la ricerca

Prima serie

1. Barbieri - **I Greci nell'età di Pericle (I).**
2. Barbieri - **I Greci nell'età di Pericle (II).**
3. Foschini - **La vita economica in Roma (I).**
4. Foschini - **La vita economica in Roma (II).**
5. Bonis Cuaz - **La vita quotidiana a Roma (I).**
6. Bonis Cuaz - **La vita quotidiana a Roma (II).**
7. Bujoni - **I romani urbanisti e architetti.**
8. Caprioli - **La formazione dei centri urbani in Italia.**
9. Doneddu - **La produzione mineraria in Italia.**
10. Pampallona - **Interroghiamo l'atmosfera (I).**
11. Pampallona - **Interroghiamo l'atmosfera (II).**
12. Vespi - **Nozioni fondamentali di ottica.**

Seconda serie

13. Bonis Cuaz - **Ai tempi dei castelli feudali.**
14. Bujoni - **La vita in una città comunale italiana.**
15. Ascari-Cardarelli - **La dominazione spagnola nell'Italia meridionale.**
16. Tornatore - **Alle origini degli Stati Uniti d'America.**
17. Frugoni - **Storia della guerra.**
18. Bandinelli - **Piccola storia dell'abitazione in Europa.**
19. Foschini - **Capitali d'Europa.**
20. Doneddu - **Le foreste in Europa.**
21. Landi Barittoni - **La pesca in Europa.**
22. Caprioli - **Guida allo studio della regione.**
23. Belasio - **Le piante (I).**
24. Nangeroni - **Il clima.**

Terza serie

25. Bujoni - **Il pensiero politico del Risorgimento.**
26. Di Tondo - **La Resistenza in Europa.**
27. Di Tondo - **Campagne garibaldine.**
28. Foschini - **Paesi asiatici del XIX e XX secolo.** India.
29. Foschini - **Paesi asiatici del XIX e XX secolo.** Cina e Giappone.
30. Germano Nanni - **I grandi fiumi.** Il Rio delle Amazzoni.
31. Golzio Migliori - **Storia delle ferrovie.**
32. Dompé - **Piccola storia dell'abbigliamento.**
33. Rinaldi Carini - **La carta e la stampa.**
34. Belasio - **Le piante (II).**
35. Nangeroni - **Le carte geografiche.**
36. Vespi - **Misurare è facile?**

Quarta serie

37. Di Tondo - **La I guerra mondiale.**
38. Di Tondo - **La II guerra mondiale.**
39. Di Tondo - **Campagne coloniali italiane.**
40. Barbieri - **La nascita della grande industria in Europa.**
41. Bandinelli - **Civiltà precolombiane:** Aztechi e Maia.
42. Bandinelli - **Civiltà precolombiane:** Inca.
43. Bonis - **Dallo Statuto Albertino alla Costituzione Repubblicana.**
44. Vidotto - **Storia dei partiti politici dall'Unità alla Costituente.**
45. Ambrosetti - **Gli Etruschi.**
46. Ceccarelli Fabbrichesi - **Il piano in movimento.**
47. Pampallona - Ragusa Gilli - **Che cos'è la statistica.**
48. Belasio - **Il petrolio.**

Serie didattica

1. Bruno de Finetti - **Il "saper vedere" in matematica.**

ENCICLOPEDIA MONOGRAFICA LOESCHER - SERIE DIDATTICA

Alla serie di monografie della Ricerca, la prima "Biblioteca di lavoro" studiata e organizzata per gli studenti della nuova scuola italiana, si affianca ora una serie didattica, i cui volumi, destinati ugualmente agli studenti e ai loro insegnanti, si propongono di fornire una più stimolante prospettiva per l'insegnamento e di assicurare all'apprendimento quel carattere problematico e di ricerca che gli è proprio ed essenziale.
Apre la serie didattica il volume di uno dei più illustri matematici italiani, Bruno de Finetti, ordinario di calcolo delle probabilità nell'Università di Roma.

QUESTO VOLUME

Perché "saper vedere", in matematica? non basta, nella matematica, saper applicare la fredda logica e le rigide regole di calcolo?
Contro questa tesi (sostenuta a volte, per malinteso orgoglio di una particolarità importante, ma non esclusiva, anche da matematici) vale come risposta un'efficace immagine dovuta a un grande matematico, Paul Lévy. Per raggiungere una certa meta occorrerà, certamente, far uso dei piedi per camminare; ma ciò non esclude, anzi richiede, che uno faccia prima uso degli occhi per individuarla e per orientarsi, e poi per trovare e seguire la strada, ed infine per osservare e gustare il panorama che giustifica l'interesse per la passeggiata.
Perciò nessuna persona ragionevole va a passeggio con gli occhi bendati pensando che tutto sta nel camminare coi piedi; e allo stesso modo non dovrebbe in nessun campo, e meno che mai nella matematica, pensare di procedere ad occhi chiusi perché per ragionare bastano i piedi.
Scopo di questo volumetto è di aiutare a comprendere quali panorami e quali arricchimenti di idee la matematica offre a profusione, senza alcun ulteriore sforzo ed anzi attenuandolo, pur di tenere gli occhi aperti e guardarsi intorno, mentre uno viene introdotto nel suo regno, anziché guardarsi soltanto i piedi per far attenzione a come li muove per fare un passo e poi un altro.

Bruno de Finetti

IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA

LOESCHER EDITORE TORINO 1

la ricerca

SERIE DIDATTICA

la ricerca

Enciclopedia Monografica Loescher

SERIE DIDATTICA

Bruno de Finetti

IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA

e bello doppo il morire vivere anchora...

LOESCHER EDITORE TORINO

IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA

1. RIFLETTERE PER GIUNGERE A UN RISULTATO

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi, *e allora è istruttiva e anche divertente. Perché i giovani se ne persuadano, e conservino anche da grandi il vantaggio di sapersi regolare in ogni circostanza afferrando gli aspetti matematici e logici dei problemi che dovranno affrontare nella vita, basta che si abituino a riflettere, a rendersi conto del senso e del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.*

Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere *per dominare un problema. Cominciamo da tre esempi effettivi, di epoche molto diverse, che possono servire da utile spunto.*

Platone: Socrate e lo schiavo.

Il primo esempio è contenuto in un celebre passo di Platone (filosofo greco, 427-347 avanti Cristo), e precisamente nel dialogo *Menone*: Socrate interroga uno schiavo, chiedendogli di raddoppiare un quadrato (cioè: di costruire un quadrato di area doppia di quello dato). Dapprima lo fa accorgere che se raddoppiasse il lato (come a prima vista aveva detto) l'area risulterebbe non *doppia* ma *quadrupla*, ed infine, incoraggiandolo ancora a pensare e guardare la figura disegnata (*fig. 1*) per trovare un quadrato

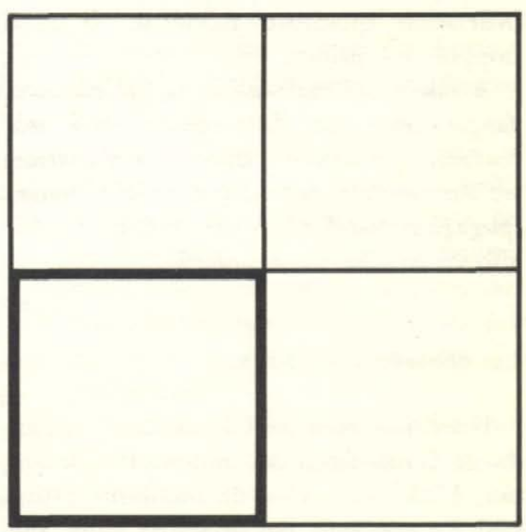


FIGURA 1.

Avvertenza. Nel testo si trovano a volte dei richiami (EP) o (NB), in genere seguiti (ove occorre) da un numero (EP, 5), (NB, 4) od anche (NB, 4, p. 29). Significano rinvio agli ESERCIZI E PROBLEMI (numerati) e rispettivamente all'elenco (numerato) di opere citate nella NOTA BIBLIOGRAFICA (con eventuali indicazioni aggiuntive (numero di pagina, o, per riviste, anno, ecc.).

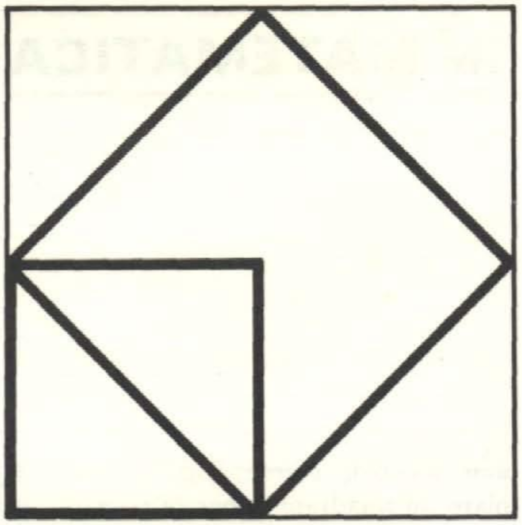


FIGURA 2.

di area metà di quello quadruplicato, riesce a fargli scoprire che basta costruirlo come in *fig. 2*, ossia prendendo per lato la *diagonale* del primo. Così dunque si ottiene il quadrato richiesto, di area doppia del primo.

A conclusioni matematiche si può giungere, dunque, senza aver fatto specifici studi, solo pensando e osservando. Questo rileva Platone, sia pur cercando, come a quei tempi si usava, spiegazioni metafisiche ("idee innate" o reminiscenze di altre vite precedenti).

Lo scolaretto Gauss.

Il secondo esempio è l'aneddoto riguardante Gauss (uno dei maggiori matematici, 1777-1855), che, da bambino, attirò così l'attenzione del maestro sulle sue attitudini. Questi, per correggere tranquillamente dei compiti, aveva dato agli scolari un *lungo* esercizio: sommare tutti i numeri da 1 a 100. Ma Gauss consegnò immediatamente la risposta: la somma è 5050, perché accoppiando gli addendi (primo ed ultimo: 1 e cento; secondo e penultimo: 2 e 99; e poi 3 e 98, ecc., fino a 49 e 52 ed a 50 e 51) si hanno 50 coppie, ciascuna di somma 101. In altra forma: è lo stesso che se i 100 addendi avessero tutti il medesimo valore $\frac{1}{2}(1 + 100) = 50\frac{1}{2} = 50{,}5$, semisomma del primo e dell'ultimo.

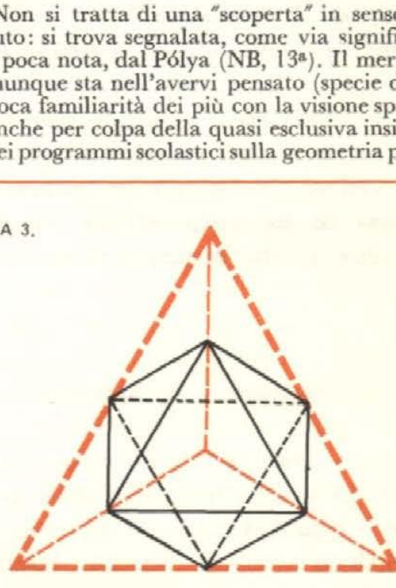
Gauss era Gauss, d'accordo. Però quest'osservazione era semplice: prestando un po' di attenzione al problema, forse qualunque bambino avrebbe potuto accorgersi di questa proprietà e sfruttarla. E saper vedere le cose semplici e degnarsi di rifletterci sopra è la cosa più importante (e vi ritorneremo soprattutto nei nn. 5 e 6): così e soltanto così finiscono per apparire comprensibili intuitive ed ovvie altre cose sempre più complicate.

Uno come voi.

Il terzo esempio è dei nostri giorni; riguarda un allievo della scuola media "T. Tasso" di Roma (il tredicenne Massimo Campanino, classe III-B, anno 1964-65). Egli vide e indicò esattamente un modo molto più semplice e significativo di quello consueto (1) per ricavare l'espressione del volume dell'ottaedro. Completando (come mostra la *fig. 3*) l'ottaedro con 4 tetraedri di ugual lato

(1) Non si tratta di una "scoperta" in senso assoluto: si trova segnalata, come via significativa e poca nota, dal Pólya (NB, 13ª). Il merito comunque sta nell'avervi pensato (specie data la poca familiarità dei più con la visione spaziale, anche per colpa della quasi esclusiva insistenza dei programmi scolastici sulla geometria piana).

FIGURA 3.



giustapposti a quattro delle sue facce (scelte alternatamente), si ottiene un tetraedro di lato doppio — e quindi di volume 8 volte maggiore — di quello di ciascuno dei tetraedri precedenti. Togliendo i 4 tetraedri aggiunti rimane l'ottaedro inizialmente considerato, che ha pertanto *volume quadruplo del tetraedro di uguale lato* ($4 = 8 - 4$). È questa la conclusione cui si trattava di giungere.

Che, raddoppiando il lato, il volume divenga otto volte maggiore, è cosa ovvia per il *cubo* (stesso ragionamento fatto per il quadrato nel caso di Socrate e lo schiavo); che la stessa proprietà valga per qualunque solido è un fatto su cui ritorneremo (n. 3): ciò sarà utile non solo per chi ancora la ignorasse ma anche per chi già la conosce.

Come mai — ci si chiederà — uno studente di scuola media, sia pure particolarmente dotato, ha potuto vedere quel problema sotto un aspetto non propinatogli da libri o docenti? Occorre dire che l'insegnante, in quella classe, è la prof. Emma Castelnuovo (NB, 1, 14), *il cui metodo d'insegnamento tende a stimolare l'intelligenza anziché a soffocarla (come in genere avviene) sotto aridi nozionismi, talora pretesamente pratici, talora pretesamente scientifici.*

Fate che il seme non vada sprecato.

Questi tre esempi volevano solamente mostrare, per intanto, come sia possibile, e come riesca istruttivo, giungere a conclusioni interessanti pensando direttamente a problemi concreti, senza impiegare teorie o ricette stereotipate di sapore scolastico. Ciò non vuol dire che tali teorie e procedimenti non servano, bensì che, anche quando occorre usarli, si può giungere molto più oltre, con maggior gusto e minor fatica, se si cerca di "vedere" ogni singolo problema in modo da sfruttare con criterio ogni particolarità utile. Ed è anzi proprio e soltanto in questo modo che potrete valorizzare gli insegnamenti avuti a scuola, e far sì che la fatica vostra e quella dei vostri insegnanti non vada sprecata.

2. E DOPO, RIFLETTERE ANCORA

Risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo: ogni successo rende più facili ulteriori successi. Ma il vantaggio è molto più grande se ci si sofferma a riflettere, su ogni problema che ci si presenta, non soltanto quanto occorre per risolverlo ma poi ancora per far tesoro di tutte le osservazioni che siamo capaci di trarne sviscerandolo.

Praticamente, si tratta solo di domandarsi vari "perché?":

— **perché** *vale la conclusione trovata (ossia: sussisterebbe oppure varierebbe, e come, se modificassi i dati in questo o quel modo)?*

— **perché** *ho incontrato difficoltà e poi le ho superate (cioè: dov'era "il bandolo della matassa" e com'è che prima mi sfuggiva e poi l'ho visto)?*

Riflettendo su cose del genere ogni esempio arricchisce l'esperienza in misura moltiplicata ed in modo assai più profondo. Più profondo che mai, forse, se si giunge a riflettervi quasi senza accorgersene (come quando si cerca invano l'impostazione di un problema prima di addormentarsi, e al risveglio vediamo di averla già trovata).

Notiamo subito come, riflettendo sui primi esempi ora considerati, si possono presentare naturalmente delle osservazioni e conclusioni istruttive, di carattere molto più generale. E cominciamo dall'aneddoto di Gauss.

Tornando a Gauss.

È naturale chiedersi se lo stesso procedimento vale anche per calcolare la somma, anziché dei numeri da 1 a 100, per quelli da 1 a 12, o da 1 a 500, o da 1 a 1965, ecc., e si constata subito che sì: nei tre casi il risultato è $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13$, $\frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 501$, $\frac{1}{2} \cdot 1965 \cdot 1966$ (così come, per i numeri da 1 a 100, era $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101$). Il ragionamento vale tale e quale; si noti però che nell'ultimo caso (essendo 1965 dispari) riesce un po' strano dire che abbiamo $982\frac{1}{2}$ $(= \frac{1}{2} \cdot 1965)$ coppie di somma 1966, benché ciò possa considerarsi "vero" nel senso che il numero centrale, 983, rimane spaiato, e vale appunto come "metà di una coppia di somma 1966" (1); del resto va sempre bene anche alla lettera la seconda formulazione data sopra: la somma è la stessa che se tutti gli addendi fossero uguali alla semisomma del primo e dell'ultimo.

Ma è chiaro che il procedimento (e la regola cui conduce) valgono sempre se gli addendi crescono (oppure decrescono) di una differenza costante (senza che la differenza sia necessariamente 1 nè che la successione cominci da 1); si dice in tal caso che i numeri considerati *variano linearmente*, o che costituiscono una *progressione aritmetica* (p. es., 5, $6\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, 10, $11\frac{1}{4}$, $12\frac{1}{2}$, $13\frac{3}{4}$, 15, $16\frac{1}{4}$, $17\frac{1}{2}$, $18\frac{3}{4}$, 20). La somma è sempre la media del primo ed ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini (nell'es., è $\frac{1}{2}(5 + 20) \cdot 13 = 162\frac{1}{2}$).

Qualunque risultato matematico riesce di regola più chiaro, o diventa addirittura intuitivo, rappresentandolo **geometricamente** in modo **opportuno.**

Nel nostro caso, rappresentando i successivi addendi come rettangolini di base 1 e altezza che ne esprime il valore, se sono in progressione aritmetica avremo una scala a gradini uguali (ossia secondo una retta; v. *fig. 4*). Ed è chiaro che in tal caso l'area (somma) è la stessa del rettangolo di ugual base e di altezza pari alla media delle altezze estreme. Il ragionamento di Gauss bambino consiste nel notare, riferendosi alla figura, che i tratti di rettangoli sorpassanti il livello medio sono identici a quelli mancanti dal lato opposto.

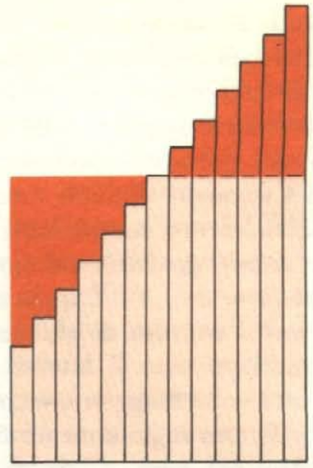


FIGURA 4.

Da ogni nuova riflessione potremmo farne scaturire altre, continuando senza fine. Quelle ora svolte bastano a far notare, per intanto:

— come ciascuna di esse giovi a renderci più chiaro sotto vari aspetti il perché della conclusione già raggiunta nel caso particolare (della somma dei numeri da 1 a 100);

— come quella conclusione risulti applicabile in molti altri casi (di cui è facile immaginare quanto spesso potranno presentarsi in problemi pratici di ogni genere);

— come il fatto di esprimere il risultato mediante formule ("calcolo letterale") possa corrispondere a idee e bisogni spontanei, più di quanto forse non sembri incontrandolo nel corso di un programma scolastico;

— quanto giovi saper immaginare da sé una rappresentazione geometrica.

Nel seguito avremo occasione più volte di utilizzare ancora queste riflessioni riprendendole e sviluppandole; si vedrà meglio allora quanto valore abbia ogni osservazione, piccola o grande, quando rimane viva nel ricordo, pronta a riapparire e ad aiutarci per vedere e affrontare problemi aventi con essa qualche nesso.

3. S'INCONTRANO ANCHE QUESTIONI GENERALI

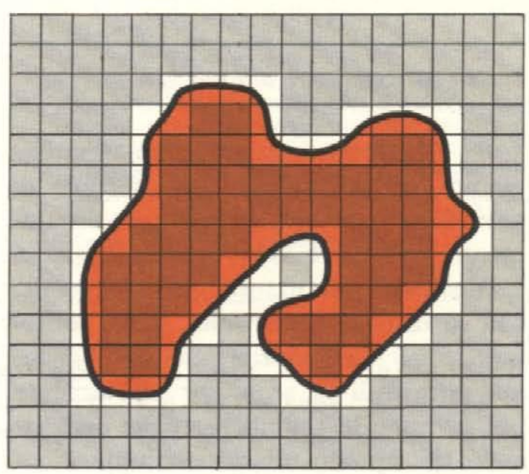
Degli altri due aneddoti ci limiteremo a considerare un aspetto comune: *come variano aree e volumi raddoppiando (o in generale alterando) le lunghezze* (ivi: lato del quadrato, o del tetraedro). Come già notato (1), raddoppiando le lunghezze le aree si quadruplicano e i volumi si ottuplicano, e, più in generale, moltiplicando le lunghezze per un numero qualunque (p. es. 0,8, 1,1, 2,7, 10, ecc.: in generale potremmo dire r), le aree risultano moltiplicate per il *quadrato* di r (cioè $r^2 = r \cdot r =$ «r moltiplicato per sé stesso»: p. es. $(0,8)^2 = 0,64$, $(1,1)^2 = 1,21$, $(2,7)^2 = 7,29$, $10^2 = 100$), i volumi per il *cubo* di r (cioè $r^3 = r \cdot r \cdot r$: p. es. $(0,8)^3 = 0,512$, $(1,1)^3 = 1,331$, $(2,7)^3 = 19,683$, $10^3 = 1000$). Che ciò sia vero per il quadrato e per il cubo è evidente: il quadrato di lato doppio si ottiene con 4 quadrati uguali (*fig. 1*), ed analogamente un cubo di lato doppio con 8 cubi uguali; per il quadrato o il cubo di lato, p. es., ridotto a 0,8 basta notare che occorreranno 64 dei 100 quadratini di lato 1/10, rispettivamente 512 dei 1000 cubetti di lato 1/10.

Ma sarà vero per il tetraedro? È facile vedere che non è possibile dividere il tetraedro di lato doppio in 8 tetraedri uguali: toltine 4 ai vertici (v. *fig. 3*) rimane un ottaedro e non si può farne altri 4 tetraedri come i precedenti. (Si potrebbe dividerlo in 4 tetraedri uguali ad essi come volume ma non come forma, non regolari; chi vuole riuscirà forse da sé a vedere come, ricordando che il volume è uguale se restano uguali base ed altezza). Ma poi, perché soffermarsi a pensare al tetraedro? La conclusione che preme è quella generale, valida anche per il caso di due patate, o di due uova, o di due statue, uguali per forma ma di dimensioni raddoppiate (o comunque proporzionalmente alterate) tra l'una e l'altra (2).

Per dimostrare che la proprietà è vera in generale basta pensare che ogni solido (a forma di patata o di uovo o di statua o di tetraedro o altra qualsiasi) può sempre pensarsi tagliato in cubetti, piccoli quanto si vuole, così come ogni figura piana in quadratini sovrapponendovi una carta quadrettata (p. es. millimetrata) v. la *fig. 5*.

Il volume sarà espresso dal numero dei cubetti (per eccesso o per difetto a seconda che contiamo o no i cubetti

FIGURA 5.



(1) È utile riflettere sempre su "estensioni d'interpretazione" come questa: spesso sono valide (ma occorre accertarlo caso per caso). La regola si può esprimere mediante una formula se si conviene di indicare con una lettera (e sia, come d'uso, n) il numero dei numeri da sommare: *la somma dei numeri da 1 ad n vale* $\frac{1}{2} n (n + 1)$. Per considerazioni sull'utilità di tali metodi riprenderemo tale cenno in seguito (n. 9 e n. 10).

