noti e diffusi fra gli studenti e studiosi di tali discipline.

Nel testo ho ommesso qualsiasi citazione tranne una sola: quella delle voci dell'*Enciclopedia Italiana* (brevemente indicata con E. I.), e ciò per diversi motivi; dato il carattere quasi divulgativo del presente volume un rinvio a ricerche e fonti originali costituirebbe un salto insensato; volendo citare trattati scolastici l'imbarazzo della scelta era eccessivo, né avrei avuto motivo di scegliere sempre uno stesso (tanto più che nessuno collima colla presente esposizione) o di nominare or questo or quello ché certo il lettore non riuscirebbe a trovarli né potrebbe

utilmente saltare dall'uno all'altro. Invece l'E. I. si trova ovunque, e chi volesse consultare opere originali trova lì indicazioni bibliografiche meglio vagliate di come avrei potuto fare io.

Ma a prescindere da tali motivi di ripiego addotti per giustificare comunque la decisione, penso che gli articoli matematici dell'E. I. sono nella massima parte veramente adatti per persone colte che abbiano una sufficiente preparazione. Per chi dovrebbero altrimenti esser stati scritti approfondendo tanto intelligente sforzo di chiarificazione? per i matematici onde giudichino reciprocamente dell'abilità dei colleghi? o per i totalmente profani che non riuscirebbero neppure a raccapezzarsi? Ecco perché ritenevo un peccato che non ci fosse una specie di guida ad uso delle persone colte per metterle in grado di leggere e coordinare tali scritti, e ho cercato di farla per quanto mi riusciva (cioè: senza allontanarmi per tale fine accessorio dal piano del corso, e senza preoccuparmi – per mancanza di tempo – di cercare sistematicamente le voci da citare che non ricordassi d'aver letto o non incontrassi casualmente).

Per consultazioni più sistematiche si tenga presente la *Enciclopedia delle Matematiche elementari* (a cura di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli).

Per consentire al lettore di ripassare e riordinare gli argomenti, ritrovando e ricollegando considerazioni e trattazioni il cui filo a più riprese e sotto diversi aspetti si doveva interrompere e riallacciare, potrà giovare il ricorso all'indice schematico, anche se dovetti rinunciare – per non appensantire troppo il volume – all'idea di trasformarlo in una specie di glossario ricapitolativo o in uno sguardo d'insieme a posteriori sul tipo di G. Loria, *Metodi matematici*. Il raggruppamento delle voci è stato espressamente studiato a tal fine così come la completezza dei riferimenti nelle testate (v. Avvertenza, p. XXIV).

Mi resta infine a giustificare quella che può sembrare presunzione, d'aver dato alle stampe il corso mentre ancora stavo svolgendo il primo anno d'insegnamento. Certo, sull'ordinamento generale e sui punti salienti dell'esposizione andavo meditando da anni, ma solo il vaglio della lezione conta. La verità è che fui trascinato alla pubblicazione da una serie di circostanze impreviste. Avevo consigliato di seguire le pregevoli dispense precedentemente in uso, T. Boggio e G. Peisino, *Matematica generale*, che pensavo di adottare ancora per 2-3 anni prima di accingermi a redigere le mie, ma dall'epoca delle incursioni su Torino rimasero lungo tempo (e si temeva definitivamente) irripetibili; inoltre le innovazioni apportate allo svolgimento della materia rendevano agli studenti più difficile che non avessi previsto il seguire il testo. Il dott. Giuliano Dell'Antonio che, essendo in licenza per ferite riportate al fronte greco, seguiva il corso per diletto prendendo appunti, mi propose di farne dispense previa mia revisione, e accolsi l'idea come primo passo per la stesura definitiva. Se non che, avuti gli appunti, non seppi

trattenermi dal ritoccare migliorare perfezionare con la consueta incontenibilità, e poi modificare non solo la stesura ma la stessa disposizione che avevo seguita adeguandola ai ritocchi di cui via via prendevo nota per l'anno prossimo. Al tempo stesso le difficoltà per una riproduzione di fortuna (ciclostyle, rotaprint, litografia) crescevano, finché a un certo momento il dott. Fausto Faraguna, mio assistente, dopo essersi occupato col suo multilaterale e intelligente spirito d'iniziativa d'ogni cosa, m'informò della possibilità di un'edizione a stampa da parte della Editrice Scientifica Triestina allora in via di costituzione. Per il disegno delle figure (parecchie laboriose e difficili) si prestò il geometra Mario Bordari, dell'Ufficio tecnico dell'A.C.E.G.A.T, e il lettore apprezzerà certamente il suo lavoro. A questi collaboratori entusiasti, a tutti gli allievi che frequentarono le lezioni e lo sono pur essi attraverso domande e commenti o l'espressione or perplessa or gioiosa degli occhi, ai colleghi che m'incoraggiarono col loro interessamento, un ringraziamento sentito.

E un particolare riconoscimento allo Stabilimento Tipografico Nazionale – al direttore geom. cav. Venusto Rossi e ai tipografi Dante Englaro e Lodovico Bari – per la cura e la pazienza con cui il difficile lavoro fu eseguito, senza ricusare fatica anche se richiesta solo per miglioramenti d'estetica, e pur dovendo affrontare e subire gli effetti della situazione sempre più dura in cui viviamo. Per la Editrice Scientifica Triestina costituisce un meritorio atto di coraggio e di fede aver iniziato in tal momento la sua attività; vada ad essa l'augurio di poter contribuire, con la serietà e vivacità che sono nei suoi propositi, alla vita culturale in questo estremo lembo di terra italiana.

Trieste, 24 novembre 1943