(2) In queste condizioni, due figure (piane o solide, non importa) si dicono tra loro *simili*. Di solito s'insiste, nella scuola, sul caso più semplice (e certamente importante) di *triangoli* simili, ma è essenziale aver presente il *significato generale* del termine (cfr. anche n. 13, *similitudine*), e non credere che si tratti di una nozione particolare riguardante il solo caso dei triangoli. Cfr. (EP, 1).

incompleti sul contorno: ma l'errore si può rendere trascurabile prendendo i cubetti sufficientemente piccoli). Allora basta pensare che, raddoppiando le lunghezze, ogni cubetto ottuplica il suo volume (o, in generale, lo moltiplica per r^3 se le lunghezze vengono moltiplicate per r), e la conclusione risulta estesa al caso di un solido qualunque.

Queste considerazioni sono di estrema importanza sotto molti punti di vista. Anzitutto, presentano un esempio istruttivo di proprietà di tipo "sintetico", semplici e potenti ("sintetico" nel senso che permettono ad es. di dire senz'altro che raddoppiando il lato del tetraedro o il raggio della sfera il volume si ottuplica, senza bisogno di una conoscenza più precisa, "analitica", su quale sia e come si calcoli il volume del tetraedro o della sfera). In particolare le proprietà sintetiche di questo tipo "dimensionale" (cioè dipendenti solo dalla natura delle grandezze in questione: qui lunghezze, aree, volumi, *ma più in generale anche* tempi, velocità, masse, forze, *ecc.*) *sono istruttive per imparare a distinguere le nozioni fisiche ecc. e perché spesso consentono di stabilire direttamente i rapporti tra comportamento di strutture effettive (fabbricati, navi, aerei, ecc.) e modelli in scala. Altra circostanza da notare (e vi ritorneremo nel n. 16) è il tipo di ragionamento qui usato (basato su approssimazioni che danno* "al limite" *una conclusione rigorosa).*

Nulla è troppo " banale ".

Da riflessioni suggerite da semplici esempi, scelti più che altro a titolo di curiosità "storiche", si giunge direttamente, come si è visto, a considerazioni e conclusioni di natura molto generale. Ma su di esse, a sua volta, giova soffermarsi per constatazioni anche banali, ma pure utili in sé, e che nuovamente poi daranno lo spunto per delle osservazioni che aprono ulteriori sviluppi.

Le constatazioni banali sono quelle consistenti nel fissare l'attenzione su semplici dati numerici. Bisognerebbe convincersi che fare ciò è istruttivo, che si rischia di non veder bene le cose quando, per superbia o pigrizia, si disdegna di scendere al calcoletto numerico illudendosi di aver già le idee chiare attraverso le teorie e le formule. Occorre riflettere spesso anche sui dati numerici, e magari fare in modo di vederli meglio mediante una o più rappresentazioni grafiche appropriate.

Nel nostro caso, il motivo per consigliare un po' di attenzione a dei dati numerici è questo: la maggior parte delle persone (a mio avviso) non si rende conto di quanto più rapidamente crescano le aree e più ancora i volumi al crescere delle dimensioni lineari (lunghezze). Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10 % (oppure del 20 % o del 25 %) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33 % (oppure 75 % o 100 %: raddoppio). Tanto meno questa capacità di apprezzamento sembra sussistere quando si pensi alla noncuranza con cui si parla di "cucchiaini" di zucchero come di unità di misura mentre piccole differenze nelle dimensioni (e nella forma) possono ben alterare il contenuto di un cucchiaino nel rapporto di 1 a 2 o anche ben più (anche a prescindere da ulteriori differenze dovute in pratica al non curare di farlo *colmo*). Analoghe, anche se, naturalmente, meno marcate, sembrano le manchevolezze di giudizio nel caso delle aree.

Vogliamo vedere quali aumenti di area e volume corrispondono a piccoli aumenti nelle lunghezze? Costruiamo la tabellina in calce a pag 7.

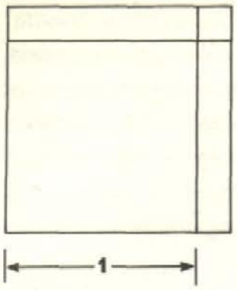


FIGURA 6.

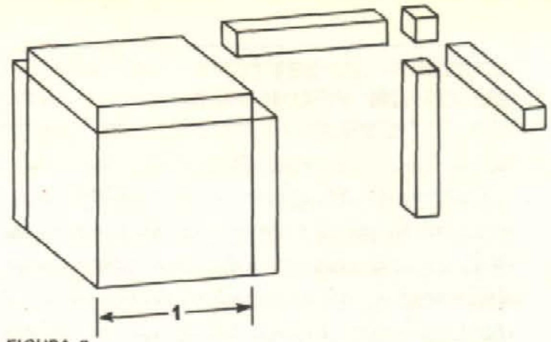


FIGURA 7.

(Basta ad es. moltiplicare 1,01 per 1,01, e si ha 1,0201, e poi moltiplicare ancora per 1,01, e si ha 1,030301; gli aumenti sono perciò 2,01 % e 3,0301 % arrotondato a 3,03 %; cfr. tabella, 1ª colonna).

Ciò conduce all'ultima osservazione che intendevamo fare a proposito di questo argomento: come si vede, la percentuale d'aumento risulta, per l'area, circa doppia, e per il volume circa tripla, di quella per le lunghezze (quasi esattamente per aumenti più bassi; poi man mano il rapporto va crescendo scostandosi sempre più rapidamente da 2 e 3). È una constatazione utile da tener presente a titolo di orientamento. Ad esempio, se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento di temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p. es. 0,38 %), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14 %), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76 %). Altro es. v. (EP, 2).

E perché avviene questo? La spiegazione è semplice, ed è cosa che servirà aver presente per molte ulteriori discussioni e applicazioni. Ci limitiamo a indicarla mediante le *figg. 6 e 7*: se prendiamo un quadrato, diciamo per semplicità di lato $= 1$, e aumentiamo il lato di a (cosicché diventerà $1 + a$), l'area aumenta dei due rettangoli allungati (in *fig. 6*), ciascuno dei quali ha area a (più il quadratino al loro incontro: ma è trascurabile se a è piccolo). Analogamente il cubo (*fig. 7*) si accresce di tre piastre (base 1×1, spessore a, volume a), più (ma per a piccolo sono trascurabili) tre sbarrette e un cubetto (lungo gli spigoli e al vertice da completare) (1).

(1) In formule, le *figg. 6 e 7* illustrano (come del resto è abituale) il significato geometrico dell'espressione del "quadrato e cubo di un binomio". Con il lato $1 + a$ (secondo ci conveniva indicarlo, per parlare di a come della "percentuale di aumento") le formule sono:
$(1 + a)^2 = (1 + a)(1 + a) = 1 + 2a + a^2 =$ $=$ quadrato grande $+$ due rettangoli $+$ $+$ quadrato piccolo;
$(1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3 =$ cubo grande $+$ tre piastre $+$ tre sbarrette $+$ $+$ cubetto piccolo.
Stesso significato se invece indichiamo con a e b la lunghezza delle due parti del lato; allora è
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
Guardando la figura, e, per il cubo, meglio ancora costruendolo (p. es. ritagliandolo da una patata), ci si potrà render conto del significato di tali formule. Ricordandolo, sarà possibile capirle anche se avesse a capitarci di doverle studiare secondo testi che non ne dànno l'interpretazione geometrica.

	AUMENTO %									
in lunghezza	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
in area	2,01	4,04	6,09	8,16	10,25	12,36	14,49	16,64	18,81	21,00
in volume	3,03	6,12	9,27	12,48	15,75	19,08	22,47	25,92	29,43	33,10

4. COME RIFLETTERE SU DI UN PROBLEMA

Come si fa ad affrontare un problema e risolverlo? Su questo argomento e con questo titolo (« *Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben?* ») *un matematico di talento e di spirito, George Pòlya, ha scritto un ampio acuto articolo, sviluppato poi in volume,* « *How to solve it?* » (NB, 5). *Chi potrà leggerlo* (*quando sarà un po' più avanti con gli studi*) *ne trarrà certamente profitto e diletto. Più tardi ancora potrà passare ad altri tre volumi che proseguono il discorso* (NB, 12-13).

Qui non si tratta di svolgere un'analisi del genere, ma soltanto di indicare alcune delle cagioni che fanno spesso apparire insormontabili delle difficoltà che non esistono, e alcuni dei modi in cui un intelligente allenamento a "saper vedere" i problemi si rende utile per semplificare e padroneggiare le cose nel miglior modo possibile.

Giova soprattutto rendersi conto di ciò su esempi, su molti esempi, e specialmente su esempi facili: *molti degli esempi che saranno utilizzati sono problemi proposti in "Gare matematiche"* (*quali si svolgono in molte città, per giovani di 15-20 anni, non universitari*) *ed anche le considerazioni e consigli che svolgeremo commentandoli derivano dalla constatazione di difficoltà ed errori nel rispondervi* (NB, 20-24).

Dice il proverbio che "sbagliando s'impara", ed è vero; fino ad un certo punto però si può anche imparare riflettendo su errori o su difficoltà incontrati da altri, come, in precedenza, viceversa, su esempi di idee intelligenti venute ad altri. Con tali riflessioni si possono accumulare e affinare conoscenze e reminiscenze ed esperienze utili, come sono utili, naturalmente — pur di non ridurle a imparaticcio mal digerito — le nozioni più sistematiche apprese nella scuola.

Ma solo affrontando effettivi problemi possiamo vedere se e fino a qual punto e con quale successo riusciamo realmente a valercene. Occorre saperli sempre guardare senza preconcetti, non correre subito a cercare la "ricetta" per risolverli. Anche se c'è e la conosciamo, non è detto che convenga applicarla senza prima riflettere se non sia meglio farne a meno o applicarla con maggiore accortezza. E in molti casi invece è proprio l'idea fissa di trovare una ricetta cui aggrapparsi, ciò che conduce fuori strada.

5. SAPER VEDERE LE COSE FACILI

Una cosa difficile è spesso il vedere le cose facili, ossia riuscire a distinguere, nel complesso di circostanze presenti in un problema, quelle che bastano per impostarlo, o che permettono di effettuare l'impostazione in diversi passi facili successivi.

Ecco un esempio semplicissimo (proposto in una Gara matematica): *dato un triangolo, dividerlo in* 5 *parti di uguale area mediante una spezzata a zig-zag* (cfr. *fig. 8*). È semplicissimo se... se si pensa dapprima soltanto al triangolo I che dev'essere 1/5 del dato, sicché basta prendere *D* in modo che *CD* sia 1/5 del lato *CB* (1). Prose-

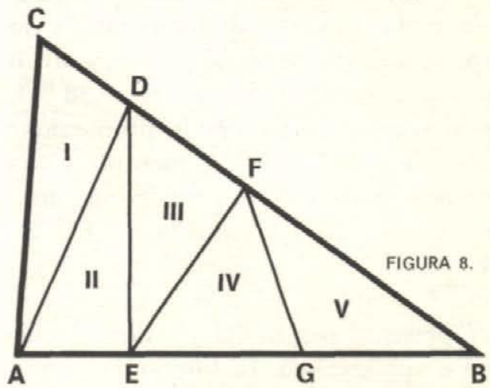


FIGURA 8.

(1) Dovrebbe essere superfluo rammentare in che modo si può eseguire la suddivisione di un segmento in parti uguali o in date proporzioni (come serviva per le suddivisioni del precedente problema e rispettivamente per quello del n. 12); del metodo (Teorema di Talete) parleremo tuttavia nel n. 15 per altri motivi (cfr. *fig. 46*) che daranno modo di discutere circa la preferenza da dare ad esso o al metodo di calcolare e misurare le lunghezze.

guendo allo stesso modo, il triangolo II dev'essere 1/4 del rimanente sicché AE va preso uguale a 1/4 del lato AB; poi DF sarà 1/3 di DB, ed infine G sarà a metà di EB. (Non sarebbe possibile invece, ad es., cominciare dal V e procedere nell'altro verso).

Bicchier d'acqua: Pericolo!

La difficoltà (apparente) deriva invece dall'incapacità di liberarsi dalla visione del problema come un tutto unico, dalla conseguente tendenza a cercare « regole per la divisione a zig-zag » o ad abbandonare l'impresa sapendo che regole per questo caso non sono state studiate. Deriva dall'abitudine a pensare che « sapere la matematica » significhi « sapere di colpo per filo e per segno come rispondere o cosa fare », anziché esser capaci di riflettere e cercare e possibilmente trovare il modo di poter dire qualcosa di sensato, poco o molto che sia. *Deriva dall'abitudine a pensare che « capire la matematica" significhi essere in grado di seguire una catena di passaggetti formali (sciogliere parentesi, portare un termine di qua o di là cambiando il segno, ecc.) controllandone la correttezza e confermando così l'esattezza della conclusione (dimostrazione di un teorema, determinazione di un risultato); ma giungere alla conclusione così* ("obtorto collo", *come diceva Federigo Enriques* (NB, 7) *non significa nulla rispetto al fatto più essenziale che è* penetrare il significato della questione e rendersi conto della linea di pensiero che permette di afferrarla e ragionarvi sopra; *è solo* dopo *che importa anche, per scrupolo, assicurarsi pazientemente dell'esattezza anche con quei passaggetti formali che a volte sembra siano presi per la stessa essenza della matematica.*

Un'idea così distorta della matematica fa sì che il suo studio possa risultare addirittura d'intralcio anziché di aiuto nel capire cose matematiche. Accade spesso, purtroppo, di vedere anche studenti universitari perdersi « in un bicchier d'acqua », di dover dire « Badi, la cosa è semplice; da bambino l'avrebbe certo risolta; cerchi di pensarci direttamente come avrebbe fatto allora!... », ed invece egli seguita ad annaspare per tirar fuori senza costrutto dai ripostigli della memoria — sperando di azzeccare e far colpo come il prestigiatore che fa uscire un coniglio dal cilindro — pomposi concetti di "Alta Matematica" ed insigni Teoremi e magiche Formule. Tra studenti liceali partecipanti a Gare matematiche, qualcuno disse che non poteva rispondere a un problema dove entravano le quarte potenze perché « non aveva studiato le quarte potenze » o a un problema dove entrava una corona circolare perché « non aveva studiato le corone circolari » e via di questo passo, come se ogni particolare caso o sottocaso richiedesse una "teoria" ad hoc.

La necessità di procedere passo passo, e quindi di individuare preventivamente da quale passo si possa incominciare, è naturalmente maggiore in problemi effettivi che in problemi di tipo scolastico; tuttavia non è affatto infrequente che, anche in questi, uno si trovi in difficoltà per non saper da dove cominciare di fronte a un complesso magari intricato di dati e questioni. Bisogna pensare dove siamo (in fatto di conoscenze iniziali), dove dobbiamo arrivare (per rispondere alle questioni richieste), e come ci si può avvicinare. Senza questa preoccupazione, capita spesso che uno applichi e maneggi formule — magari correttamente, ma senza criterio — in modo da andare a zonzo senza bussola e ritrovarsi spesso, infine, al punto di partenza.

Ma riprendiamo le esemplificazioni, cominciando con qualche ulteriore considerazione sul caso precedente (*fig. 8*), intesa a mostrare (secondo quanto detto nel n. 2) l'utilità di riflessioni su possibili varianti. Intanto si noti che il procedimento era applicabile anche se le aree dei diversi (5 o non importa quanti) pezzi, anziché uguali, si fossero dovute ottenere in rapporti prefissati: p. es. la II doppia della I, la III tripla, la IV

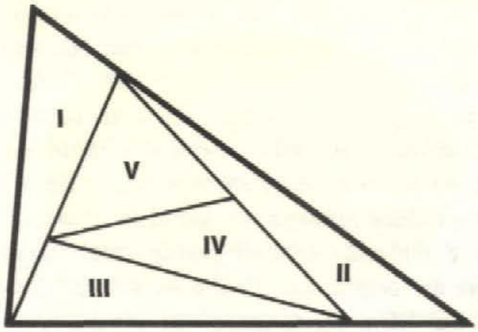


FIGURA 9.

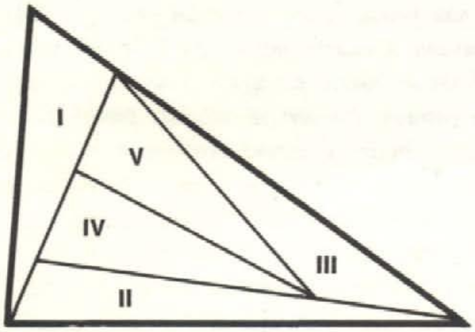


FIGURA 10.

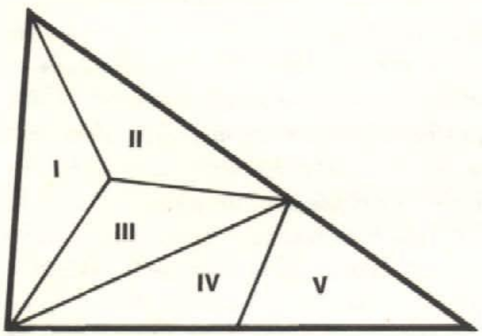


FIGURA 11.

quadrupla, la V quintupla. L'area totale risulta allora quella del I pezzo moltiplicata per $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (1); basta quindi procedere nello stesso modo di prima, ma dando, come area: al I pezzo, 1/15 dell'area totale; al II, 2/14 dell'area residua; al III, 3/12 dell'area residua (dopo staccate la I e II); al IV e V, rispettivamente 4/9 e 5/9 del residuo. (Naturalmente, basta prendere $CD = (1/15)$ di CB, $AE = (1/7)$ di AB, $DF = (1/4)$ di DB, $EG = (4/9)$ di EB). Se il problema dato fosse questo, a maggior ragione sarebbe visibilmente necessaria una primitiva scomposizione in passi che lo rendono facile; i passi sono anzi due: dapprima determinare le aree parziali, poi capire che bisogna costruire i pezzi uno per volta cominciando dal I.

Altra osservazione utile come generalizzazione (per rendere utilizzabile l'esperienza di questo caso in casi analoghi): lo stesso concetto e procedimento vale anche per altri schemi di suddivisione che, come quello della *fig. 8*, permetta di costruire i singoli pezzi *uno dopo l'altro*. Ciò avviene ad es. nel caso delle *figg. 9 e 10* (nell'ordine dato alla numerazione I-II-III-IV-V); invece nel caso della *fig. 11* il procedimento permette di costruire soltanto tre pezzi, e cioè (I + + II + III) assieme, IV, V. Il problema di spezzare il triangolo (I + II + + III) in tre, di area assegnata, scegliendo opportunamente il punto P è un problema di tipo diverso dal precedente, e lo riprenderemo nel n. 12 ove riuscirà appropriato per esemplificare altri concetti fecondi.

Accenniamo brevemente ancora a qualche esempio per delle riflessioni che ciascuno potrà completare a suo piacimento.

Quante cose può dire un filo teso! Eccone alcune (e altre ne vedremo dopo).

(1) Con l'occasione si può anche controllare che $15 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5 + 1)$; certamente è superfluo, ma l'abitudine a rammentare collegare e talvolta applicare insieme concetti e risultati di settori diversi (come, qui, le "progressioni aritmetiche" e la "geometria") dà un allenamento utile per evitare i paraocchi. Le cose studiate divengono poco utilizzabili e facilmente dimenticabili per chi le guarda coi paraocchi e le vede separate in compartimenti stagni, cristallizzazione deleteria di quelle divisioni in materie o sottomaterie (aritmetica, geometria, algebra, ecc.) imposte fino a un certo punto da comodità didattiche ma che ciascuno dovrebbe superare riunendo in una visione sensata gli sparsi e poveri brandelli.

Un filo teso.

Un altro problema dato in una Gara matematica riguardava una curva generata in modo simile all'*ellisse*.

Diciamo subito, per chi non lo sa, che l'ellisse è la curva che si vede guardando obliquamente un cerchio (p. es. fotografia di una vasca circolare, o di una ruota) o tagliando obliquamente un cilindro circolare (p. es., fetta di salame, ombra di una sfera); essa gode della proprietà sfruttabile per costruirla nel modo indicato dalla fig. 12 (esistono due punti detti fuochi, F_1 *e* F_2, *tali che la somma delle distanze dai fuochi è la stessa per tutti i punti* P *appartenenti all'ellisse; la si disegna pertanto facendo scorrere la matita entro uno spago teso tra essa e due chiodi infissi nei fuochi*).

In quel problema invece i chiodi erano quattro, ai vertici di un quadrato. Bastava pensare che il filo sarebbe naturalmente rimasto teso tra la matita e due soli chiodi per volta (come mostra la *fig. 13*), per capire che la curva si componeva di pezzi d'ellissi e non c'era che da vedere come. (E lo si vede nella *fig. 14*). Invece, pensando che i chiodi erano 4, molti immaginarono che si dovesse trattare di cosa del tutto nuova mentre il primo passo era semplice pur di osservare un fatto che non poteva non apparire ovvio raffigurandosi concretamente la situazione con lo spago teso tra chiodi e matita.

Consideriamo ancora un problema, illustrato dalla *fig. 15*: al bigliardo, partendo dal punto *A* vogliamo colpire una biglia nel punto *P* dopo due riflessioni sulle sponde (1) (come indicato con la linea piena); in che direzione (ossia, verso

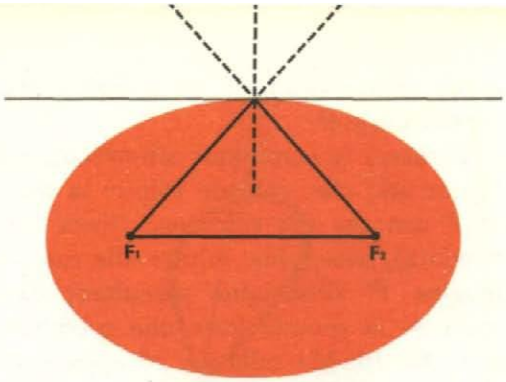


FIGURA 12.

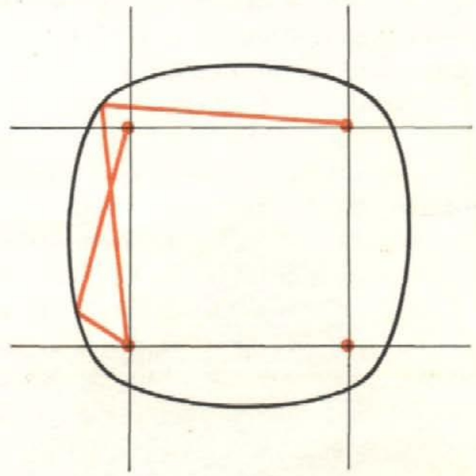


FIGURA 13.

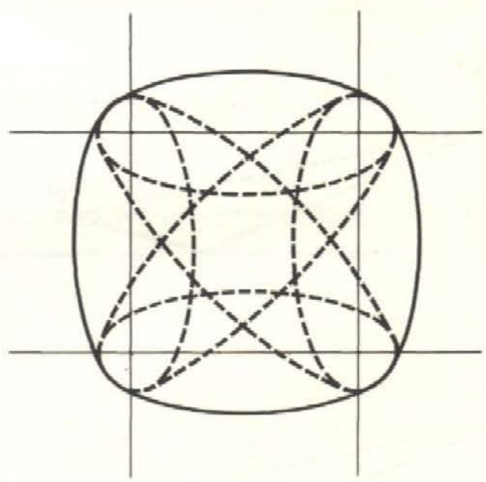


FIGURA 14.

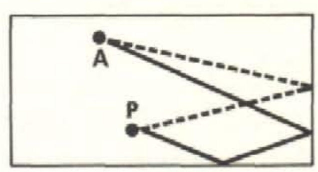


FIGURA 15.

(1) Ammettiamo note e valide le leggi della riflessione; su di esse avremo motivo di tornare, del resto, nel prossimo n. 6. Rammentiamo comunque subito che sono le stesse che varrebbero per un raggio di luce, od anche, che dànno la posizione di un **filo teso** da *A* a *P* allacciato al contorno.

quale punto della prima sponda) dobbiamo mirare?

È chiaro (e comunque ammettiamo di sapere già) che, volendo colpire la biglia in P con *una sola* riflessione (linea tratteggiata), basterebbe mirare alla sua immagine P' (immagine speculare; cioè, come se la sponda fosse uno specchio); v. la *fig. 16*. Ma sulla *fig. 16* appare ora chiaro che, ripetendo lo stesso artificio (*fig. 17*), otteniamo in P'' l'immagine dell'immagine, e la risposta è che basta mirare da A in direzione di P''. E ciò si può estendere ad ulteriori punti P''', P^{IV}, ... per traiettorie con 3, 4, ... riflessioni: con un passo alla volta ciò diventa intuitivo, mentre pensando direttamente a un caso complesso è assai improbabile che si giunga a intravvedere la via giusta.

Il fatto di estendere un risultato, ad un passo per volta, costituisce un metodo di fondamentale importanza sia pratica che teorica: il metodo di induzione completa (*su cui torneremo nel n.* 10).

FIGURA 16.

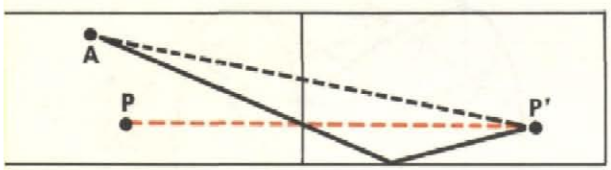
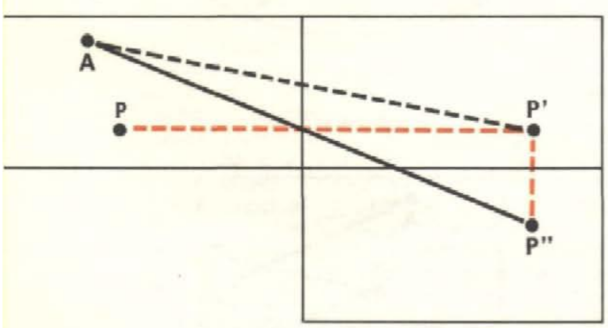


FIGURA 17.



6. SAPER VEDERE LE COSE CONCRETE

Tra le cose facili che spesso è difficile vedere dobbiamo menzionare a parte le cose *concrete*.

Alludiamo a quelle cose che sarebbero ovvie per tutti se non si disdegnasse di pensare a ciò che è fin troppo familiare, che fa parte dell'esperienza quotidiana, e che pertanto non è ritenuto degno di mescolarsi, inquinandole, a nozioni superbe per la loro astrattezza. Superbia come sempre stoltissima: le astrazioni sono complementi integrativi delle fondamentali conoscenze concrete, familiari, quotidiane, intuitive; complementi che possono avere a volte un valore altrettanto fondamentale e più spinto (ma occorre saggiarlo e appurarlo), ed altre volte si riducono a sterili cincischiature.

Ancora il filo teso.

L'esempio più significativo è forse questo. Un problema di una Gara matematica richiedeva, sostanzialmente, per poter rispondere, che si avesse un'idea di come si sarebbe disposto un filo a cappio infilato nella punta di un cono e teso in un punto verso il basso (ad es. mediante un peso), come indicato nella *fig. 18.* Nessuno (su circa 250 concorrenti) vi riuscì; i migliori si segnalarono per qualche osservazione parziale corretta o sensata (seppure insufficiente a condurre alla conclusione esatta). Eppure, non era forse ovvio che il filo si dispone secondo *la linea più breve* (o, come si dice, "geodetica"), e che la linea più breve *è la retta* (ossia: la linea che diventa retta spianando il mantello del cono)? (La *fig. 19* mostra il mantello del cono aperto e spianato; i punti P' e P'' corrispondono al punto P, il mantello essendo pensato tagliato lungo la generatrice passante per P; il segmento $P'\,P''$

diventa, riavvolgendo il mantello a cono, il cappio $P\,Q\,P$).

Certo: la cosa era ovvia. Probabilmente tutti o quasi tutti coloro che non vi hanno pensato avevano costruito coni (imbuti, cappucci, cartocci) di carta o di cartoncino, da bambini, e avranno visto farne da bottegai e da venditori di caldarroste. Ma se un ragazzo, quando sente parlare dei coni o di qualunque altra cosa a scuola, anziché pensare ai veri coni per completare con qualche nuova nozione teorica il molto che già ne ha appreso all'età della scuola materna, relega tali nozioni nel limbo delle astrazioni scolastiche destinato a trasformarsi in dimenticatoio appena possibile, alla fine si ritrova ignorante come non mai. Avrà dissipato il tesoro dell'intelligenza sviluppata nei primi anni di vita, senza trar profitto dalle cose che, invece di apprendere, avrà trasformato in vani provvisori imbottimenti (1).

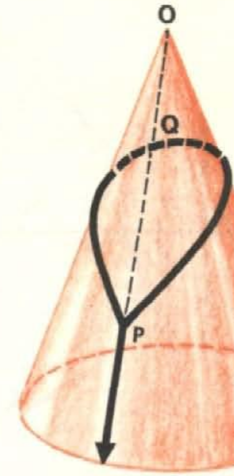


FIGURA 18.

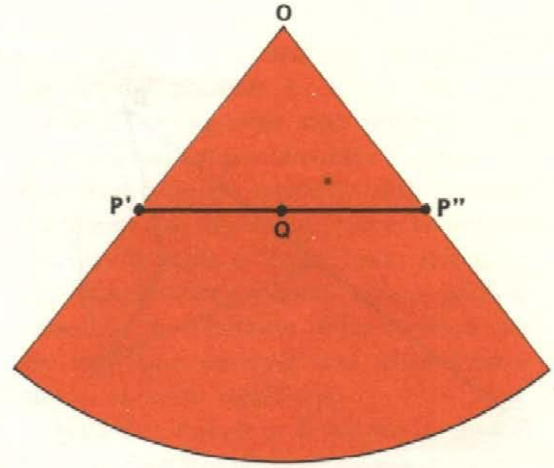


FIGURA 19.

Capire significa collegare.

Ripetiamo ancora la solita raccomandazione, di cui tutto quello che diciamo vuol mostrare quanto sia impellente. Bisogna assimilare e render valido ciò che la scuola dà, e che ciascuno può far sì di venirne arricchito anziché soffocato: basta che renda concrete le cose astratte fondendole con ciò che vede e che sa; che vivifichi con la riflessione attiva ciò che appare un sapere fossilizzato e pedantesco; che fonda in sintesi unitaria, con collegamenti e comparazioni, ciò che trova staccato e sminuzzato in campicelli che scriteriatamente ambiscono all'autosufficienza.

Con altra immagine, le singole cose che uno apprende (a scuola o non importa come) sono dei pezzi utili per il montaggio di una efficiente macchina intellettuale ed utili se ed in quanto vengano utilizzati per tale montaggio.

(1) Vedansi in argomento le ulteriori considerazioni e le citazioni del n. 18 (ultimo).

Cosa direste di chi acquistasse le parti occorrenti per mettere insieme un'automobile (o un apparecchio radio, o magari un giocattolo) e invece le conservasse inutilizzate, vuoi trascuratamente in disordine, vuoi esposte in bell'ordine in una vetrina? Perciò diciamo che capire significa collegare.

Ciò vale per i diversi capitoli della matematica, per la matematica tra le altre scienze, per le scienze nei rapporti con le altre discipline. Qui abbiamo notato e noteremo principalmente gli aspetti riguardanti la fusione di diversi campi e metodi matematici; proprio ora è il momento di esemplificare l'utilità (e vorrei

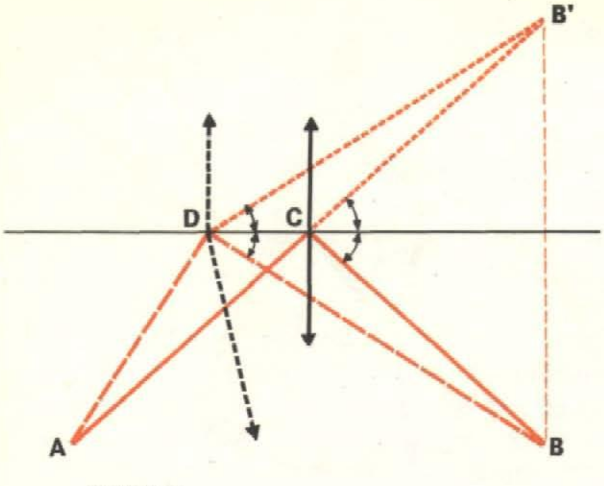


FIGURA 20.

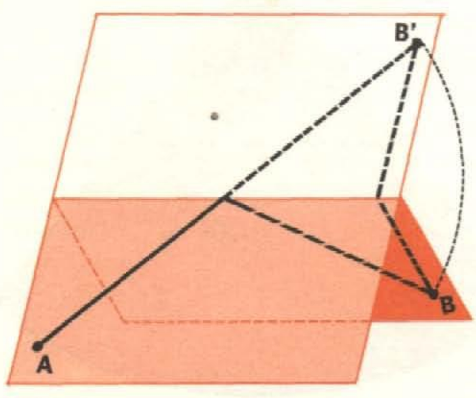


FIGURA 21.

dire la necessità) di sfruttare nozioni di altre scienze per vedere più chiaramente problemi matematici. Quanto alla tesi complementare (l'utilità o necessità della matematica per le altre scienze) la cosa è fin troppo ovvia.

Per illustrare l'utilità delle nozioni di altre scienze, e soprattutto fisiche, nel far capire i problemi matematici (si può dire che se la fisica non esistesse i matematici dovrebbero *inventare una fisica astratta* come sussidio e parte della matematica astratta) potremo limitarci a parlare di un solo caso banalissimo — sempre quello dei *fili tesi* — che pure si rivelerà ricchissimo d'interpretazioni e applicazioni.

E sempre fili tesi!

Un filo teso fra due punti, A e B, in assenza di ostacoli (e di forze: sarà tra l'altro assente il peso, o, praticamente, sarà da ritenersi trascurabile in confronto alla tensione del filo), si dispone secondo il segmento rettilineo $A\,B$, che è la linea più breve che congiunge i due punti. Analogamente, se il filo deve toccare una retta (materialmente, passare p. es. a cavallo di un ferro rettilineo; v. *fig. 20*), esso seguirà ancora il cammino più breve: quello per cui i due tratti del filo formano con la retta angoli uguali. Si vede senz'altro che i percorsi da A a B o al simmetrico B' attraverso a un punto qualunque (C, D, ...) della retta sono uguali; il minimo è quello per il punto C (allineato con AB') e per esso gli angoli sono uguali (come risulta dalla simmetria). Ma la necessità di tale simmetria è chiara anche per una ragione fisica (pur limitandosi a adombrarla): il filo non sarebbe in equilibrio sul ferro se lo scavalcasse in D (slitterebbe verso C) perché la risultante delle tensioni dei due tratti di filo (che sono uguali) agirebbe obliquamente (secondo la bisettrice: ovvio per simmetria). Solo in C le tensioni agiscono sul ferro in senso ortogonale, e si elidono con la reazione del ferro stesso (ammesso non si fletta o spezzi).

Questo ragionamento vale per il caso del bigliardo (*figg. 15-16-17*), anche pensando (con opportuni adattamenti) all'interpretazione "raggi di luce" o "percorso di biglie". Ma serve anche, tra l'altro, a dimostrare che, per l'ellisse (*fig. 12*), la tangente in un qualunque punto P è la perpendicolare alla bisettrice dell'angolo formato dalle congiungenti coi fuochi (in forma più semplice: forma angoli uguali coi fili che vanno dai chiodi alla matita, quand'è in P). Infatti P è allora, su tale retta, il punto per cui il percorso $F_1\,P\,F_2$ è minimo; tutti gli altri punti della retta sono pertanto irraggiungibili col filo ossia esterni all'ellisse. La retta tocca cioè l'ellisse in P (senza attraversarla) ed è quindi la tangente (1) (EP, 3).

Si potrebbe considerare il caso in cui i punti A e B non fossero in un medesimo piano con la retta (col ferro): non cambierebbe nulla (salvo che B' si otterrebbe da B con una rotazione diversa dal precedente angolo piatto; v. *fig. 21*, che diviene la *fig. 20* se i due semipiani portanti A e B coincidono).

Si potrebbe allora, più in generale, considerare il caso in cui il filo teso tra A e B debba appoggiarsi a più rette, ossia esser vincolato a un poliedro (con l'ovvia conclusione: il filo, scavalcando uno spigolo, deve sempre fare angoli uguali con esso dall'una e dall'altra parte). Altre varianti: considerare vincoli (ferri) curvi anziché rettilinei (e tutto andrebbe come se, nel punto ove il filo vi si appoggia, al posto del ferro curvo ci fosse il ferro rettilineo *tangente*), ecc. (EP, 4).

Cosa sono le geodetiche?

Ma passiamo direttamente al caso in cui il filo sia vincolato ad una superficie,

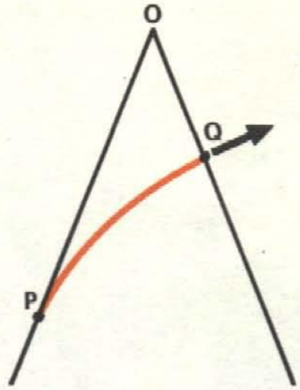


FIGURA 22.

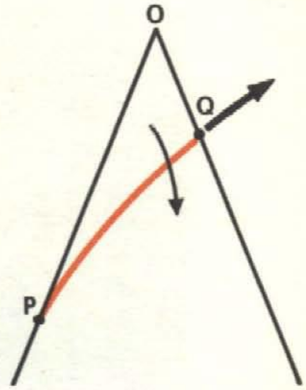


FIGURA 23.

come quella del cono nell'esempio all'inizio del presente n. 6. La linea più breve che congiunge due punti A e B restando sulla superficie data (linea detta *geodetica*) è quella descritta dal filo teso vincolato. La superficie (come precedentemente la retta, o "ferro") non può dare che una reazione *normale* alla superficie stessa: se la risultante delle tensioni del filo non fosse normale esso slitterebbe e non ci sarebbe equilibrio.

Non è il caso di cercar di spiegare sia pure in forma intuitiva le nozioni così adombrate ("piano osculatore" e "normale principale" di una curva nello spazio): sarebbe troppo lunga a volerla fare passabilmente chiara. Vale la pena invece di notare che, pur senza conoscere effettivamente tali concetti, molti tra i partecipanti a detta gara matematica ebbero l'esatta intuizione della proprietà fisico-geometrica che deve sussistere. Lo videro nel caso particolare della figura di profilo: il cappio, di profilo, nel punto più alto Q, deve vedersi terminare ortogonalmente *alla generatrice del cono (come nella fig. 22; altrimenti, nel caso ad es. della fig. 23, slitterebbe tendendo all'ortogonalità). Sostanzialmente è questa stessa proprietà quella in cui si traduce l'esigenza fisica sopra ricordata, e che si rivelerebbe sussistere in ogni punto del filo (guardandolo — come qui —* lungo la tangente).

(1) Questa proprietà caratterizza la tangente per il cerchio, ed anche per l'ellisse (e in genere in tutti i casi più usuali: esclusi cioè i punti di flesso (come al centro di una linea a forma di "S"), quelli angolosi (come il vertice di una linea a forma di "V"), ecc.). Non è il caso di approfondire l'argomento, accennato solo perché l'esempio appariva istruttivo e comprensibile senza entrare in eccessive sottigliezze.
Cogliamo l'occasione per raccomandare, in generale, al lettore, di non preoccuparsi o scoraggiarsi se non riesce a capire (o a capire in modo sufficientemente chiaro) tutti gli esempi e soprattutto i concetti adombrati. Cenni necessariamente sommari non pretendono di poter dare più che un *germe* di spiegazione; riflettendo ad essi e al contesto può darsi che il germe fruttifichi e renda comprensibile a una seconda lettura ciò che non lo era alla prima. Ma neppure ciò è necessario; in caso diverso ci si contenti di afferrare quel tanto che si può e vedere l'insegnamento — la "morale" — che sta sotto.

TAV. I (Si badi che il disegno, ad uso commerciale, non è fatto con esattezza).

TAV. II

Un caso ovvio che dà un'illustrazione semplice: su di una sfera le geodetiche sono i cerchi massimi (quelli che la dividono a metà). E infatti, di profilo, essi si vedono come diametri del contorno apparente della sfera, e sono quindi ad esso ortogonali; quelli non massimi si vedono invece come corde (non diametri) che finiscono obliquamente sul contorno (e non sono geodetiche).

Vi sarebbe molto da aggiungere su questo argomento e su infiniti altri atti a illustrare l'importanza di vedere concretamente, ed in particolare con sensibilità fisica, problemi matematici. Ma dobbiamo limitarci a semplici cenni, per toccare molti temi e suscitare molti stimoli, rinunciando a soffermarci su ciascuno quanto occorrerebbe se l'intendimento non fosse semplicemente quello meramente preliminare ora detto.

Sulla terra, l'arco di cerchio massimo che congiunge due punti alla stessa latitudine, come ad es. (approssimativamente) Roma e New York, raggiungerà a metà strada il punto più vicino al polo. Appare a prima vista strano che un aereo (o una nave, se in mare, o un veicolo, se in un deserto pianeggiante, e sempre prescindendo da altri motivi), durante il tragitto tra due punti sul medesimo parallelo, anziché seguirlo, si sposti dapprima verso nord (nel nostro emisfero) per poi ritornarvi volgendo a sud. Ma il fatto è strano soltanto per colpa dell'abitudine alle rappresentazioni delle carte geografiche, nelle quali la superficie curva è necessariamente in qualche modo deformata, e spesso i paralleli appaiono rettilinei. Ciò vale ad es. nella "proiezione di Mercatore", molto usata per cartogrammi (ad es. di reti aeree, ecc.); v. la Tav. I ove sono indicate le traiettorie descritte da chi partisse da Roma proseguendo sempre "in linea retta": (effettivamente: su un cerchio massimo), ossia le rotte più brevi per raggiungere un qualsiasi punto della terra partendo da Roma. È utile osservare i diversi casi sulla carta (p. es., da Roma alla Nuova Zelanda, o a Tokyo, ecc.) e controllare sul mappamondo, ponendosi qualche domanda.

La fotografia del quadro luminoso (Tav. II) del volo di "Gemini V" (agosto 1965) mostra alcune orbite (data la rotazione della terra non si ha una geodetica, che apparirebbe ripercorsa senza spostamento alcuno, indefinitamente) (EP, 5).

7. SAPER VEDERE GLI ASPETTI ECONOMICI

Le questioni fisiche incontrate (come molte altre) si prestano ad essere interpretate in senso "economico": quelle leggi fisiche sono tali che la biglia, o il raggio di luce, o il filo, automaticamente seguono la via più breve dal punto di partenza a quello d'arrivo. Non è un caso sporadico o accidentale: anche le più complesse leggi fisiche si possono spesso ricondurre ad analoghi "principi di minimo", ed è la matematica che (attraverso strumenti molto più avanzati) permette di esprimere e dimostrare conclusioni del genere.

Più espressamente sono di carattere economico, nel senso più abituale della parola, problemi consistenti nel cercare, in date condizioni, la soluzione *più conveniente:* quella cioè che rende *minimo* il costo, oppure il tempo impiegato, oppure la distanza da percorrere, ecc. (o, se si parla di profitto, di volume della produzione, ecc., basterà dire *massimo* anziché minimo). Problemi del genere hanno spesso grande importanza (per l'economia di un singolo, o di un'azienda, o di un paese); di ciò non è qui il luogo d'interessarci, ma gioverà, ai nostri fini, osservare quanto anche le riflessioni sugli aspetti e le interpretazioni di natura economica conferiscano visibilmente valori di concretezza e di fecondità alle nozioni e ai metodi della matematica.

Antichi pregiudizi, duri a morire e facili a rispuntare con nuove parvenze, considerano pregevole la matematica soltanto se "pura", coltivata come fiore di serra per nient'altro che una curiosità intellettuale. Spregevole soprattutto, e da tener ben distinta, sarebbe la matematica intesa alle applicazioni economiche, strumento dei mercatanti, e poco meno quella applicata alle altre scienze, all'ingegneria, alla tecnica. Eppure la matematica apparirebbe ben povera, e al limite vuota, privandola di tutto ciò che stiamo presentando nell'intento di far apprezzare la fecondità degli stimoli che, attraverso la molteplicità e ricchezza d'interpretazioni concrete, esercita sulle nostre facoltà di pensare.

Oltre che applicarsi a problemi economici, la matematica ha finalità economica di per sé in quanto è ricerca degli strumenti più adatti per ogni problema, e del modo migliore per sistemarli e presentarli. Del resto tutta la scienza ha (soprattutto nel pensiero di Mach, Vailati, Dewey, ecc.) la finalità "economica" di fornirci la più semplice e comoda teorizzazione di quanto ci circonda.

Limitiamoci a illustrare un solo concetto importante su tre diverse applicazioni (schematizzate nel modo più semplificato dato il semplice scopo esemplificativo, senza preoccuparci di precisazioni e modifiche atte a rendere le impostazioni più realistiche).

Conviene ribassare il prezzo?

Supponiamo che un'impresa, che vende giornalmente 300 unità di un suo prodotto con guadagno unitario di Lire 2000, sappia che le vendite aumenterebbero di un'unità in più per ogni 5 lire di diminuzione del prezzo (e quindi del guadagno). Conviene diminuire il prezzo? o aumentarlo? o lasciarlo immutato?

Si potrebbe confrontare il guadagno attuale (L. 2000 × 300) con quelli variati (p. es. L. 1995 × 301, L. 1990 × × 302, ecc., o L. 2005 × 299, ecc.), ma è più semplice pensare subito alle differenze in più e in meno per una variazione di 5 lire. Una riduzione di 5 lire fa perdere 5 lire di guadagno su ciascuna delle 300 unità vendute comunque, e fa conseguire un guadagno di L. 1995 sulla nuova; guadagno netto, L. 1995 — — L. 1500 = L. 495. In tal modo si fa un confronto *marginale* (confrontando cioè gli effetti in più e in meno di una variazione unitaria, o comunque "molto piccola"), che basta a mostrare in che senso spostarsi; il punto ove conviene arrestarsi è quello dove gli effetti marginali in più e in meno si fanno equilibrio (somma = 0).

Ammesso che quella previsione valesse per qualunque variazione di prezzo, si vede subito che:

col prezzo minimo (uguale al costo) si ha
guadagno unitario $= 0$
unità vendute $= 700$ $(= 300 + 2000/5)$;

col prezzo massimo (nessuno compera) si ha
unità vendute $= 0$
guad. un. = L. 3500 $(= 2000 + 300 \times 5)$;

nella situazione intermedia con
unità vendute $= 350 = \frac{1}{2}(0 + 700)$
guad. un. = L. $1750 = \frac{1}{2}(3500 + 0)$ L.
si ha il *guadagno totale massimo.*

Poiché infatti $1745 - 350 \times 5 = -5$
mentre $1750 - 349 \times 5 = +5$
conviene ribassare da 1755 a 1750 ma non più da 1750 a 1745. E la conclusione è valida se la proporzionalità tra ribassi ed incrementi di vendite sussiste (seppure non fino agli estremi) fino al punto trovato come soluzione. Geometricamente, il ragionamento applicato si basa sul fatto che fra i rettangoli di ugual

perimetro il quadrato è quello di area massima; nel n. 9, e poi nel n. 11, insieme a tale fatto geometrico, mostreremo il nesso col presente problema.

Qualche altro esempio nel medesimo ordine di idee verrà incontrato più avanti: nel n. 11 (*criterio di minimo costo per le scorte di magazzino*) *e nel n.* 17 (*acquisti per vendite aleatorie*)*; potremo ivi riprendere qualche considerazione sul presente tema integrandola con cenni agli importanti aspetti implicanti questioni di probabilità e statistica.*

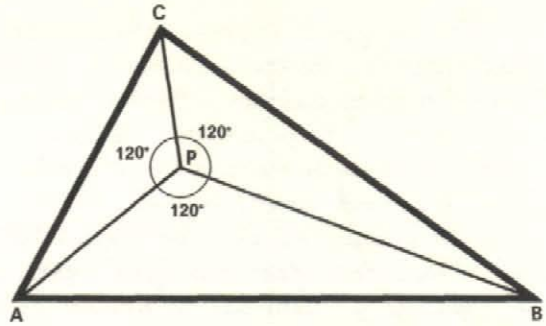


FIGURA 24.

Come abbreviare la strada?

Gli altri due esempi si possono dire economico-geometrici: consistono entrambi nel rendere minima una somma di distanze, ad esempio il percorso totale di bambini per recarsi a scuola. In un caso, si tratta di scegliere il punto ove costruire la scuola per servire tre località, A, B, C; nell'altro, di ripartire gli scolari fra due scuole esistenti a seconda del punto in cui abitano. In entrambi i casi ci occupiamo delle distanze (in linea d'aria) benché in casi concreti occorrerebbe tener conto di distanze su strada, o di tempo con mezzi di trasporto, o d'altro.

Nel primo caso, supponiamo dapprima che le tre località abbiano all'incirca lo stesso numero di abitanti e di scolari (il caso generale verrà considerato nel n. 12 (*fig. 40*) per non appesantire ora l'esempio e perché allora potremo aggiungere altre osservazioni). Si tratta quindi, nel nostro caso, di trovare il punto P per il quale è minima la somma delle tre distanze, $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$; in un'altra interpretazione, quindi, P è il punto ove far convergere tre tronchi stradali per congiungere A, B, C con la minima spesa (se dipende dalla lunghezza, se non c'è difficoltà a farli rettilinei, ecc.).

E la risposta è intuitiva, pensando all'equilibrio marginale da un punto di vista fisico: in P (v. *fig. 24*) i tre tronchi devono formare tra loro tre angoli uguali (120°), solo modo perché tre forze uguali possano farsi equilibrio (ciascuna dovendo essere sulla bisettrice delle altre due). In termini economici: se si fosse scelta, per il nodo, una posizione diversa dal punto P dove i tre angoli sono uguali, ci sarebbe stata la possibilità di risparmiare spostandola (nella direzione corrispondente all'azione risultante delle tre ipotetiche forze), perché l'aggravio dovuto all'allungamento di uno (o due) dei tre tronchi sarebbe stato più che compensato dal risparmio derivante dall'accorciamento degli altri due (o uno). Non c'è pertanto, fuori di P, equilibrio fra gli effetti *marginali* in più e in meno (1).

Questa considerazione degli effetti marginali (*come dicono gli economisti*) *contiene un concetto che tutti dovrebbero afferrare e tener presente nel pensare a qualunque questione di* equilibrio *o di* ottimizzazione. *Lo incontreremo in parecchi esempi, ma per fissare in mente l'idea basta l'esempio banale e fondamentale: il fatto che uno consumi una certa quantità di un bene e non più significa che fino a quel punto ogni unità gli dà un piacere superiore al costo, mentre al di là il pia-*

(1) Se il triangolo ABC ha un angolo (sia quello in A) maggiore di 120° (o uguale), P cade invece in A (conviene il percorso BAC). Nel caso normale (punto P interno ad ABC) lo si costruisce come vedremo nel n. 12 (*fig. 39*).

cere diventa inferiore (e preferisce risparmiare quell'importo o spenderlo diversamente).

Considerazioni analoghe si fanno in meccanica (parlando di spostamenti virtuali), *e valgono ovunque. Si tratta infatti di applicazioni di un'unico concetto puramente matematico, consistente nell'analizzare l'effetto di piccoli spostamenti (da un dato valore, o punto, o "situazione"). Occorre però avvertire che considerazioni del genere bastano a individuare i* massimi relativi, *non il* massimo assoluto. *Se, spostandoci dal punto ove ci troviamo, non si può salire ma solo scendere vuol dire che stiamo sulla cima di una collina, ma non è detto che non ve ne siano altre più alte. Nel nostro esempio, colui che ha scelto nel miglior modo la quantità di quel dato bene può darsi avrebbe scelto diversamente e meglio se avesse pensato che ne esiste un altro che poteva in parte sostituirlo.*

Nell'altro problema, consideriamo una località che ha due scuole, di data capienza (complessivamente uguale al numero di scolari), e situate in due punti A e B; conosciamo il punto dove abita ciascun bambino e vogliamo dividere l'abitato in due zone, A e B, da cui i bambini che vi abitano vadano nelle scuole A e B, rendendo minima la somma dei percorsi. (Poco realisticamente, li consideriamo rettilinei anziché alterati per effetto della rete stradale).

Intervengono qui nuove curve, definite in modo molto simile a quello dell'ellisse: le *iperboli.* Anche per esse esistono due *fuochi* (qui corrispondono alle scuole A e B), ma anziché la somma delle distanze (come nel caso dell'ellisse: v. *fig. 12*) in questo caso rimane costante su di esse *la differenza delle distanze tra i fuochi* (v. *fig. 25*); non c'è una costruzione meccanica del tipo utilizzato per l'ellisse (1).

Fra le iperboli scegliamo quella (2) che lascia dalla parte di A e di B dei punti (abitazioni di scolari) nel numero corrispondente alla capienza delle due scuole: vedremo che la ripartizione così effettuata è quella ottima (per lo scopo detto: di render minima la somma delle distanze). Supponiamo infatti che, contrariamente a tale criterio, almeno uno scolaro della zona A venisse assegnato alla scuola B e (necessariamente, quindi) almeno uno della zona B alla scuola A (quelli scambiati nei due sensi sono necessariamente in ugual numero). Siano P e Q le loro abitazioni (*fig. 27*). Può ben darsi che, applicando il criterio ottimo, per uno dei due la situazione peggiori dovendo egli fare un tragitto più lungo (nel disegno, infatti, ciò avviene per P): ciò è inevitabile salvo il caso in cui la divisione fosse data proprio dall'asse di simmetria (che è il caso particolare di iperbole con differenza $= 0$), ossia se per caso coloro che abitano più vicini a ciascuna scuola, A o B, fossero già nel numero esatto corrispondente alla capienza (e allora il problema non si porrebbe neppure). Tuttavia, seppure (ad es.) P si avvantaggia dall'esser erroneamente assegnato alla scuola B (della differenza $\overline{PA} - \overline{PB}$), Q non soltanto ne è danneggiato, ma lo è in misura maggiore (della differenza $\overline{QA} - \overline{QB}$); e tale

(1) In modo un po' più precario si potrebbe tentare la costruzione suggerita nella *fig. 26* (chi vuole cerchi d'interpretarla e spiegarsela per esercizio). La matita è fissata a un punto del filo, i cui due capi sono legati assieme e tesi (ad es. mediante un peso) al di là del percorso obbligato tra i 4 chiodi. Questo dispositivo è stato escogitato e indicato espressamente per i lettori, ripensando all'affermazione fatta nel testo che « una costruzione meccanica non esiste »; l'aggiunta di questa nota in calce ha lo scopo, non di presentare tale costruzione come se fosse cosa interessante, ma di mostrare come, pensandoci un po', chiunque (anche ciascuno di voi) potrebbe e dovrebbe saper trovare qualche modo di cavarsela in casi del genere.

(2) In realtà non è unica: è una qualunque tra quelle che effettuano la stessa suddivisione. Sarebbe unica solo se per caso vi fossero due o più scolari abitanti esattamente sulla stessa iperbole che dovessero venir smistati (arbitrariamente: ciò è irrilevante) fra le due scuole.

differenza è per definizione maggiore per tutti i punti Q a destra dell'iperbole divisoria che per qualunque punto alla sua sinistra, come P (EP, 6).

8. RIFLETTERE SUI CASI PARTICOLARI

Dobbiamo, a questo punto, prestare attenzione ad alcune questioni di carattere sistematico. In questo n. 8 *e nei prossimi nn.* 9 *e* 10 *occorrerà riflettere su come il "saper vedere" (nei modi illustrati in esempi già incontrati e in altri che seguiranno) serva anche a veder meglio, riflettendovi sopra, il senso di quei metodi generali, sistematici, codificati, che risultano per solito ostici e indigesti non tanto per colpa loro quanto per il modo infelice, vacuo, gratuito, puramente formale, in cui sogliono venir presentati. Riflettendovi sopra, e vedendone il senso, ci si potrà convincere che il* diavolo *(la matematica fatta di formule) non è poi tanto brutto come ce lo fanno apparire... i suoi adoratori; è anzi un caro e buon diavolo che ci dà generosamente una mano per proseguire più speditamente e non meno divertentemente il nostro cammino.*

Abbiamo cominciato (il n. 1) *col dire che occorre anzitutto immaginazione, e farne uso per saper vedere ogni esempio e problema. Abbiamo visto che, riflettendo ulteriormente, essa ci arricchisce di visioni e idee che valgono in più esempi, li collegano, acquistano senso più generale. Se un'idea risulta particolarmente importante, e suscettibile di venir applicata utilmente in casi abbastanza o molto generali, perché non fissarla meglio in testa (ed anche, perché no, sulla carta) sotto forma di enunciato preciso, di regola comoda, di convenzione servizievole, addirittura di teoria?*

Basta solo considerare tutto ciò come continuazione delle riflessioni precedenti, codificata in quanto riflessioni dello stesso genere ce lo fanno apparire utile. Non considerarlo invece come cosa piovuta dal cielo o dalla fabbrica dei programmi scolastici.

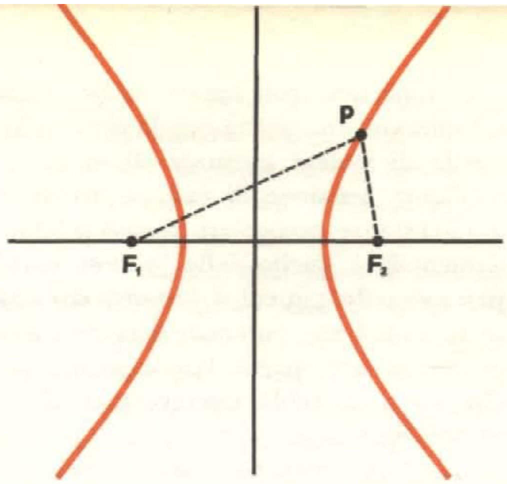


FIGURA 25.

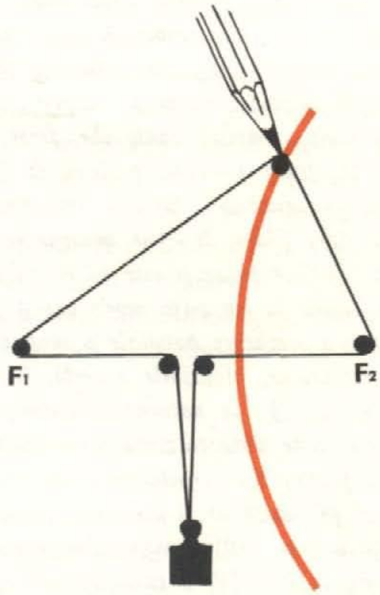


FIGURA 26.

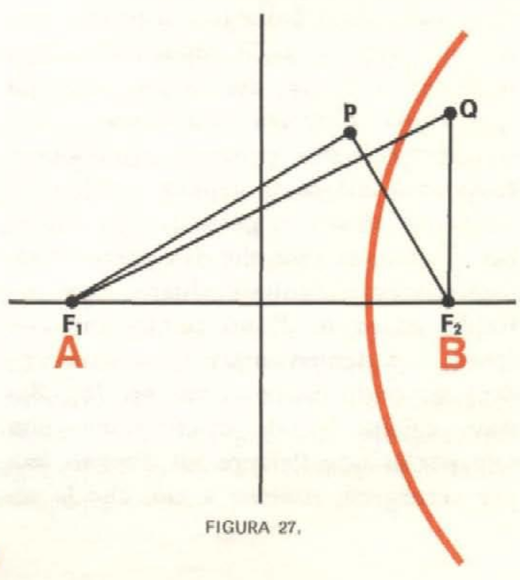


FIGURA 27.

Cominciamo col notare come possa considerarsi una prima regola sistematica quella di vedere anzitutto di orientarsi mediante ispezione di casi particolari o di circostanze particolari. Il caso più fondamentale è quello delle "dimostrazioni **per assurdo**", in cui si dimostra che una certa ipotesi non può esser vera perché si è trovata una particolare affermazione che allora dovrebbe esser vera anch'essa mentre non lo è.

Una dimostrazione per assurdo l'avevamo già data, prima di parlarne espressamente: era quella dell'ultimo esempio (sull'assegnazione degli allievi alle due scuole A *e* B*; n.* 7*); se riuscì comprensibile, vuol dire che il concetto è ben intuitivo. Anche gli esempi seguenti saranno molto semplici, tanto che, forse, sembrerà addirittura eccessivo parlare di "dimostrazioni per assurdo"; tuttavia saranno sufficienti a dare l'idea di come qualche osservazione particolare possa servire ad escludere che le cose stiano in un certo modo che a prima vista poteva sembrare possibile o magari, per errata intuizione, plausibile o certo. Ci limitiamo a dire che la natura e l'impiego e il significato delle dimostrazioni per assurdo acquistano profondità e complessità ben maggiori in campi più avanzati e difficili.*

Ritorniamo sull'esempio del cono (v. n. 6: *figg. 18 e 19*, e poi *figg. 20 e 21*). Molti dei partecipanti alla gara matematica hanno fatto il disegno in profilo (come alle *figg. 22 e 23*) indicando come rettilineo il profilo del cappio (cioè: la linea *PQ* sarebbe vista come un segmento). Ciò vorrebbe dire però che la sezione è *piana;* ma allora il cappio avrebbe la forma di ellisse, e pertanto (ed anche per chi non sapesse che dev'essere un'ellisse dovrebbe risultare chiaro) non potrebbe avere in *P* un punto angoloso (come è evidentemente necessario, essendovi attaccato un peso: cfr. *fig. 18*). Bastava questa banale osservazione, non solo per evitare l'errore sul disegno, ma per accorgersi, insieme a ciò, che la sezione non poteva esser piana, la geodetica non è una linea piana,... e riflettendo ancora si poteva forse aprire la via a scoprire l'"uovo di Colombo" (ossia la soluzione illustrata nella *fig. 19*).

I numeri che terminano con...

Un altro problema proposto in una gara matematica chiedeva di dimostrare che un numero di due o più cifre fatto di tutti 9 (99, 999, 9999, 99999, ecc.; in forma più scientifica (1), una potenza di 10 diminuita di 1, ossia un numero del tipo $10^k - 1$) non può essere un *quadrato* (quadrato perfetto, cioè di un numero intero). Per i numeri formati di un numero pari di cifre 9 (99, 9999, ecc.) dovrebbe venir in mente subito un motivo evidente: aggiungendo 1 si ha un quadrato $(99 + 1 = 100 = 10 \times 10 = 10^2$, $9999 + 1 = 10.000 = 100 \times 100 = 100^2$, ecc.) e due numeri consecutivi non possono essere entrambi quadrati perché i quadrati si diradano sempre più (p. es., l'ultimo quadrato prima di $100 = 10^2$ è $9^2 = 81$ che è ben minore di 99, e così via; per esercizio dimostrarlo in generale). Ma come dimostrare che ciò vale anche per 999, 99999, o, peggio, per il numero scritto con (p. es.) la cifra 9 ripetuta 1007 volte?

Se uno ha notato che i quadrati delle 10 cifre (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81) terminano per 0 o 1 o 4 o 5 o 6 o 9 (nessuno per 2 o 3 o 7 od 8), può pensare che... se il problema riguardasse un numero terminante ad es. per 7 la ri-

(1) È "più scientifica" non solo per l'apparenza ma per un motivo sostanziale: la prima proprietà è relativa al particolare sistema di numerazione usato (base 10, quello abituale ma non privilegiato; nelle calcolatrici elettroniche è spesso adottato il sistema in base 2), mentre l'altra è indipendente da circostanze accessorie del genere.

sposta negativa sarebbe ovvia: l'ultima cifra del quadrato è quella del quadrato dell'ultima cifra e non può quindi essere 7. Dal fatto che l'ultima cifra sia 9 possiamo solo concludere che, se il numero è quadrato, dev'essere il quadrato di un numero che termina o per 3 ($3^2 = 9$) o per 7 ($7^2 = 49$). A questo punto verrà naturale di pensare che basterà comunque vedere se 99 è o no tra le possibili terminazioni di quadrati di numeri di due cifre... Ma appena uno prova a sviluppare questa idea si accorge che essa è superflua. Usando la formula del quadrato del binomio (v. n. 2), ogni numero che termina per 3 (o per 7) si può scrivere $a + 3$ (o $a + 7$) con a multiplo di 10; il suo quadrato sarà, nei due casi

$(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot 3 \cdot a + 9$, o

$(a + 7)^2 = a^2 + 2 \cdot 7 \cdot a + 49$, ma

a^2 è multiplo di 100 e non tocca le ultime due cifre, e $2\,a$ (e a maggior ragione $2 \cdot 3 \cdot a$ e $2 \cdot 7 \cdot a$) è multiplo di 20. La cifra delle decine non può venir alterata che di un numero pari e quindi (che si parta da 0 o da 4, avendo 09 o 49) sarà sempre *pari*. Quindi nessun quadrato può terminare con 99 (EP, 7).

Più in generale, questo ragionamento può completare le precedenti conclusioni riguardanti la sola ultima cifra: un quadrato può terminare soltanto, o per 0, 1, 4, 5, 9 *preceduti (come cifra delle decine) da un numero* pari, *oppure per* 6 *preceduto da una cifra* dispari. *Perciò la semplice ispezione delle ultime due cifre basta in* 70 *casi su* 100 *ad escludere che un numero possa essere quadrato. È facile estendere tali conclusioni, osservando ad es. che le IV potenze possono pertanto terminare soltanto per* 0 *o* 1 *o* 5 *precedute da cifra pari, o da* 6 *preceduto da cifra dispari (cadono infatti* 4 *e* 9, *ottenibili da* 2 *e* 8 *e da* 3 *e* 7, *che non possono essere cifra finale di quadrati).*

Considerazioni del genere rendono facile l'individuazione, senza calcoli, del numero **di cui il numero proposto sia una certa potenza,** *p. es. si sappia che è la* **quarta** *potenza, o la* **quinta** *potenza,... Con un po' di memoria e prontezza, non è teoricamente difficile apprendere e dar subito la risposta esatta (beninteso, per numeri fino a un certo ordine di grandezza, ossia fino a un certo numero di cifre). In tal modo alcune persone (tra cui, pochi anni or sono, una ragazza indiana) riuscirono a sbalordire, e apparire fenomeni di capacità matematica, presentandosi come numeri di spettacolo* (EP, 8).

Più in generale ancora, possiamo dire che questi esempi sono istruttivi in quanto suggeriscono di vedere se una conclusione possa dedursi **tenendo conto solo di una parte molto semplice** *di ciò che si sa (e cercando di indovinare quale tale parte possa essere). Per escludere che il numero formato da* 77 *cifre, tutte* = 9, *sia un quadrato non occorre calcolarne la radice o comunque tener conto di tutte le* 77 *cifre se si sa o s'immagina (e si cerca se) la conclusione si può trarre dalla sola conoscenza dell'ultima cifra, o delle ultime due, ecc., o da altre circostanze del genere.*

Il calendario del campionato di calcio.

Ancora un semplice esempio; questo di tipo **"combinatorio"**, campo in cui capita spesso di doversi chiedere se è o non è possibile congegnare qualcosa in un certo modo. Ci chiediamo, precisamente, se sarebbe possibile combinare il calendario di un campionato di calcio (con numero pari di squadre) in modo che ogni squadra giochi alternativamente una partita in casa e una fuori. Si può subito rispondere NO: sotto tale condizione è ovvio che due squadre che alla prima giornata giocano entrambe in casa (oppure entrambe fuori) non potrebbero mai incontrarsi. Da ciò segue, più precisamente, che l'alternanza potrebbe esser rispettata al più per due squadre, ed ogni altra dovrebbe almeno una volta romperla.

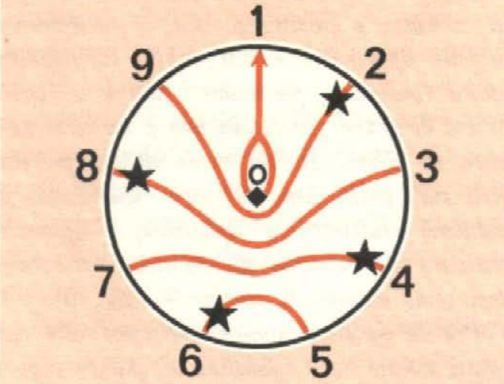


FIGURA 28.

Attenzione al "potrebbe": la dizione è ambigua e bisogna spiegarla (ed avvertire in generale dei pericoli di siffatte ambiguità). La conclusione raggiunta è solo che non è escluso, in base alle prime considerazioni fatte, che un calendario con quelle proprietà sia realizzabile (così come, per accennare di nuovo all'esempio precedente, si può dire che fra i dieci numeri 1065, 1165, 1265, 1365, 1465, 1565, 1665, 1765, 1865, 1965 *si* potrebbero *trovare dei quadrati — in quanto ciascuno, notando che termina per* 65, *fino a prova contraria non è escluso che sia quadrato — ma non che si può trovarne nel senso di affermare che ne esistono).*

Per vedere che effettivamente quella possibilità esiste non c'è di meglio che costruire un modello particolare, nel modo più semplice possibile. Basterebbe ad es. immaginare il seguente schema (abbastanza noto) e notare che esso risponde alle condizioni volute (v. *fig. 28*).

Pochi cenni, che chiunque potrà completare osservando lo schema. Esso si riferisce al caso di 10 squadre (indicate coi numeri da 0 a 9), ma potrebbero essere in numero pari qualunque. Il disco centrale è girevole; la freccia uscente dal centro va portata sull'1 alla 1ª, giornata, sul 2 alla 2ª, ..., sul 9 alla 9ª (ed ultima). Le linee che congiungono i punti simmetrici rispetto alla freccia indicano gli accoppiamenti per ogni giornata (fra le squadre dei numeri che risultano collegati), la squadra indicata dalla freccia gioca con la "0" (la quale gioca alternatamente in casa e fuori). Le altre partite si giocano in casa (in andata; in ritorno, naturalmente, viceversa) della squadra dal lato del segno (stella).

Se le squadre fossero in numero dispari, basterebbe sopprimere la "0" e considerare "riposo" l'incontrarla; in tal caso l'alternanza sussisterebbe per tutte le squadre (il "riposo" la romperebbe solo nel senso di far "saltare un turno"). Pertanto, la soluzione che sapevamo esser la migliore che potevamo sperare fosse realizzabile, lo è realmente, ed è data dallo schema indicato.

9. PERCHÉ SERVIRSI DI FORMULE?

I formalismi, i simbolismi, gli **algoritmi** (*cioè i modi di operare sui simboli secondo appropriate regole*), sono per gran parte la causa della diffusa avversione alla matematica. Ma non per colpa loro. Essi meritano di essere apprezzati in quanto utili accorgimenti per fissare stenograficamente idee matematiche, e vengono invece spesso presentati come fine a sé stessi. E sarebbe strano che uno potesse interessarsi al modo di scrivere note sul pentagramma senza fargli sapere che non sono solo scarabocchi ma rappresentano della *musica*.

Per apprezzare le formule e il tipo di calcoli che consentono non c'è che capire a cosa servono, convincersi che è utile o anche necessario *farne uso, comprendere in che modo conviene pensarne il significato, onde farle apparire un modo appena diverso di scrivere le stesse cose che già ci sono familiari. Ci limitiamo qui alle cose più elementari, ossia alla prima introduzione del "calcolo letterale" con qualche cenno introduttivo a conseguenze che potrebbero seguire subito; come "spirito", le stesse osservazioni sono appropriate quasi ovunque; cenni su argomenti più avanzati si troveranno nel n. 14.*

Scrivere una formula con segni letterali ha a volte ovvio significato di abbreviazione di un enunciato. Anziché dire: « L'area (A) di un triangolo è data dalla metà del prodotto della base (a) per l'altezza (h) », si può scrivere sinteticamente "Area $= \frac{1}{2} \cdot$ base $\times$ altezza », o, abbreviando ancora, $A = \frac{1}{2} a\, h$; è la stessa cosa ma (per poco che ci si abitui) in forma molto più leggibile. Forma poi che è pronta per il calcolo: se, in un caso specifico, la base è $a = 8$ cm e l'altezza $h = 5$ cm, la formula dà direttamente Area $= A = \frac{1}{2} \cdot 8$ cm 5 cm $= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5$ cm^2 $= 20$ cm^2. La formula esprime anzi già tale calcolo, se si pensa che le lettere a ed h altro non sono che un'indicazione provvisoria delle lunghezze 8 cm e 5 cm prima di conoscerle.

La stessa formula acquista poi un senso più profondo se si pensa che a ed h possono essere lunghezze qualunque: quelle relative a tutti i possibili triangoli; allora la formula dà A come *funzione* di a ed h, dice cioè come varia l'area facendo variare ad arbitrio a ed h. Per indicare che a ed h s'intendono, in questo senso, *variabili* (cioè: che c'interessa pensare di potervi dare, considerando diversi casi, diversi valori), si preferisce usare le lettere x, y (eventualmente z, t, ...); allora $A = \frac{1}{2} \cdot xy$, o, per maggior specificazione, $A(x,y) = \frac{1}{2} xy$ è l'area del triangolo come *funzione* della base x e dell'altezza y.

Sul concetto di funzione, e su altri connessi, torneremo nei prossimi nn. (10, 11 e 12).

Un'utilità più concreta, in termini di economia di calcoli, deriva poi dalla possibilità di svolgerli sulle stesse lettere. A questo riguardo sarebbero molto più convincenti esempi complessi; per brevità (e perché servirà ad altre considerazioni) limitiamoci a un esempio molto semplice (e si tenga conto che dà perciò una pallida idea). L'area di una cornice quadrata (un quadrato di lato a da cui si tolga un quadrato, interno, di lato b) è $A = a^2 - b^2$; sapendo (e altrimenti lo si verifichi!) che $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, possiamo anche scrivere $A = (a + b)(a - b)$, ciò che è in genere molto più rapido (1). Ad es., se $a = 58$ e $b = 54$ (cm), calcolando $a^2 - b^2$ si ha $58^2 - 54^2 = 3364 - 2916 = 448$ (2) mentre molto più semplicemente il risultato si ha da $(a + b)(a - b) = (58 + 54)(58 - 54) = 112 \times 4 = 448$.

Il rettangolo più grande.

Di più, un risultato generale anche semplicissimo, come quello ora usato, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, non solo con-

(1) Un prodotto è più lungo a calcolarsi che una somma (o differenza); perciò è meglio la formula che richiede due somme e un prodotto che non viceversa (due prodotti e una somma); confronti di questo genere sono importanti soprattutto per scegliere la via migliore nel programmare lavori per le calcolatrici elettroniche; v. n. 18); inoltre, nell'es. giova il fatto che $a - b$ spesso è piccolo.

(2) Sarebbe buona norma non sottintendere mai le unità di misura (qui, cm); se si omette di scriverle (come qui, per non appesantire) bisogna non dimenticare mai che, seppur sottintese, *esistono*. Tra l'altro, specie per grandezze di significato fisico, è utilissimo il controllo di *omogeneità:* se termini da sommare non sono omogenei (p. es. uno è in m^3/sec e l'altro in kg/m^2) c'è senz'altro un errore, e così se il risultato non è omogeneo con quello che doveva essere (p. es. risulta una lunghezza anziché una velocità, unità m anziché m/sec).

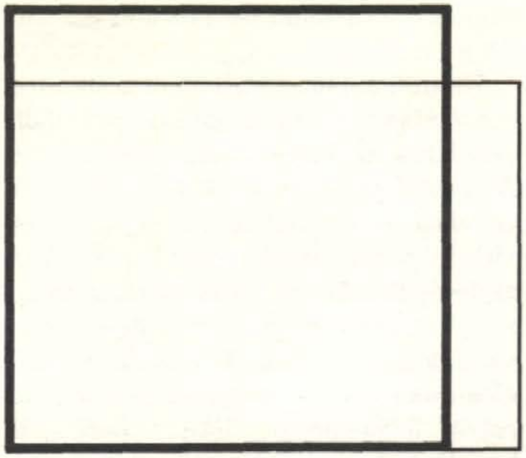


FIGURA 29.

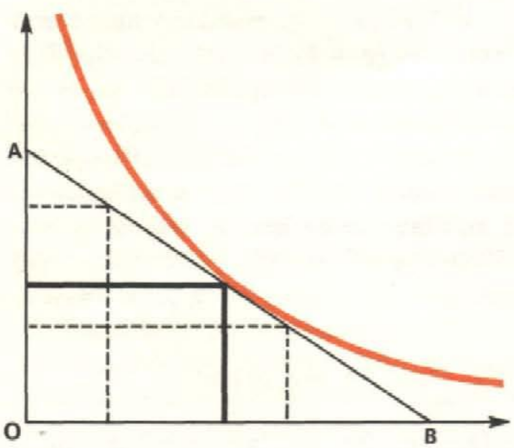


FIGURA 30.

densa tutte le infinite identità numeriche cui dà luogo se diamo ad a e b valori ad arbitrio, ma può aiutare a vedere conclusioni importanti. Detta formula mostra ad es. che *il quadrato è, fra i rettangoli di ugual perimetro, quello di area massima:* dal quadrato $a \times a$ si ottengono infatti rettangoli di ugual perimetro aumentando un lato e diminuendo l'altro di una stessa lunghezza b, ma $(a + b) \times$ $\times (a - b)$ vale a^2 diminuito di b^2, ossia è sempre minore di a^2.

La fig. 29 rende più chiara la cosa graficamente, ma le due forme non si escludono anzi si integrano: la formula infatti si deduce e si applica più direttamente, ma in compenso la figura ci preserva dal rischio di farlo macchinalmente senza assimilare il senso attraverso l'intuizione. Il che sarebbe come sfruttare la maggiore possibilità di viaggi offerta dall'automobile, non per vedere più cose e con più agio, bensì per attraversare paesi e paesi a gran velocità senza vedere nulla.

La stessa conclusione, in forma solo apparentemente diversa, si può esprimere dicendo (v. fig. 30) che, fra tutti i rettangoli con due lati sui cateti e un vertice sull'ipotenusa del triangolo rettangolo OAB, *ha area massima quello con vertice nel punto di mezzo,* C . *Se il triangolo* OAB *è isoscele (cioè: se è* OA = = OB), *detto rettangolo massimo è il quadrato e si ha esattamente il risultato già detto. Esso si estende nel modo enunciato osservando semplicemente che la conclusione non può mutare per un semplice cambiamento di scala (come quello consistente nell'alterare la scala verticale del disegno col fatto di prendere* OA *più piccolo — oppure più grande — di* OB).

È questo il risultato cui ci siamo riferiti (nel n. 7) *per dire che il massimo guadagno, nell'esempio ivi esaminato (smercio decrescente proporzionalmente al crescere del prezzo, ossia con andamento* lineare, *rettilineo*), *era quello corrispondente ad un guadagno unitario metà di quello massimo (dove smercio* = 0) *ed uno smercio metà di quello massimo (dove guadagno* = 0). *Il guadagno è infatti prodotto di due fattori corrispondenti a base ed altezza del rettangolo della fig. 30, con vertice obbligato ad una retta come* AB. *Vi torneremo nel n. 11.*

Quando l'alfabeto non basta.

Le lettere dell'alfabeto servono così bene che i matematici non sanno più come trovarne abbastanza per i loro bisogni illimitati. Conviene infatti, per agevolare la comprensione, seguire le consuetudini (ad es., come detto, usare di preferenza x *(e* y, z, ...) *per le variabili, oltre che riservare "pigreco" per* π=3,141592..., *(rapporto della circonferenza al diametro, ecc.);*

si ricorre all'alfabeto greco, talvolta ad altri; i caratteri tipografici consentono altre distinzioni (oltre a minuscolo e maiuscolo, corsivo o "grassetto" — cfr. nel n. 14, per "vettori" — od altri tipi). Ma non basta mai, ed occorre ricorrere ad altri espedienti. Uno dei principali, che è bene conoscere subito, consiste nell'usare una stessa lettera accompagnata da un indice *(un numero scritto in piccolo e in basso a destra). p. es.* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$, *ecc., o* $\mathrm{A}_3, \mathrm{w}_{12}, \mathrm{S}_2$, *e così via, ottenendo tanti nuovi segni (come se fossero nuove e diverse lettere). A loro volta gli indici saranno a volte indicati con lettere (p. es. scrivendo* x_h, $\mathrm{h} = 1, 2, 3$, *anziché* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ *per disteso, ciò che, in casi più complicati, è un'economia), o ve ne saranno più di uno, e magari in altre posizioni (anche al posto dell'esponente, con opportune avvertenze per non fare confusione) ecc. Ci limitiamo qui a un esempio.*

Abbiamo già notato (nel n. 2) la comodità di avere la formula $\frac{1}{2} n (n + 1)$ che, sostituendo ad n un numero qualsiasi, p. es. 12797, dà immediatamente la somma dei numeri da 1 a 12797. Per esprimere in modo analogo la stessa regola riferendosi a qualunque progressione aritmetica, conviene indicarne i successivi termini con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

La somma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ è allora $\frac{1}{2} n\ (a_1 + a_n)$; in particolare (è cosa abbastanza utile ad aver presente) *la somma dei primi n numeri dispari è* n^2. Infatti $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\,n - 1) = \frac{1}{2} n\,(1 + 2\,n - 1) = n^2$, in particolare $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, $16 + 9 = 25$, ecc.; d'altronde ciò scende anche dal fatto che

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2\,n + 1) \text{ (EP, 9).}$$

Il teorema di Pitagora.

La formula del quadrato del binomio (v. n. 3) — qui ora reincontrata (nel caso particolare di $(n + 1)^2$) — rappresentandola geometricamente in un modo diverso da quello visto ivi (*fig. 6*), permette poi subito di dimostrare il celebre *teorema di Pitagora* (v. *fig. 31*): la figura mostra un quadrato di lati $(a + b)$ diviso *in* 4 *triangoli rettangoli* (di cui a e b sono i lati minori, o *cateti*; il lato maggiore, o *ipotenusa*, lo indicheremo con c), *ed un quadrato di lato* c. Ogni triangolo ha area $= \frac{1}{2}\,a\,b$, e quindi insieme abbiamo $c^2 = (a + b)^2 - 4\,(\frac{1}{2}\,a\,b) = a^2 + b^2 + 2\,a\,b - 2\,a\,b = a^2 + b^2$. Ciò risulta intuitivo confrontando semplicemente le *figg. 6 e 31* disegnate con gli stessi a e b; tuttavia la facilità con cui la manipolazione di formule letterali porta a conclusioni generali e ad esprimerle con formule brevi ed espressive (come $c^2 = a^2 + b^2$) avrà dato un altro piccolo saggio dell'utilità dei simbolismi anche e soprattutto per chi vuole farne uso ma non farsene schiavo.

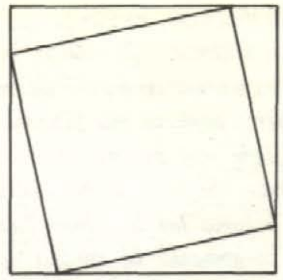


FIGURA 31.

Giova osservare che spesso un'espressione è valida per diverse interpretazioni: ad es. le lettere che vi figurano potrebbero rappresentare non numeri (*e* grandezze) *nel senso ordinario, ma qualunque altra cosa per cui un simbolismo riesca utile: p. es.* vettori (*cose — come le traslazioni* (*cfr. nn.* 13 *e* 14), *le forze, le velocità — rappresentabili con frecce*), operazioni (*p. es. geometriche, come rotazioni, simmetrie, ecc.*), insiemi (*o* classi, *p. es. di punti, come « i punti di questa pagina interni a un carattere a stampa », cioè contenuti nelle parti bianche interne ad una* a, b, d, e, g, o, p, q, A, B, D, O, P, Q, 4, 6, 8, 9, 0, &, %), proposizioni (*affermazioni logiche; nella* *teoria delle probabilità*, eventi), *ecc. A volte teorie diverse portano allo stesso algoritmo, hanno la stessa* **struttura**; *c'è allora il vantaggio di poter « cogliere più piccioni con una fava », studiando cioè più argomenti mediante un solo schema. Si può anche costruirsi*, in astratto, *lo schema per lo schema, senza studiare nessun argomento nè curarsi se ne esistano cui si applichi* (*atteggiamento talvolta utile, per riflettere momentaneamente su qualche solo aspetto formale, isolandolo, ma che rischia di diventar sterile se vi si insiste programmaticamente*).

10. COME FARE INFINITI PASSI IN UNO SOLO

Se si dà una dimostrazione in cui si parla di numeri o grandezze indicati genericamente con lettere (a, b, x, n, ...), è chiaro che essa dà, in sostanza, infinite conclusioni, pensando come tali tutti i singoli casi in cui alle lettere si diano dei valori particolari qualunque (che soddisfino le eventuali ipotesi premesse). Vediamo in particolare di riflettere su tale osservazione nel caso di affermazioni che riguardino un generico, ossia qualunque, numero intero (positivo) n.

Ecco un classico esempio: il Teorema secondo cui *Esistono infiniti numeri* **primi** (privi, cioè, di divisori), ossia, *Dato un numero qualunque* (e diciamolo n) *esistono numeri primi maggiori di esso* (cioè: si può trovare almeno un numero $p > n$, e primo). Consideriamo infatti il prodotto di tutti gli interi da 1 ad n (che si dice "fattoriale di n", e si suole indicare con $n!$) e aumentiamolo di 1; tale numero,

$$m = n! + 1 =$$
$$= (1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \dots\ .\ (n-1)\ .\ n) + 1,$$

si vede subito che, o è primo, o, se ha divisori (e quindi divisori primi), essi *sono tutti maggiori di* n (e quindi esiste almeno un $p > n$). Basta osservare che $n!$, per come è definito, è ovviamente divisibile per tutti i numeri $\leq n$, e perciò $n! + 1$ non lo è (ma dà sempre resto $= 1$).

Ma è utile soprattutto tener presente un procedimento di uso frequente e che può dare aiuto immediato anche in circostanze banali ma difficilmente rimediabili in altro modo (come ad es. se uno non ricorda esattamente una formula che gli serve). Si tratta del **ragionamento per induzione** (o per "induzione matematica completa") (1) che si può esprimere così: *Se si riesce a dimostrare che una certa proprietà* (dove c'entra un intero n),

a) *è vera per* $n = 1$;

b) *supposta vera per un certo* n *risulta vera anche per il successivo* $(n + 1)$;

allora essa è vera sempre (per tutti gli infiniti $n = 1, 2, 3, \dots$; infatti quel ragionamento non può mai arrestarsi).

La corda tagliata a pezzi.

Un esempio banalissimo: è ovvio che un segmento (o, materialmente, un pezzo di corda, o sbarra, ecc.) tagliandolo in n punti viene diviso in $n + 1$ parti; eppure è frequente (per disattenzione, o perché a chi non ha mai riflettuto sulla questione sembra ovvia) la risposta che con n tagli i pezzi sono n. Pensando al *principio d'induzione* si può subito assicurarsi, in caso di dubbio, che la risposta esatta è $n + 1$, semplicemente pensando che ciò è vero per $n = 1$ (con *un* taglio si ottengono *due* pezzi, ed è $2 = 1 + 1$); infatti, poiché ad ogni nuovo taglio si ha un pezzo in più, la risposta o è sempre n, o sempre $n + 1$ (o magari $n + 2$, $n - 1$, insomma n più o meno un numero fisso, e basta quindi verificare su un solo caso particolare quale esso sia). Anche in casi più complessi una semplice verifica sul caso più semplice (in genere $n = 1$) basta, sotto ipotesi analoghe, a dare sicurezza della risposta per il caso generale.

Per dimostrare che la somma dei numeri da 1 ad n è $\frac{1}{2} n (n + 1)$ basta verificare che ciò vale per $n = 1$ (infatti $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$), e che, se la formula vale per un n, e si aggiunge $(n + 1)$, si ottiene $\frac{1}{2} n (n + 1) + (n + 1) = (n + 1) [\frac{1}{2} n + 1] = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2)$, cosicché la stessa formula risulta valida anche per $n + 1$. Si dirà che era più semplice la dimostrazione diretta, ed è vero; abbiamo indicato anche quest'altra per confronto, e come assaggio per analoga applicazione a un caso simile dove invece fornisce la via più semplice.

La piramide a gradini.

È il caso della somma *dei quadrati* dei numeri da 1 ad n, la cui espressione è $1/3 \cdot n (n + 1/2) (n + 1)$ (2). Per dimostrarlo, constatiamo come sopra che, per $n = 1$, essa è valida (infatti $1/3 \cdot 1 \cdot (1 + 1/2) \cdot 2 = 1/3 \cdot 3/2 \cdot 2 = 1$), e che, se lo è per un certo n, e si aggiunge $(n + 1)^2$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
1/3 \cdot n (n + 1/2) (n + 1) + (n + 1)^2 &= \\
= (n + 1) [1/3 \cdot n (n + 1/2) + (n + 1)] &= \\
= 1/3 (n + 1) [n^2 + 1/2\, n + 3\, n + 3] &= \\
= 1/3 (n + 1) (n + 3/2) (n + 2)\,, &
\end{aligned}
$$

cosicché è valida ancora per $n + 1$.

L'interpretazione come volume di una "piramide a gradini" è indicata come esercizio (EP, 10).

Il ragionamento per induzione trova continua applicazione in problemi di ogni grado di elevatezza e difficoltà e in tutti i campi della matematica. Anche cercando di dare ancora degli esempi, atti a illustrare un po' tale varietà (per brevità e facilità senza entrare nella trattazione), essi non potranno che dare un'idea del tutto inadeguata della vastità e importanza delle applicazioni di tale ragionamento.

Piano e spazio tagliati a pezzi.

Due esempi geometrici, che estendono al piano e allo spazio il primo esempio sul taglio di una retta (o corda, ecc.). *In quante regioni viene diviso un piano tracciandovi comunque* 10 *rette?* (3). Sarebbe penoso stabilire direttamente la risposta per tale caso (e peggio per un numero maggiore, p. es. 100 o 7915); invece è facile giungervi per induzione stabilendo una formula valida per il caso di un qualunque numero n di rette. Si può vedere infatti che l'$(n + 1)$-esima retta crea $(n + 1)$ regioni in più, e che pertanto *n rette dànno luogo a* $1/2\, n (n + 1) + 1$ *regioni* (ad es., per $n = 10$, sono 56). Il problema è il medesimo che per la somma dei numeri da 1 ad n, ma nella soluzione c'è un 1 in più perché per $n = 1$ abbiamo 2 regioni anziché una (e rimane sempre un'unità in più). Lo stesso problema si può porre per i piani nello spazio: *n piani dividono lo spazio in* $1/6 (n^3 + 5\, n + 6)$ *regioni* (sono 2 per $n = 1$, e l'$(n + 1)$esimo piano ne crea $1/2 \cdot n (n + 1) + 1$ in più (perché inter-

---

(1) Non confondere col "ragionamento induttivo" che consiste semplicemente nel ritenere presumibilmente vero in generale ciò che è stato osservato su casi particolari.

(2) Ci limitiamo a indicare la formula e dimostrarla; per ricavarla occorrerebbero nozioni che non supponiamo note al lettore e che non si prestano a esser dette in breve. Accenniamo, come parziale informazione, che quelle nozioni permettono di affermare che la formula dev'essere del tipo $An^3 + Bn^2 + Cn + D$, dopo di che non è difficile trovare che $A = 1/3$, $B = 1/2$, $C = 1/6$, $D = 0$, cosicché la formula risulta $1/3\, n^3 + 1/2\, n^2 + 1/6\, n$ (identica a quella indicata). Controllare che A, B, C, D devono avere i valori indicati, sarà un utile esercizio.

(3) Non importa come le rette siano disposte, purché s'intersechino due a due e in punti distinti (escludendo cioè che una retta possa essere parallela a un'altra o passare per l'intersezione di due altre).

viene qui il risultato del caso precedente: un piano è intersecato dagli altri lungo sue rette!). Per $n = 10$ si conclude ad es. che 10 piani dividono lo spazio in 176 pezzi.

Chi vince a scacchi?

Ed ecco un'applicazione nel campo dei giochi: precisamente di quei giochi come gli scacchi, la dama, e giochetti vari (con oggetti da togliere da dati mucchi) sul tipo di quello detto "di Marienbad", nei quali due giocatori hanno alternativamente diritto a scegliere una mossa fra quelle ammissibili (e nulla è lasciato al caso o è segreto, a differenza dei giochi di carte, dove le carte vengono distribuite a sorte e ciascuno sa quali carte ha in mano ma non quelle degli altri). Nel caso di quei "giochetti" è noto che ad ogni istante la situazione è "determinata", nel senso che la vittoria è assicurata ad uno dei due, *qualunque cosa faccia l'altro, ammeno ché non sia lui stesso a passarla all'altro commettendo un errore.*

Nel caso degli scacchi tutti avranno visto (indipendentemente dal fatto che conoscano quel gioco) dei "problemi" in rubriche di riviste, dove, indicata una situazione di pezzi sulla scacchiera, si invita a trovare il modo in cui, come viene asserito, « il bianco muove e vince in (p. es.) 3 mosse ». Ciò mostra che, almeno nel "finale" di partita, la situazione è "determinata" come nel caso di "Marienbad". Ebbene: il ragionamento per induzione permette di dimostrare che così è sempre, fin dall'inizio del gioco. Per semplicità supponiamo che, con qualche convenzione, sia escluso il risultato pari o il prolungamento del gioco oltre un certo numero massimo di mosse. Allora il gioco è certamente "determinato" all'ultima mossa: ma allora lo è già anche alla penultima perché, fra le mosse che uno può fare, o ce n'è almeno una che lo porta in una delle situazioni "determinate" a suo favore e allora la situazione presente lo è pure; altrimenti viceversa. E così, di passo in passo, risalendo dalla fine verso l'inizio, la conclusione si trasporta invariata. Qualunque situazione della scacchiera, di per sé, darebbe quindi luogo a un problema del tipo « il bianco muove e vince in 143 mosse » o « può impedire al nero di vincere in meno di 219 mosse » (ecc., in pratica anche con risultato pari); la differenza tra questo caso e quello dei "problemi" usuali è solo che qui, per esplorare tutti i possibili sviluppi futuri del gioco e poter trarre la conclusione, occorrerebbero tempo e lavoro immensi, impossibili anche con macchine elettroniche.

Il gioco degli scacchi è quindi un gioco che persone infinitamente intelligenti (capaci cioè di vedere fino in fondo tutte le possibili conseguenze di una qualunque strategia contrapposta a qualsivoglia strategia dell'avversario), troverebbero privo d'interesse perché deciso in partenza. Se è interessante è perché **l'intelligenza dei buoni giocatori è grande ma non** *così* **assoluta** *da impedire che entrambi, essendo a turno "vincitori designati" senza saperlo, si regalino a vicenda di tanto in tanto la vittoria commettendo uno sbaglio;* **vincitore è colui che sbaglia per penultimo!**

11. COME SFRUTTARE UNA VISIONE DINAMICA

La visione dinamica permette, per così dire, di "ultravedere"! Niente paura per questo parolone,"ultravedere!", *introdotto qui a titolo un po' scherzoso: si tratta, sì, di cosa importante e seria, ma — anche se in certo senso si collega a qualche concetto teorico — rimane sempre e soltanto un aspetto della solita esigenza, di saper vedere in forma intuitiva appropriata.*

Si tratta, in fondo, di un concetto economico *(se non si ha paura dei preconcetti contro tale termine): economico nel senso del massimo rendimento in termini di efficacia del pensiero, di massimo risultato col minimo sforzo. Non* *secondo la mentalità ispirata alla pigrizia e che risulta quasi sempre miope e sbagliata, ma secondo quella di chi è sospinto dall'anelito a conoscere ed agire e tanto più prende slancio e fiducia man mano che riesce, progredendo, a dominare con maggior facilità e immediatezza panorami più vasti e più nitidi.*

Il punto che dobbiamo ora imprimerci bene in testa è proprio che, anche e forse più che mai nella matematica, il modo più semplice e appropriato per rispondere a un problema particolare consiste nel risolvere un problema molto (o moltissimo) più generale. E come esempio possiamo citare quello già significativo del precedente n. 10, dove, anziché contare in quanti pezzi un piano è diviso da 10 rette (o lo spazio da 10 piani) conveniva risolvere il problema per il caso di *un numero qualunque*, n, di rette (o piani), e quindi fare il calcoletto per il caso particolare di $n = 10$.

L'aspetto più saliente e istruttivo consiste però non tanto nella maggiore generalità in e per sé, quanto piuttosto nel fatto che essa si consegue vedendo il problema sotto una forma che si può dire **dinamica** (quale cercano di dare anche dei semplici ausili didattici, come figure deformabili) (EP, 11).

Si trattava infatti di sostituire, alla visione **statica** del problema che ci mostra il piano con sopra tracciate 10 rette che lo suddividono, la visione **dinamica** del **processo** consistente nel tracciare su di un piano una prima retta che lo divide in 2 semipiani, e poi una seconda che lo divide in 4 regioni angolari, e poi una terza (7 pezzi: un triangolo e le 6 parti in cui il resto del piano è diviso dai prolungamenti dei lati), e..., e poi vedendo che è impossibile seguire tutti i diversi modi in cui ulteriori rette possono dar luogo a pezzi di varia forma, ma sincerandosi che ciò sarebbe anche inutile dato che il numero di ulteriori suddivisioni non dipende da ciò, ci si accorgerà che è possibile esaminare semplicemente il processo secondo cui cresce il numero dei pezzi. In fondo si tratta ancora del "saper fare un passo per volta", ma la visione dinamica, di un **processo** in cui la visione del problema particolare s'inserisce, è quell'elemento in più che caratterizza il passaggio decisivo: il passaggio a quella che, per intenderci, diciamo "ultravisione".

Parliamo di "funzioni"!

Questa ultravisione, o visione dinamica, consiste, in termini tecnici, nel pensare in termine di **funzioni**, con particolare utilità nel pensare a funzioni *del tempo* (p. es., nel caso precedente, pensando che le rette vengono tracciate in istanti successivi), e nel visualizzarne l'andamento mediante il *diagramma* nella forma più espressiva (diagramma cartesiano, in cui — partendo da un punto O, o *origine* — si indicano sull'asse orizzontale i valori di x, o *ascisse*, e sull'asse verticale quelli di y, o *ordinate*).

Nel precedente esempio il numero di pezzi, $p_n = \frac{1}{2} n (n + 1) + 1$, era una funzione del numero (*intero*) delle rette divisorie. Il caso cui più ancora intendiamo riferirci è però quello di una funzione, $y = f(x)$, in cui la variabile x può assumere ogni valore reale (salvo eventuali limitazioni imposte caso per caso), ed essere (o essere interpretata come) il *tempo*, o una *lunghezza*, o una *temperatura*, o un *prezzo*, o altra grandezza di qualsivoglia specie. Altrettanto dicasi per la y. Si veda nella *fig. 32* un diagramma che

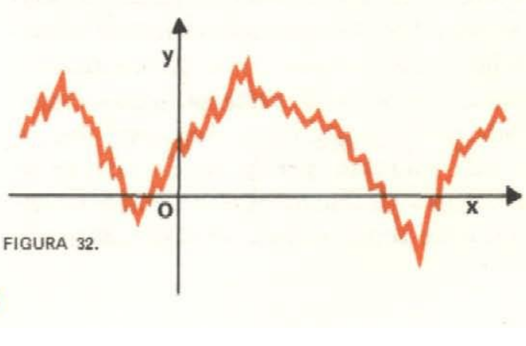


FIGURA 32.

può rappresentare l'andamento della temperatura y in funzione del tempo x (p. es., oscillazioni diurne, o oscillazione annua delle temperature medie).

Anche nel caso *discreto* (variabile n intera o simili) si poteva usare la notazione $p_n = f(n)$ (o $p(n)$): il concetto di *funzione* è del tutto generale e non fa distinzione circa la natura delle variabili (potrebbero ad es. — come vedremo in esempi dei nn. 13 e 14 — essere punti). È solo per comodità e consuetudine che, quand'è intera, la variabile si indica di preferenza come *indice* (*in basso*), p_n anziché $p(n)$ (come notato nel n. 9 con l'esempio della progressione a_n).

Si possono poi considerare anche funzioni di due (o più) variabili; abbiamo già scritto l'area del triangolo in funzione di x = base e y = altezza, come $A(x, y) = \frac{1}{2}xy$ (n. 9), ma qui parleremo esplicitamente solo del caso più semplice (funzioni di una variabile).

Ancora sul "massimo guadagno".

Riprendiamo l'esempio relativo al massimo guadagno (di cui al n. 7 e poi al n. 9) e vediamo di esprimerlo nel nuovo modo; in questo caso sarebbe anzi più giusto dire semplicemente "nel nuovo linguaggio" perché nulla va sostanzialmente mutato a quanto illustrato dalla *fig. 30* e spiegazioni relative. Faremo un utile esercizio di trascrizione, che darà luogo poi a qualche osservazione e a dei complementi.

La grandezza che pensiamo di poter fissare a nostro arbitrio è il prezzo, ossia (dato che nel problema interessa solo questo) l'eccedenza del prezzo sul costo (che è fisso, e che non consideriamo), ossia il guadagno unitario. Perciò indichiamo tale guadagno unitario con x, segno consueto per la variabile che si considera "indipendente" (e conviene seguire le consuetudini, che rendono più facile intendersi, pur sapendo che sono di per sé irrilevanti). La quantità venduta si indicherà con y; poiché abbiamo supposto che aumentando x la y decresce in misura proporzionale, detti x_0 e y_0 i valori di partenza e $-a$ la diminuzione di y per un aumento unitario di x, risulterà

$$y = y_0 + a(x - x_0) = ax + b$$
$$(\text{con } b = y_0 - a x_0).$$

I dati erano: $x_0 = 2000$ (Lire), $y_0 = 300$ (unità di prodotto), $-a =$ (1 unità di prodotto)/(5 Lire) $= 1/5$ (unità/Lire); pertanto (1)

$$y = 300 - (x - 2000)/5 = 700 - x/5 =$$
$$= 700 - 0{,}2\,x = 0{,}2\,(3500 - x)\,.$$

Per $x = 0$ risulta $y = 700$; risulta $y = 0$ per $x = 700 \cdot 5 = 3500$; ciò è conforme ai calcoli diretti (del n. 7). Ed è utile rendersi conto che i calcoli sono, naturalmente, gli stessi, in forma più comoda se uno è allenato.

Era ovvio fin dalla prima diretta interpretazione geometrica che il diagramma era una **retta**; possiamo notare ora che ciò avviene sempre (e soltanto) quando la funzione è **lineare**, ossia del tipo $y = f(x) = ax + b$. Infatti una funzione **lineare omogenea** (cioè **proporzionale** alla x), $y = ax$, rappresenta una retta passante per il punto $x = 0$, $y = 0$ (*origine* degli assi; asse x orizzontale e asse y verticale); aggiungendo una *co-*

(1) Rammentiamo come si dovrebbe sempre, a rigore, indicare le unità di misura (cfr. nota 2 a pag. 25). Qui si vede come eseguendo effettivamente ogni operazione *anche sulle unità di misura* si ottenga automaticamente il risultato *completo*, come grandezza (in questo caso in "*unità/Lire*"; in altri (cm) × (cm) = (cm²), o (cm)/(sec) = (cm/sec), ecc.) e non solo come puro *numero* di cui non si sa cosa significhi se non si rimedia con un esame a parte all'incompletezza dello svolgimento. Purtroppo i matematici — per i quali effettivamente non interessa se delle lunghezze (ad es. 3, 4, 5: lati di un triangolo) siano cm o km o anni-luce — trascurano in genere di sottolineare anche l'essenziale importanza *concettuale* della questione.

stante, b, non si fa che alzare la retta parallelamente; in particolare $y = b$ (diagramma della funzione costante, "funzione" per modo di dire, ma che va considerata al pari di qualunque altra) è una retta orizzontale.

Coniche dovunque!

La ricerca del massimo (oltre che con la considerazione precedente, del rettangolo xy) si può vedere anche come ricerca del massimo della funzione xy che dà il guadagno totale:

$$\begin{aligned} xy &= xf(x) = x\,(700 - x/5) = \\ &= x\,(3500 - x)/5 = -\,x^2/5 + 700\,x = \\ &= 1/5\,[1750^2 - (x - 1750)^2]\,. \end{aligned}$$

Il diagramma di tale funzione è una **parabola** (ad asse verticale), come lo è per ogni funzione che sia un "**polinomio di 2º grado**" (cioè un'espressione della forma $a\,x^2 + b\,x + c$, con a, b, c costanti); ciò risulta dalla penultima forma; la terzultima mostra che la funzione si annulla (ossia, ha due **zeri**, o **radici**) in $x = 0$ e $x = 3500$, il che (per la simmetria) dice già che l'asse di simmetria, e quindi il vertice (il massimo, o in altri casi minimo) si ha per

$$x = (0 + 3500)/2 = 1750\;;$$

l'ultima espressione lo conferma e dà anche il valore del massimo, $1750^2/5$ (assunto quando $x = 1750$, e **cade il termine quadrato**).

Questa digressione, come altre su molti possibili modi di interpretare geometricamente il medesimo problema, è utile (benché non necessaria) per farlo vedere sotto visuali diverse. Ma serviva soprattutto per farci incontrare la **parabola** (che, con l'**ellisse** e l'**iperbole**, già viste, completa l'elenco delle **coniche**, ossia curve ottenibili come **sezioni piane di un cono rotondo**; cfr. *fig. 33*) (EP, 12).

La parabola ad asse verticale rappresenta molti fenomeni importanti (p. es. caduta di un grave); le "equazioni di 2º grado" (argomento che si studia al liceo) consistono nel trovare i punti (due, uno o nessuno; cfr. *fig. 34*) in cui una parabola taglia l'asse x (*zeri*, o *radici*), e *le diverse forme scritte per il nostro esempio basterebbero già* (*se non fosse fuori luogo insistere su ciò*) *a indicare come si trova e cosa significa la formula risolutiva* (EP, 13, 14).

Anche l'iperbole merita di essere menzionata come diagramma di una fun-

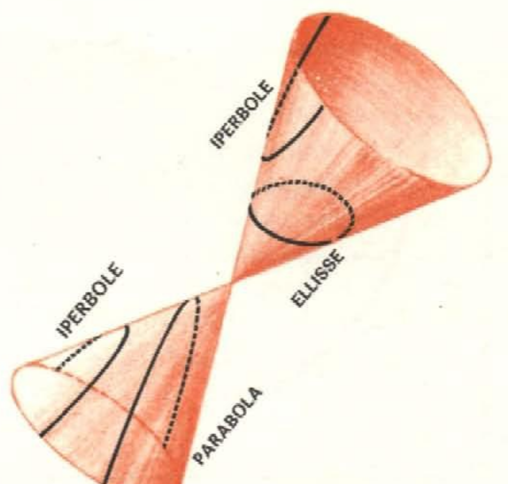
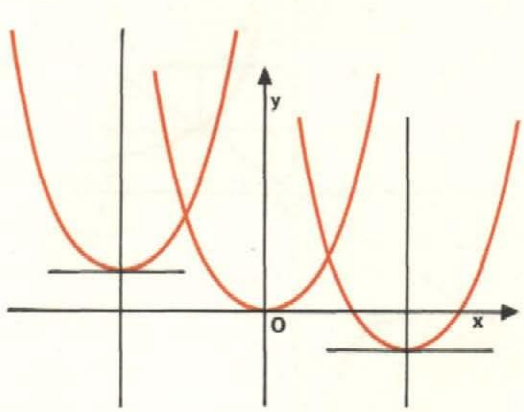


FIGURA 33.

FIGURA 34.



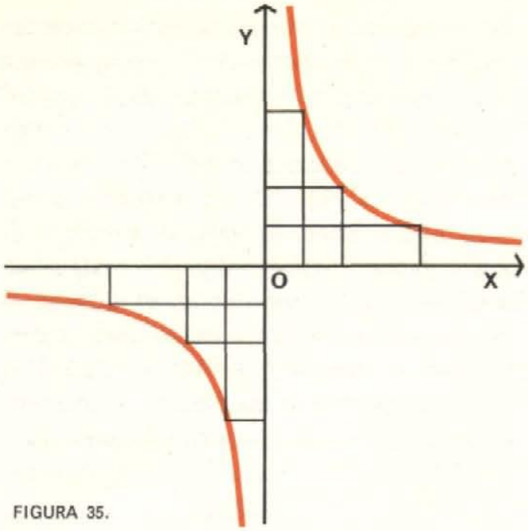


FIGURA 35.

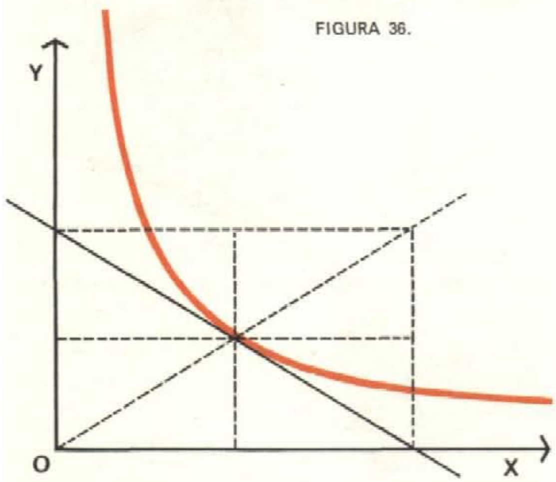
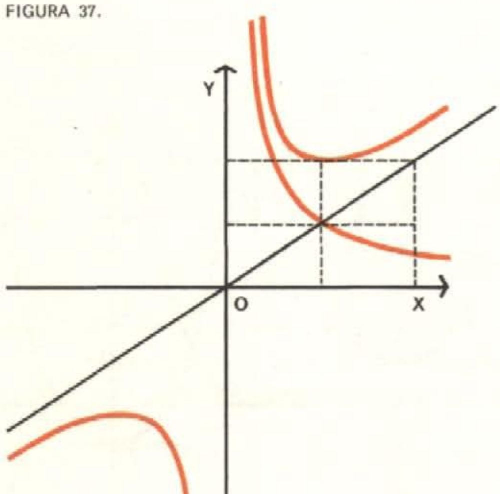


FIGURA 36.

FIGURA 37.



zione semplice e importante: $y = f(x) = 1/x$ (nella posizione indicata nella *fig. 35*); tutti i rettangoli di area $xy = 1$ appoggiati agli assi con un vertice in O hanno il vertice opposto su tale iperbole (fatto che la prof. Castelnuovo fa opportunamente apparire sperimentalmente collocando in tal modo molti rettangoli di area uguale e forma diversa ritagliati dai singoli alunni). Secondo il modo di dire più comune, è questo il diagramma di *una grandezza che varia in modo* **inversamente proporzionale** *ad un'altra* (p. es. il volume di un gas al variare della pressione, l'intensità di una corrente elettrica al variare della resistenza, ecc.); nel caso di *proporzionalità diretta* (come detto poco sopra, di sfuggita) il diagramma è, naturalmente, una retta passante per l'origine O.

Alcune osservazioni. Confrontando quanto detto per i rettangoli con vertice su una retta (esempio sul massimo guadagno) e sull'iperbole (qui), risulta (provarcisi per esercizio!) (EP, 15) *che, in ogni suo punto* (x, y), *l'iperbole* $y = 1/x$ *è tangente alla retta che taglia gli assi nel punto di ascissa doppia* ($2x$ *sull'asse* x) *e ordinata doppia* ($2y$ *sull'asse* y), *come mostra la fig. 36; la pendenza della tangente è pertanto la stessa della congiungente del punto dato con l'origine O (con segno invertito). La stessa proprietà vale per qualunque curva nel punto dove* xy *è massimo (e perciò per la validità della conclusione sul "massimo guadagno" bastava che la retta fosse non il diagramma ma la tangente)* (EP, 16).

Anche per le scorte di magazzino.

In qualche applicazione interessante si presenta una combinazione di questi due casi: ad es., al variare del livello medio delle scorte (di merce in magazzino, alto o basso a seconda che si fanno grossi acquisti per periodi lunghi oppure acquisti piccoli in istanti ravvicinati), alcuni fattori di costo crescono in proporzione diretta ed altri in proporzione inversa a tale livello. Il diagramma del costo complessivo (del tipo $y = ax + c/x$) è ancora un'iperbole, ma nella posizione indicata in *fig. 37* (curva in alto).

E la proprietà detta sopra permette di concludere qui che il costo minimo si ha nel punto in cui le due componenti del costo sono uguali (nella *fig. 34*, $ax = \overline{QR} = \overline{RP} = c/x$); quindi $ax = c/x$, $ax^2 = c$, $x^2 = c/a$, $x = \sqrt{c/a}$ (ed è questa formula che indica la soluzione ottima per il problema accennato; non rimarrebbe che ad esaminare il significato delle costanti) (1).

È chiaro, pur non potendo moltiplicare le esemplificazioni, che considerazioni del genere si possono fare su funzioni espresse da formule comunque complicate, rispondenti ai più svariati problemi. Ma è bene avvertire che *il concetto di funzione è del tutto generale:* ogni diagramma (come quello della temperatura, in *fig. 32*), o scarabocchio tracciato a mano, o dato da una regola anche tanto irregolare da non poterlo neppur disegnare, dà luogo a una *funzione*: basta che ad ogni valore di x (o almeno per tutti quelli ove interessa) risulti comunque associato un corrispondente valore $f(x)$.

Insomma: **nessuna proprietà di "regolarità"** in un qualsiasi senso **è richiesta per poter parlare di funzione**; naturalmente proprietà del genere interessano per distinguere diversi casi (p. es. funzioni *continue*, *analitiche*, ecc., nozioni su cui non è il caso qui di soffermarsi).

(1) Per dettagli qui fuori luogo cfr. p. es. (NB, 6, p. 220). Ecco un nuovo esempio di ottimizzazione economica (secondo i cenni del n. 7): l'ottimo si ha infatti, anche qui, nel punto dove si uguagliano le variazioni *marginali* (un piccolo spostamento farebbe aumentare uno degli elementi del costo di quanto fa diminuire l'altro: pendenze uguali ed opposte).

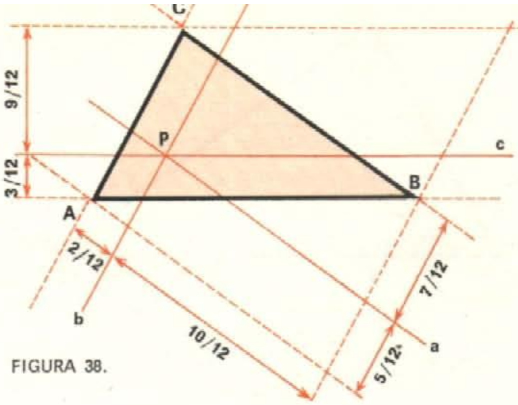


FIGURA 38.

12. COME SFRUTTARE UNA VISIONE GLOBALE

C'è un problema molto modesto — lo ricordate? — che è rimasto in sospeso fin dal n. 5: è quello illustrato dalla *fig. 11*, ed anzi soltanto dal triangolo formato dei tre triangolini I, II e III. In sostanza, si tratta semplicemente di questo: *dato un triangolo, dividerlo in tre triangoli di area assegnata mediante segmenti uscenti dai tre vertici e concorrenti in un punto* (*interno*) P. Supponiamo ad es., riferendoci alla *fig. 38*, che, assumendo area $(ABC) = 1$, si voglia determinare P in modo che area $(ABP) = 3/12$, area $(BCP) = 7/12$, area $(CAP) = 2/12$. La prima condizione richiede che l'altezza di ABP sia $3/12$ ($= 1/4$) di quella di ABC (essendo le basi identiche), ossia che P si trovi sulla retta c; analogamente le altre condizioni impongono a P di trovarsi sulla retta a e sulla b, ed esso è per tal modo completamente determinato (EP, 17).

Parliamo di "luoghi"!

Cosa c'è mai di straordinario in così banale ragionamento? C'è che il concetto visto e ribadito di « affrontare le questioni una per volta » qui va inteso e applicato in un modo più sofisticato. Mentre nelle figg. 9 e 10 si poteva costruire un triangolo dopo l'altro (*risol-*

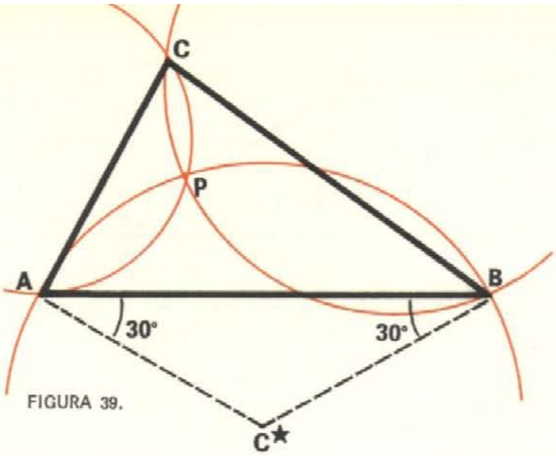


FIGURA 39.

vendo cioè una successione di problemi, in ciascuno usando una sola delle condizioni), *qui i tre triangoli si ottengono* simultaneamente *trovando* P, *per il che si devono usare* simultaneamente *tutte le condizioni. Ogni condizione però, se non basta a dare P, dice però qualcosa riguardo a* P: dice che deve trovarsi su una certa retta (*la* c, *ecc.*). *Questa retta* (*o in altri problemi una curva, una superficie, un qualunque insieme di punti*) *si dice* **il luogo** *dei punti soddisfacenti a quella condizione. Date più condizioni*, il luogo dei punti che le soddisfano tutte è l'**intersezione** dei luoghi relativi a ogni singola condizione.

Volendo parlare di *equazioni*, si direbbe qui che abbiamo a che fare con un *sistema di equazioni* che richiedono di essere risolte *simultaneamente* (anziché separatamente, una dopo l'altra, come nei casi più semplici incontrati in precedenza).

Le strade, con traffico diverso.

Ecco un altro esempio un po' meno banale (di nuovo un problema già visto: strada più breve collegante A, B, C; cfr. n. 7). Per le ragioni ivi spiegate, si tratta come sopra di trovare entro ABC un punto P, però con le condizioni che da esso si veda ogni lato (AB, CB, CA) sotto uno stesso angolo (120°) (v. *fig. 39*). Perché l'angolo APB sia di 120° occorre (1) che P si trovi sull'arco c di circonferenza da A a B col centro in C^* (tale che ABC^* abbia in A e B angoli di 30° (e di 120° in C^*). Così per gli altri due lati. E pertanto P è il punto comune ai tre archi di cerchio.

La stessa costruzione vale per la generalizzazione del problema (già preannunciata nel n. 5), in cui si dia un diverso "peso" alla lunghezza dei tre tronchi. Può darsi ad es. (se si tratta del punto ove costruire una scuola) che le località A, B, C abbiano un diverso numero di scolari, per cui la somma delle distanze da percorrere sia $a\,\overline{AP} + b\,\overline{BP} + c\,\overline{CP}$ (a, b, c numero, o percentuale, degli scolari di A, B, C). Se invece si tratta di render minimo il costo del traffico fra le tre località, sapendo che le intensità del traffico sono r tra A e B, s tra B e C, e t tra C ed A, dovremo ricavare le intensità sui tre tronchi (da P ad A, a B, a C) sommando: $a = r + t$, $b = r + s$, $c = s + t$) (2). In entrambi i casi si dovrà costruire (cfr. *fig. 40*) il triangolo di lati a, b, c per trovare quali angoli α, β, γ devono formare tra loro tre forze di intensità a, b, c per potersi fare equilibrio. Poi la costruzione è la stessa di *fig. 38*, salvo che gli archi che sottendono i tre lati a, b, c sono i luoghi dei punti P da cui a è visto sotto un angolo α, ecc., anziché $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

Si sarà notato che per determinare P *bastano* due *circonferenze* (*e nel caso precedente* due *rette*). *E infatti, in tutti e due i casi, delle tre condizioni ciascuna era conseguenza delle altre due* (*se due dei triangoli hanno l'area dovuta, così è del terzo; se due degli angoli sono di 120°, così è del terzo; e, in generale, se due sono* α *e* β, *il terzo è* $\gamma = 360° - \alpha - \beta$). *In genere, per determinare un punto, nel* piano *bastano* due linee (*nello* spazio, tre superfici) (EP, 20).

Non è detto però che si determini così necessariamente un punto e uno solo: potremmo trovarne più di uno (*problemi con più soluzioni*) *o nessuno* (*problemi senza soluzioni*). *Nell'es. di fig. 38 si ha sempre una soluzione* (*unica*); *in quello di fig. 39* (*come già detto nel n. 5*) *non c'è soluzione se ABC ha un angolo di almeno 120°* (*allora la soluzione del problema della strada è diversa*). *Sorvoliamo su altri cenni che porterebbero troppo lontano; notiamo solo ancora che talvolta la soluzione che si trova* (*o le soluzioni, o alcune di esse*) *vanno scartate* (3).

È sempre istruttivo vedere un problema nella sua globalità, raffigurandosi i luoghi dei punti dove questa o quella delle diverse condizioni è soddisfatta, e rendersi conto di come questa formulazione sia del tutto generale (*non legata al fatto che detti "luoghi" siano rette o cerchi o altre curve notevoli*). *Se ad es. si volessero trovare i punti a distanza di esattamente 1 km tanto dal continente che da un'isola* (*nel braccio di mare che le divide, supposto non più largo di 2 km nel punto più stretto*), *converrebbe pensare alle linee di ugual distanza dalla costa* (*quali spesso vediamo disegnate sulle carte geografiche per farne meglio risaltare l'andamento*); *in fig. 41 sono indicate quelle di distanza 1 km, che sono i luoghi di cui interessano le intersezioni* (*in fig. 41, i punti* A, B, C, D).

(1) Il perché risiede in un teorema secondo cui l'angolo APB è costante se P è su un arco di cerchio di estremi in A e B (in forza del fatto che "l'angolo al centro è doppio di quello alla periferia") (EP, 18, 19).

(2) Anziché a, b, c (che tengono conto solo del costo del traffico) si dovrebbe in genere considerare $a' = a + k$, $b' = b + k$, $c' = c + k$ per tener conto anche del costo di costruzione.

(3) Nel problema delle scorte (n. 11, *fig. 35*) si era trovata la soluzione $x = \sqrt{c/a}$; da $x^2 = c/a$ avremmo potuto però ricavare due soluzioni, $x = \pm\sqrt{c/a}$, e, se non avessimo tacitamente tenuto conto che il problema ha senso soltanto per x non negative, avremmo dovuto poi sopprimere la radice negativa rilevando esplicitamente che non risponde al problema. Quella radice non è però priva di significato nella rappresentazione geometrica: se, nella *fig. 34*, avessimo tracciato anche il secondo ramo dell'iperbole (simmetrico rispetto ad O), essa ce ne avrebbe indicato il punto di *massimo*).
Si noti: questa curva ha soltanto un massimo ed un minimo, ed **il minimo è maggiore del massimo** (costituisce anzi l'esempio classico di tale apparente anomalia: apparente perché si tratta di massimi e minimi *relativi*, o *locali*, non *assoluti*, cioè con riferimento a tutto il campo.

Costruire il triangolo che ...

Per le poche ulteriori osservazioni basterà limitarci a qualche problema di costruzione di un triangolo data la base (segmento AB) e condizioni che determinano il terzo vertice P; indicheremo al solito i lati con $a = \overline{BP}$, $b = \overline{AP}$, $c = \overline{AB}$ (dove c è supposto dato). Supponiamo ora che siano date la somma e la differenza dei due lati incogniti: $a + b = s$, $a - b = d$; il luogo dei punti soddisfacenti la prima condizione (o equazione) sappiamo che è un'*ellisse*, e per la seconda è un'*iperbole*, sempre di

FIGURA 40.

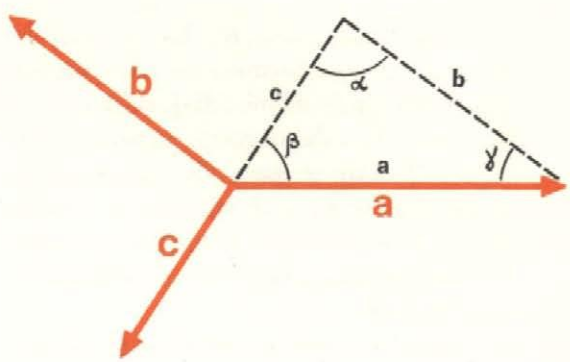
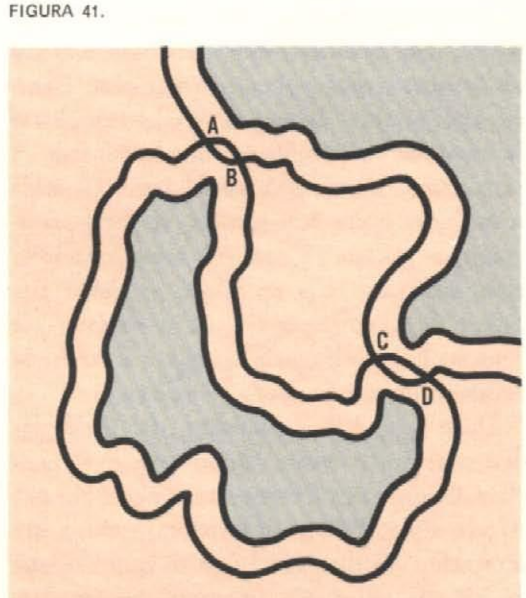


FIGURA 41.



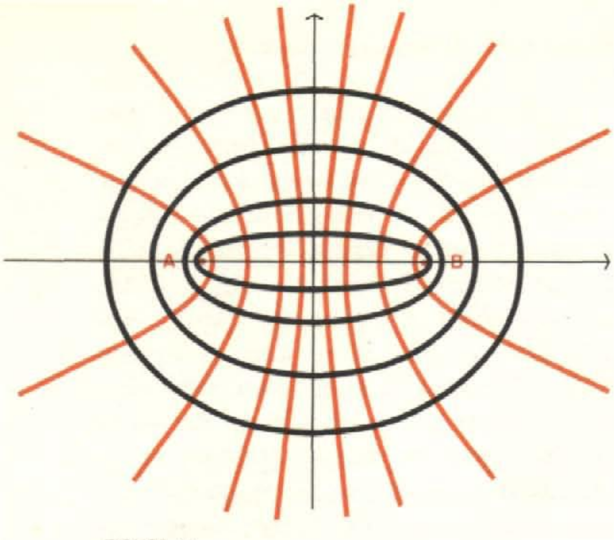


FIGURA 42.

fuochi nei punti A e B. La *fig. 42*, che mostra una rete formata di parecchie di tali ellissi ed iperboli (di fuochi in A e B), permette di rendersi conto visivamente di come si sposta il punto P (ossia di come si altera il triangolo) modificando, nel problema, il valore assegnato per la somma s, o per la differenza d, od entrambi.

La considerazione di questi luoghi (ellisse ed iperbole) corrisponde alla considerazione delle due equazioni, $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{s}$ *e* $\mathrm{a} - \mathrm{b} = \mathrm{d}$, *così come sono date. È chiaro però che da esse si può ricavare senz'altro* $\mathrm{a} = \frac{1}{2}(\mathrm{s} + \mathrm{d})$ *e* $\mathrm{b} = \frac{1}{2}(\mathrm{s} - \mathrm{d})$, *cosicché ci si riconduce al problema elementarissimo di costruzione del triangolo dati i lati. Ciò valga a indicare, molto poveramente, un fatto essenziale per trattare di casi più complessi: come cioè, lavorando sulle equazioni, si debba cercare e si possa spesso riuscire a renderne più semplice la formulazione e magari a risolverlo matematicamente in modo formale.*

Dare $a = \overline{BP}$ = distanza da B, significa assegnare come luogo per P il cerchio di centro in B e raggio a (e così per b); dando a e b, P viene determinato come intersezione di due cerchi (e di intersezioni ve n'è *due*, P' e P'', simmetriche rispetto ad AB, se $a + b > c > |a - b|$ (1), *nessuna* se una delle due disuguaglianze s'inverte, *una sola*, sulla retta per AB, se in una vale il segno "=", chè allora il triangolo degenera in segmento). Ecco un ovvio esempio di problema che può ammettere una o più soluzioni o nessuna (secondo la scelta dei dati: qui a, b, c).

Si noti che quanto ora detto vale sottintendendo di operare *nel piano*; nello spazio i due luoghi sarebbero non più i cerchi, bensì le *sfere*, di centro B e raggio a e di centro A e raggio b (e il luogo dei P soddisfacenti entrambe le condizioni sarebbe il cerchio loro intersezione: quello che verrebbe descritto da P' (e P''; beninteso, sempreché essi esistano) facendo ruotare il triangolo ABP' attorno alla base AB, o, se si preferisce, tutto il piano attorno alla retta AB) (EP, 21).

L'ultimo esempio, benché meno ovvio e quindi più significativo, risulterà, dopo semplici considerazioni, altrettanto facile. Quale sarà il luogo di P quando sia assegnata la lunghezza m della *mediana* di ABP uscente dal vertice B (ossia, dato $\overline{BM} = m$, con M punto medio del segmento AP)? Evidentemente (v. *fig. 43*) il luogo di M è il cerchio di centro in B e raggio m; poiché P è sul prolungamento di AM a distanza doppia da A, il luogo di P sarà un cerchio di raggio e distanza da A raddoppiate (raggio $2m$, centro in B' sul prolungamento di AB con $\overline{BB'} = \overline{AB}$). Risulta così la costruzione per il caso in cui, oltre alla base AB, sia data tale mediana e un altro elemento (lato, angolo, ecc., oppure l'altra mediana per A, od anche quella per P, che è semplicemente la distanza di P dal punto medio di AB). (Cfr., EP, 11).

(1) Con le sbarrette verticali si indica il *valore assoluto* del numero racchiusovi, cioè il numero stesso se è già positivo ed il numero cambiato di segno (reso positivo) se è negativo:
$|x| = x$ se $x \geqslant 0$, $|x| = -x$ se $x \leqslant 0$.

13. COME SFRUTTARE UNA VISIONE DEFORMABILE

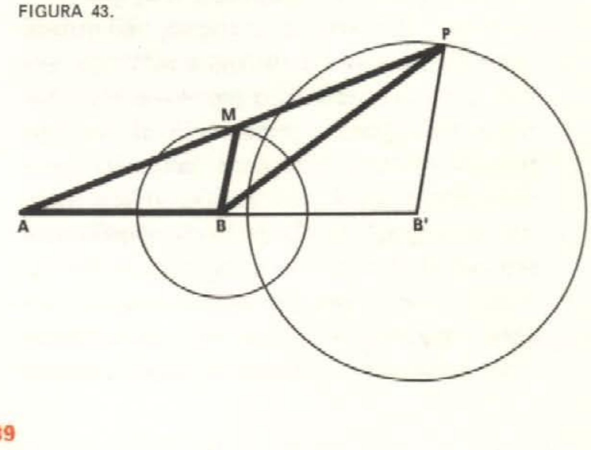
L'ultimo problema (quello riguardante la mediana, v. *fig. 43*) ci dà un semplice esempio di trasformazione (di una figura, o, se si preferisce pensare così, di tutto il piano; e lo stesso si può pensare nello spazio). Il cerchio grande si può pensare ottenuto ingrandendo del doppio il cerchio piccolo, mediante un pantografo fissato in A: in tal modo infatti un punto qualunque viene trasportato nel punto sulla stessa semiretta uscente da A, ma a distanza doppia. Oppure si può pensare che tutto il piano si dilati raddoppiandosi in lunghezza in ogni direzione, restando fisso A: il risultato è lo stesso. Comunque si preferisca immaginarla, tale trasformazione si chiama **omotetia** di centro A; il *coefficiente* nell'esempio è $p = 2$, ma potrebb'essere un numero qualunque: se è maggiore di 1 si ha un ingrandimento, se è minore di 1 (ma positivo) si ha un impicciolimento, se è $= 1$ non si cambia nulla (e si dice che la trasformazione è l'**identità**); se è negativo, per $p = -1$ si ha la **simmetria rispetto ad A,** se è (in valore assoluto) minore o maggiore di 1 si ha inoltre impicciolimento o ingrandimento (precisamente: con $-p$ si ha lo stesso effetto di p con in più la simmetria rispetto ad A). Il caso $p = 0$ porterebbe tutti i punti del piano in A (caso **degenere**).

Aver presente la visione di cosa è un'omotetia poteva giovare, nell'es. di fig. 43, a comprendere più speditamente dove fosse il nocciolo della questione, e in molti casi a render banale l'effettuare una costruzione altrimenti "impossibile". Ad es. (da un tema di maturità scientifica): « costruire un triangolo data l'altezza e l'angolo opposto alla base, e sapendo che il piede H *dell'altezza divide la base* AB *in parti di* 1/4 *e* 3/4 *di* AB »; *tenendo conto subito dell'altezza si va fuori strada, ma se invece di essa si fissa (ad arbitrio) la base* AB *si costruisce senza difficoltà un triangolo* simile (*anzi omotetico*) *a quello voluto, che si ottiene poi subito riducendo l'altezza alla misura stabilita* (EP, 22).

Si tratta di esempi semplici, ma il fatto che illustrano ha portata generale ed efficacissima. Riflettendo su alcune trasformazioni di cui potremo dare qualche cenno e sulla facilità di considerarne altre ci si potrà fare un'idea dell'utilità e fecondità di pensare a delle trasformazioni per conseguire una visione appropriatamente deformabile. *È infatti sommamente importante, in genere, vedere cosa cambia in un problema e cosa* non cambia — *o* è invariante — *per un dato tipo di deformazioni.*

Sarebbe certo comodo, ad es., sapere se per dimostrare valida una certa proprietà *per tutti i triangoli* sia o no sufficiente dimostrarla valida (come spesso è molto più facile) per il solo caso del triangolo equilatero. Se abbiamo constatato che, nel triangolo equilatero, le altezze si incontrano in un punto tagliandosi ivi secondo il rapporto di 1/3 e 2/3, e lo stesso avviene per le mediane, ed anche per le bisettrici, che in quel caso coincidono con le altezze, cosa sarà valido sempre e cosa no? L'esempio è utile per introdurre la nozione — sotto vari aspetti la più importante di tutte — di trasforma-

FIGURA 43.



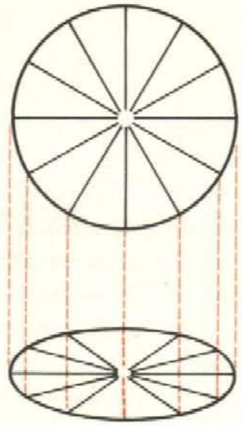


FIGURA 44.

zione **affine**: tale è ogni trasformazione che muta rette in rette conservando il parallelismo (e, pensando i punti riferiti a una coppia di assi, la si può realizzare pensando di allungare o accorciare le distanze secondo uno degli assi, o secondo tutti e due indipendentemente, ed eventualmente rendendo gli assi obliqui ruotandoli comunque; sorvoliamo sull'eventuale cambiamento di "orientazione del piano"). Ebbene: è abbastanza naturale che la proprietà relativa alle *mediane* del triangolo rimanga invariante per le trasformazioni affini — sia, cioè, una *proprietà affine* — mentre quelle per le altezze e bisettrici no; nelle deformazioni descritte i rapporti fra lunghezze *di segmenti paralleli* non si alterano (e quindi le mediane si trasformano nelle mediane, ecc.), mentre quelli tra segmenti non paralleli possono alterarsi comunque, e quindi pure la nozione di ortogonalità, gli angoli, ecc. Invarianti sono invece i rapporti tra aree; sapendo ciò si sarebbe potuto, volendo, esporre la costruzione data nella *fig. 38* riferendosi al solo caso del triangolo equilatero osservando che per affinità è valida sempre.

Ma in modo altrettanto immediato si rendono ovvie questioni che a prima vista non lo sono. Osservando ad es. che l'ellisse è un cerchio deformato in modo affine risulta evidente che l'area è π (pigreco = 3,14...) per l'area del rettangolo formato sui semiassi maggiore e minore; che per dividerne l'area in, p. es., 12 settori uguali, basta trasportarvi in modo affine la suddivisione fatta sul cerchio (v. fig. 44); in particolare i diametri che dànno una suddivisione in 4 parti uguali corrispondono a quelli ortogonali sul cerchio e, come per quelli, ciascuno è parallelo alle tangenti alle estremità dell'altro (od anche: taglia a metà tutte le corde parallele all'altro): si dicono diametri coniugati. (*La fig. 44 può raffigurare un orologio, visto di prospetto e visto obliquamente. Vi si vedono tre coppie di diametri coniugati*).

Una nozione molto interessante ed utile a considerarsi in molti casi, è quella di convessità*; è importante sapere che è una proprietà* affine. *Si dice convessa ogni figura (piana o solida, non importa) quando un segmento che unisce due suoi punti appartiene tutto e sempre alla figura; per render l'idea, si può dire che "non ha rientranze" che permetterebbero a una retta (p. es. uno spillone) di uscire e poi penetrare di nuovo nella figura. Poiché in una trasformazione affine i segmenti si trasformano in segmenti, anche figure convesse si trasformano in figure convesse, come asserito* (EP, 23).

Per contrapposto ad *affini*, si dicono **metriche** le proprietà che abbiamo visto non essere invarianti nelle affinità, come lunghezze ed angoli; esse si conservano invece nelle **rotazioni** (rotazioni di un angolo α attorno a un punto A; per $\alpha = 180°$ si ha la stessa cosa dell'omotetia con $p = -1$, ossia la simmetria rispetto ad A), nelle traslazioni, nelle **simmetrie** (rispetto a una retta). Se si tratta di conservare solo il *rapporto delle lunghezze* (e non proprio le lunghezze: si consente cioè di alterare la scala) possiamo considerare le **similitudini** (ottenibili con una rotazione, o eventualmente simmetria, seguita da una omotetia che dà il cambiamento di scala conforme al suo coefficiente: nel rapporto da 1 a p).

Prodotti, non di numeri, ma...

È fondamentale teoricamente, e necessario anche per poter esemplificare le questioni pratiche legate a concetti del genere, pensare a cosa accade eseguendo due trasformazioni — indichiamole con S e T — una dopo l'altra, vedere se e come si possa ritornare alla situazione iniziale, ecc. Anche qui serve subito, non fosse che per brevità di scrittura, introdurre dei simboli che daranno luogo a un algoritmo (v. n. 9!): indichiamo con TS (e diciamo **prodotto** di T per S) *la trasformazione che si ottiene eseguendo prima la S e poi la T:* se S porta P in P' ($P' = S(P)$) e T porta P' in P'' ($P'' = T(P')$) la trasformazione che porta P in P'' è naturalmente $TS(P) = T(S(P)) = T(P') = P''$ (1); indichiamo con S^{-1} (e diciamo **inversa** di S) la trasformazione che annulla l'effetto di S (se esiste: esiste se S trasforma punti distinti in punti distinti) ossia, se $S(P) = P'$, $S^{-1}(P') = P$, od anche $S^{-1}S(P) = P$ (per ogni P), o infine $S^{-1}S = 1$ (oppure $= \mathrm{I}$), indicando con 1, od I, l'operazione **identica** (trasformazione che non cambia nulla).

Con questa terminologia possiamo dire succintamente molte cose importanti (e abbastanza comprensibili: ci limiteremo a dimostrarne qualcuna, dato lo scopo puramente esemplificativo di questi cenni).

Il *prodotto* di due *affinità* è un'*affinità*; il *prodotto* di due *traslazioni* è una *traslazione*; il *prodotto* di due *omotetie* è un'*omotetia* (pur di includervi come caso-limite le traslazioni); il prodotto di due *rotazioni* è una *rotazione* (pur di includervi come caso-limite le traslazioni); il *prodotto* di due *similitudini* è una *similitudine*; ... e probabilmente sulla scia di queste affermazioni sembrerebbe scontato di poter proseguire a dire lo stesso di simmetrie e di ogni famiglia di trasformazioni. Invece il prodotto di due simmetrie è una traslazione (prendete un foglio, ribaltatelo due volte intorno al bordo a destra, e ve ne convincerete!). Questo diverso comportamento si esprime dicendo che le affinità formano un **semigruppo** (e così le traslazioni, ecc.) in quanto *con successivi prodotti non se ne esce* (mentre le simmetrie no); un semigruppo si dice **gruppo** se, inoltre, *contiene, di ogni sua trasformazione, anche l'inversa* (ciò che vale senz'altro per traslazioni e rotazioni; per le affinità si ha un gruppo solo escludendone quelle degeneri, che trasformano il piano in una retta o punto; ciò vale anche per omotetie e similitudini tra cui le sole degeneri sono quelle che trasformano il piano in un punto).

Attenzione: ciò che si è detto vale nel piano; nello spazio valgono considerazioni analoghe ma non sempre identiche. Ad es., uno spostamento rigido può essere non solo una rotazione (attorno a un asse) o una traslazione, ma una rototraslazione (*rotazione e traslazione lungo l'asse: le rotazioni non formano più un gruppo, ché dal loro prodotto si ottengono, in genere, rototraslazioni*). *Qui parleremo sempre del caso piano* (EP, 24).

Un gruppo può contenere (e per solito contiene) dei **sottogruppi** (*esempi ovvi: le omotetie col medesimo centro* A, *e lo stesso per rotazioni e per similitudini; le affinità (ecc. per altri gruppi) che lasciano fisso un punto, o due punti; le rotazioni di angolo multiplo di* 30° (*o, in generale, di* 360°/n, n = *intero*); *le omotetie con* p *positivo; ecc.*). *È fondamentale per lo studio delle proprietà di un gruppo conoscerne i sottogruppi.*

---

(1) A prima vista sembrerebbe più naturale invertire l'ordine. Per convincersi del contrario basta pensare che anche nel linguaggio comune « la moglie del fratello di Giorgio » significa che da Giorgio passo dapprima a considerare « il fratello di Giorgio » e quindi « la moglie di esso », e se dico « la metà del quadrato di 6 » devo fare il quadrato di 6 e poi prenderne la metà ($36/2 = 18$) e non viceversa ($\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, $3 \cdot 3 = 9$).

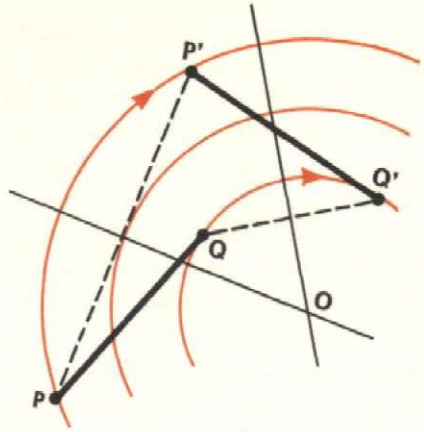


FIGURA 45.

Delle proprietà asserite verifichiamone (per ora) solo una: il prodotto di due rotazioni è ancora una rotazione oppure una traslazione. Che possa essere una traslazione lo sa bene chiunque, per avvicinare un armadio alla parete, gli fa eseguire due rotazioni spingendo prima uno spigolo e poi l'altro (come conviene per ridurre l'attrito: ma ciò non ci riguarda) (1). Che un segmento, dalla posizione iniziale PQ, si possa portare in una qualunque posizione finale $P''Q''$ (anche parallela a PQ) con due rotazioni risulterà subito dal fatto che con una rotazione (come vedremo) lo si può portare in una qualunque posizione $P'\,Q'$ non parallela (e quindi con altra in $P''\ Q''$); naturalmente, lunghezza inalterata ($\overline{PQ} = \overline{P'Q'} = \overline{P''Q''}$). Per andare da PQ a $P'Q'$ (non parallelo) con una rotazione basta trovare il necessario centro di rotazione: dovrà essere un punto O tale che $\overline{OP} = \overline{OP'}$ ed $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$ (perché, nella rotazione, i punti si conservano alla stessa distanza dal centro); ma quindi basta prendere per O l'intersezione degli assi di simmetria dei segmenti congiungenti P con P' e Q con Q' (v. *fig. 45*).

Può essere AB ≠ BA?

Molte esemplificazioni ed osservazioni semplici e interessanti si potrebbero fare proseguendo in considerazioni sull'argomento. Limitiamoci a notare che *il prodotto (di trasformazioni)* **non è necessariamente commutativo**, nel senso che, eseguendo successivamente due trasformazioni, il risultato finale non è necessariamente lo stesso a seconda di quale si eseguisce prima e quale dopo. Non è commutativo, ad es., il prodotto di rotazioni con centri diversi (verificarlo praticamente!) (EP, 25) e così quello di omotetie con centri diversi (lo vedremo nel n. 14).

Il prodotto di rotazioni (e di omotetie, e quindi di similitudini) *con centro in uno stesso punto* (ad es. quello assunto come "origine") è invece ovviamente commutativo: questi gruppi (già sopra menzionati come ovvi esempi di sottogruppi) ci si presentano ora anche come ovvi esempi di **gruppi commutativi.**

È chiaro come tale proprietà porti naturalmente notevoli semplificazioni e possa conferire particolare interesse e importanza a gruppi che, come le dette similitudini, ne godono; tuttavia nessuno immaginerà a questo punto quale partito si possa prendere da ciò nella matematica pura.

Un "mistero" chiarito!

Ci son voluti infatti più di due secoli ai matematici per riconoscere in esse l'appropriata interpretazione (o almeno la più espressiva rappresentazione) di quelle misteriose "quantità silvestri" che si erano presen-

(1) Lo diciamo, tuttavia, per rammentare l'opportunità di cogliere ogni occasione per riflettere su altri aspetti che un problema può suggerire sia pure incidentalmente. Non ve ne esimete con un « ciò non ci riguarda ».

tate nell'algebra a Bombelli (1550) *e che ancora per Leibniz costituivano un « monstrum, quasi inter ens et non ens amphybium ». Il fatto sconcertante era che si poteva giungere a risultati esatti operando su* **radici di numeri negativi** (*e scrivendo* $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \pm i \sqrt{a}$, $i = \sqrt{-1}$ *come se avessero senso, mentre* (*nel campo abituale, dei numeri reali*) *non ne hanno.*

Nel campo delle rotazioni (nel piano, con centro nell'origine) la moltiplicazione per -1 (omotetia con $p = -1$, o simmetria rispetto all'origine) è la rotazione di 180°; evidentemente essa può ottenersi ripetendo due volte una rotazione ad angolo retto (di 90°, diciamola i, o di $-90°$, che pertanto è $-i$); ivi si ha quindi la proprietà che occorreva, ossia l'esistenza di due radici di -1, le rotazioni ad angolo retto $\pm i$. La seconda circostanza che serve è la possibilità di indicare tutte queste similitudini sotto la forma $a + ib$ (ciò che risulterà ovvio nel prossimo n. 14).

14. COME SFRUTTARE CERTE TENDENZE " MODERNE "

Accade spesso che, riflettendo su diverse applicazioni pratiche, si possano riscontrare analogie o identità di comportamento tra nozioni diverse. È istruttivo rilevarlo, e condurre a vedere come ciò possa suggerire l'introduzione di idee e procedimenti unificati. Così abbiamo fatto, incidentalmente, più volte. Così ha fatto (in « I numeri ») Emma Castelnuovo, accennando alle nozioni unificatrici, ma con garbo, quasi solo per familiarizzare col nome e far presentire l'utilità che potrà derivare dalla loro introduzione e applicazione. Grandi vantaggi potrebbero infatti derivare dalla potenza semplificatrice e unificatriche di concetti e metodi generali, che consentirebbero l'eliminazione di doppioni e di pesantezze tradizionali, e lascerebbero così maggior tempo per problemi e applicazioni. Purché, beninteso, non si corra il rischio di perder di vista i significati concreti che un'astrazione ha il compito di condensare, e di considerarla come vuota espressione verbale.

Sommare punti: idea geniale !

Ci soffermeremo qui su un solo argomento per poterlo illustrare con un minimo sufficiente di dettagli e di esempi, nonché con cenni ai collegamenti necessari per mostrarne la rispondenza alle esigenze pratiche. In termini geometrici, si tratterà della **geometria affine,** intesa come schema matematico più adeguato sia per basarvi lo studio della geometria che per fornire la rappresentazione geometrica di molte altre cose pratiche.

Per evitare impostazioni sistematiche (qui fuori luogo), proviamo a sperimentare (lasciando il giudizio al lettore) se il metodo non sia tanto semplice da permettere di applicarlo (come speriamo) rendendolo comprensibile con non più di qualche cenno esplicativo, e tanto potente da dare risposta pressoché immediata a una questione effettiva e non banale. Vogliamo dimostrare (e precisare) come il prodotto di due omotetie sia una omotetia oppure una traslazione.

Vediamo anzitutto come esprimere un'omotetia, e indichiamone con A il centro e con p il coefficiente. Essa è la trasformazione, diciamola S, che porta il generico punto $P = A + (P - A)$ nel punto $S(P) = P' = A + p(P - A)$; ed ecco il cenno che spiega il modo di scrivere.

$P = A + (P - A)$ *è, formalmente, una identità; ciò che conta è però afferrarne l'interpretazione, che intende indicare il punto* P *come ottenuto dal punto* A *mediante la* **traslazione** *da* A *a* P (*rappresentabile con una* *freccia* (1) *da* A *a* P, *o, come si dice, dal* **vettore** P − A). *L'espressione che dà* P' *è cambiata soltanto per il fattore* p *che moltiplica il termine che esprime lo spostamento da* A *a* P (*o "vettore"*)*: si esprime così nel modo più spontaneo immaginabile che esso viene alterato nel rapporto da* 1 *a* p (*conservando o invertendo il verso a seconda che* p *è positivo o negativo, e conservando o diminuendo o aumentando le distanze da* A *a seconda che* (*in valore assoluto*) p *è uguale o minore o maggiore di* 1*; se* p = 0 *si ha il caso banale che, qualunque sia* P, *porta* P' *in* A).

Consideriamo ora una seconda omotetia, diciamola T, e indichiamone con B il centro e con q il coefficiente; essa porterebbe ogni $P = B + (P - B)$ in $T(P) = B + q(P - B)$; ma vogliamo applicarla a $P' = S(P)$ per studiare cosa avviene facendo il prodotto TS delle due omotetie, ossia per trovare il punto P'' in cui esso porta P. Sarà

$$P'' = TS(P) = T(P') = B + q(P' - B),$$

ma $P' = A + p(P - A)$,

$$P' - B = p(P - A) + (A - B),$$
$$P'' = B + pq(P - A) + q(A - B) =$$
$$= pqP + q(1 - p)A + (1 - q)B =$$
$$= C + pq(P - C)$$

ove si ponga

$$C = [q(1 - p)A + (1 - q)B]/(1 - pq);$$

ciò purché non sia $pq = 1$, nel qual caso si ha direttamente

$$P'' = P + (q - 1)(A - B)$$

(mentre la formula che dà C diventa assurda perché si dovrebbe dividere per $1 - pq = 1 - 1 = 0$).

Per snellire l'esperimento vi abbiamo fatto assistere a facili passaggi senza dirvi se e quale senso avessero. È un successo del formalismo riuscire a far fare dei calcoli anche a chi non capisce o non conosce il senso, ma sarebbe un successo deleterio se non se ne facesse uso per meglio analizzare approfondire arricchire la comprensione del senso e la conoscenza del valore che ciò ha nelle applicazioni.

Il senso non si vedeva, ma c'è!

C'è una cosa che abbiamo fatto senza spiegarne il senso e il perché: abbiamo sciolto le parentesi. Già dal principio avremmo potuto formalmente passare in tal modo dall'espressione P' = A + p (P − A) *all'altra* P' = = pP + (1 − p) A, *ma, mentre alla prima avevamo attribuito un significato* (*somma di un punto col vettore che indica come traslarlo in* P')*, la seconda* (*somma di punti moltiplicati per numeri*) *non aveva ricevuto alcun senso atto a giustificarne l'uso. Ma il senso esiste, e come!; ha anzi un importante significato anche* fisico, *il che è quasi sempre la migliore garanzia di qualità per i prodotti della fantasia matematica. Sappiamo che due masse* p *ed* 1 − p *collocate nei punti* P *ed* A *equivalgono a una massa* p + (1 − p) = 1 *collocata nel baricentro* Q, *sulla retta congiungente* P *ed* A*; manifestamente* Q *coincide con* A *se* p = 0 (*se tutta la massa è in* A), *con* P *se* p = 1 (*stesso motivo*), *è il punto di mezzo se* p = 1 − p = ½, *e, in genere, è il punto a distanza* p *da* A *contata nel verso da* A *a* P *e assumendo come unità la distanza* $\overline{AP}$. *Questo è il significato di* Q = pP + + (1 − p) A, *del resto conforme al significato dell'altra forma,* Q = A + p (P − A)*; non ci soffermiamo sul senso che ha il considerare anche masse negative; indichiamo solo, come estensione, che daremo analogo senso anche a* qQ = pP + aA (*con* q = p + a, *anche se la massa in* Q *è* q ≠ 1), *e che l'interpretazione come vettore* (*rappresentante una traslazione*) *nel caso* q = p + a = 0 *rientra nel nuovo concetto come caso limite. Questi cenni sono di necessità sommari; non pretendono chiarire tutto, ma mostrare che basta poco a far comprendere quanto le convenzioni introdotte rispondano a un significato concreto e soddisfino le esigenze dell'intuizione.*

(1) Può esser disegnata ovunque, da un qualunque punto B al punto Q in cui viene portato con la stessa traslazione, che sposta tutti i punti nella stessa direzione (e stesso verso) e di una stessa lunghezza.

Queste idee semplici e geniali, di cui già l'esempio che stiamo trattando dimostra l'efficacia, sono dovute principalmente a H. Grassman e a G. Peano.

Possiamo quindi ora vedere il significato della formula cui siamo pervenuti. Nel prodotto di due omotetie, il coefficiente è (com'era ovvio prevedere) il prodotto dei coefficienti, pq. Se $pq = 1$ (se, cioè, si hanno un ingrandimento e un impicciolimento che si compensano) rimane solo una traslazione nella direzione della congiungente dei due centri, e nella direzione che va dal primo (A) al secondo (B) o viceversa a seconda che è $q > 1$ (ossia $0 < p < 1$) o invece $q < 1$ (ossia $p > 1$ o $p < 0$). Altrimenti il prodotto è ancora un'omotetia, ed il centro C è allineato sui centri A e B essendone il baricentro con pesi proporzionali a $q(1-p)$ ed $(1-q)$. Sviluppando la espressione si può ottenere $C = A + m(B - A)$ con $m = (1-q)/(1-pq)$, tornando così alla primitiva interpretazione (punto + vettore) e ottenendo esplicitamente la posizione (ascissa) di C (prendendo l'origine in A e assegnando l'ascissa $= 1$ a B).

E sarebbe facile ricavare molte altre conclusioni: la non commutatività delle omotetie, l'esistenza di sottogruppi (gruppi formati da parte delle omotetie: p. es. quelle con centri su una stessa retta, quelle con p *positivo, quelle con* p *potenza di un dato numero (p. es. di 2:* $\ldots, (\frac{1}{2})^n, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$), *ecc. o sotto-semigruppi (p. es. quelle con* $0 < p < 1$, *quelle con* $p > 1$, *quelle con* $-1 < p < +1$ (*ma* $p \neq 0$), *quelle con* $p > 1$ *e centri su un segmento* AB (*o dentro un triangolo, o un'ellisse, o qualsivoglia figura convessa*), *ecc.*). *Con esempi di questo tipo si possono rendere familiari e gustose molte nozioni che spesso vengono invece propinate in astratto con terrificanti montagne di definizioni formali e scarsissime applicazioni (fatto cui forse alludeva Fedro quando scrisse « Parturiunt montes, nascitur ridiculus mus »).*

L'uso dei vettori: chiave magica...

L'uso dei vettori (meglio se integrato col calcolo sui punti-massa) permette di costruire tutta la **geometria affine** nel modo più semplice (sia riguardo all'eventuale formulazione assiomatica, sia con riferimento a spiegazioni concrete, geometriche e fisiche), prestandosi ad ogni tipo di ragionamenti senza farne oggetto di campi apparentemente separati. Si potrà passare a piacere da considerazioni sintetiche a calcoli intrinseci (come nell'esempio precedente) od al metodo delle coordinate ("geometria analitica") che è semplicemente il caso particolare in cui si fissano una volta per tutte dei punti-base (e risulta definito un sistema di "coordinate baricentriche"), oppure un punto (origine, O) e dei vettori-base ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$; per 3 dimensioni anche $\mathbf{k}$). In questo caso ogni punto P del piano viene individuato dalle sue coordinate cartesiane x e y mediante la $P = O + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ (nello spazio, $P = O + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$), che indicano espressivamente come P si ottenga partendo da O e spostandosi di x nella direzione del vettore $\mathbf{i}$ e di y in quella di $\mathbf{j}$ (ed eventualmente di z in quella di $\mathbf{k}$).

Si badi che qui $\mathbf{i}$ *e* $\mathbf{j}$ *sono due vettori qualunque (purché non paralleli); dato che finora lo spazio è soltanto* affine, *non ha neppur senso chiedere se siano ortogonali, o di ugual lunghezza (unitaria); supponendo ciò si entra nella geometria metrica,* ma è opportuno prescinderne finché non vi siano motivi per farlo. *Quella che si costruisce nel modo indicato* (con le sole nozioni affini) *è infatti la rappresentazione geometrica appropriata per molte applicazioni sia fisiche che economiche, ecc.*

Volendo indicare ad es. con un punto P (*o vettore,* $P - O$) *un complesso di merci (quantità* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *di* n *merci* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *acquistate o consumate o prodotte da un individuo o azienda o popolazione), avremo* *un punto del piano* ($x = x_1$, $y = x_2$) *o dello spazio* ($x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$) *nel caso di* 2 *o* 3 *merci, ma non ci sarà difficoltà formalmente a pensare in ogni caso a uno « spazio a* n *dimensioni ». Che dovrà pensarsi* affine*: le nozioni metriche non servono ed anzi la loro presenza genera spesso malintesi e confusioni (ad es. chiedersi se due complessi di beni sono "ortogonali" è privo di senso; dipenderebbe tra l'altro dalla scelta di unità di misura, per beni che si misurano quali a peso, quali a lunghezza, ecc.).*

L'impiego di esempi del genere (economici e statistici) per introdurre le nozioni geometriche (con vettori e coordinate) risulta fra i più indovinati anche al primo livello (su ciò uscirà in questa collana un'esposizione del prof. Ugo Pampallona, che ha sperimentato il metodo nella Scuola media).

... anche per le nozioni metriche.

L'introduzione delle nozioni metriche, quando è il momento in cui giova, si realizza del resto facilmente, proprio grazie all'uso dei vettori, in modo che rende chiaro cos'è che si aggiunge (e in quali casi ha senso e scopo l'aggiungerlo) passando dal campo affine a quello metrico. Si tratta di introdurre il **prodotto scalare** (o **prodotto interno**) di due vettori (un numero $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, funzione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, con $\mathbf{a} \times \mathbf{a} > 0$ — ammenoché $\mathbf{a}$ sia il vettore nullo — e di significato « quadrato della lunghezza di $\mathbf{a}$ »; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ corrisponde a *ortogonalità* di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$); con poche spiegazioni ciò potrebbe risultare ben chiaro, ma non c'è motivo di farlo.

Dell'introduzione delle nozioni metriche dobbiamo servirci per una sola ultima osservazione, per cui sono sufficienti ragionamenti immediati. Avevamo detto (in fine del precedente n. 13) *che le similitudini piane (con il centro nell'origine, come ora sottintenderemo) si potevano scrivere* $a + i\,b$, *dove* a *e* b *sono due numeri reali qualunque, ed* i *è la rotazione ad angolo retto (per fissare le idee, con senso antiorario, cioè contrario al movimento delle lancette dell'orologio). Tutto chiaro salvo definire la* somma *di due similitudini (e, in genere, trasformazioni). Ma ciò è immediato (si potrebbe quasi dire automatico) dato che abbiamo introdotto la nozione di somma per punti e vettori (ed è più semplice qui pensare solo ai vettori). Basterebbe definire in generale una somma di operazioni* $S = a\,S' + b\,S''$ *mediante* $S(u) = a\,S'(u) + b\,S''(u)$; *ma per brevità illustriamo il semplice caso particolare che ci interessa. Riferendoci a vettori-base* $\mathbf{i}$ *e* $\mathbf{j}$ **unitari e ortogonali** *(come è comodo nella geometria metrica, e come si è usato nei diagrammi), la rotazione* i *porta* $\mathbf{i}$ *in* $\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{j}$ *in* $-\mathbf{i}$: $i\,\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $i\,\mathbf{j} = -\mathbf{i}$; $a + i\,b$ *è quindi la trasformazione che porta* $\mathbf{i}$ *in* $(a + i\,b)\,\mathbf{i} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{j}$ *in* $(a + i\,b)\,\mathbf{j} = a\,\mathbf{j} - b\,\mathbf{i}$; *si vede senz'altro che è una similitudine (tutti i vettori vengono ruotati dello stesso angolo e moltiplicati per lo stesso coefficiente che* $\mathbf{i}$ *per portarlo in* $a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$) (EP, 26). *Sotto questa forma, le similitudini appaiono identiche ai "numeri complessi" che, come si è accennato, verranno a suo tempo incontrati nell'algebra (e tutte le proprietà ne diventano significative e intuitive). Tra l'altro, nel campo complesso diviene valido il "Teorema fondamentale dell'Algebra": un'equazione algebrica di grado (effettivo)* n *ha sempre (esattamente)* n *radici; p. es., se di* 2° *grado, due radici, anche se non ne esistono nel campo reale: cfr. fig. 34* (EP, 27), *vedere precisazioni in* (EP, 28).

Un gruppo in cui si può operare anche con la somma *senza che, così facendo, si esca dal gruppo (ed è ciò che abbiamo constatato ora per le similitudini, ossia per i numeri complessi, come già avveniva per i numeri reali), si chiama, in algebra,* anello *(ciò non vale invece ad es. per le rotazioni, perché una loro somma, o prodotto per un numero, non è più in genere una rotazione bensì una similitudine). Se un anello è* commutativo *(come nel caso delle similitudini, o numeri complessi) vi sono valide tutte le usuali proprietà (p. es.*

sarà $(a + i b)(a - i b) = a^2 - (i b)^2 = a^2 + b^2$, *e lo potremo dire senza bisogno di riverificarlo*). *Queste considerazioni astratte permettono di estendere al caso generale le proprietà viste nel caso usuale; le interpretazioni geometriche* (*come, per detto caso, quella della fig. 29*) *possono non esser più valide ma tanto maggiore ne è l'utilità in quanto dànno lo spunto intuitivo per afferrare il senso che si propaga ovunque indipendentemente dalle particolarità della rappresentazione.*

15. PERCHÉ E COME PREOCCUPARSI DELLE APPROSSIMAZIONI

L'esattezza della matematica è proverbiale, ed è considerata come uno dei maggiori suoi pregi. Ed è anche giusto; tuttavia essa ne costituirebbe anche un difetto, o almeno un limite, se non fosse in grado di liberarsene per tenere nel debito conto i molti fattori che introducono od esigono l'approssimazione, la semplificazione, l'incertezza.

È bene meditare su queste considerazioni fatte da Guido Castelnuovo più di mezzo secolo fa (*Congr. "Mathesis", 1912; testo riprodotto in* [NB, 18, *1962*]; *altri brani in* [NB, 14 *p.* 157]).

« *È questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegnamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria. Noi vi rappresentiamo l'universo come un edificio le cui linee hanno una perfezione geometrica e ci sembrano sfigurate e annebbiate a causa del carattere grossolano dei nostri sensi, mentre dovremmo far comprendere che le forme incerte rivelateci dai sensi costituiscono la sola realtà accessibile, alla quale sostituiamo, per rispondere a certe esigenze del nostro spirito, una precisione ideale* ».

Di ciò è importante tener conto soprattutto nel senso di evitare di falsare inavvertitamente un problema pratico sostituendovi una schematizzazione matematica di cui ci sfugge la mancanza di realismo.

Contro tale rischio (*e malvezzo*) *è raccomandabile imprimersi bene in mente il monito efficacemente espresso dalle seguenti parole di J. W. Tukey:* « *È molto meglio una risposta* approssimata *alla* vera *questione, che spesso è* vaga, *piuttosto che una risposta* esatta *a una questione* falsata, *che può sempre esser resa precisa* ».

Dovremo però limitarci a pochi esempi specifici, appena sufficienti per illustrare qualche aspetto dei problemi posti dall'approssimazione di per sé, ma non certo a illuminare le ancor più importanti questioni generali ora appena sfiorate, teoricamente concettualmente e praticamente fondamentali.

Supponiamo di aver da calcolare (effettivamente, numericamente) la somma di molti (p. es. 100) addendi. Se questi rappresentano grandezze, è ovvio che potremo conoscerne le misure soltanto a meno di un certo errore (limitandosi a poche cifre decimali anziché considerarne tutta l'infinità, e anche le ultime cifre indicate potranno essere incerte); ma lo stesso avverrebbe se gli addendi fossero definiti matematicamente in modo esatto (p. es. $\sqrt{3}$, π, $6/\pi^2$, 2π, $1/(1+\sqrt{2})$, ecc., perché è praticamente impossibile calcolarne molte cifre esatte, e in genere non si ha neppure la possibilità (o non vale la pena) di considerare tutte quelle note (1). Quale sarà l'errore sul totale?

(1) A titolo di curiosità: π ($= 3,14, \ldots =$ rapporto della circonferenza al diametro) è stato recentemente calcolato con un po' più di 100.000 decimali (da D. Shanks e J. W. Wrench con calcolatore elettronico 7090 IBM presso il Data Processing Center di New York; cfr. *Mathematics of Computation*, 1962). È chiaro che in nessuna applicazione ci sarà motivo né possibilità pratica di tenerne conto completamente: è già molto eseguire calcoli con una decina (o al più circa il doppio) di cifre decimali esatte. Cfr. (NB, 4 *a*) per maggiori notizie anche su argomenti analoghi.

Naturalmente, sarà la somma di tutti gli errori sugli addendi, e se sappiamo che i singoli errori non superano un certo k, l'errore totale non potrà superare $100\,k$. Però, se gli errori possono essere (come di solito) sia in più che in meno, è da attendersi che in parte si compensino, e occorre affidarsi a concetti probabilistici o statistici (come vedremo nel n. 17): risulta in base ad essi che l'ordine di grandezza presumibile dell'errore, anziché nel rapporto da 1 a 100, crescerà appena nel rapporto da 1 a 10.

Considerazioni del genere sono necessarie ed hanno la massima importanza nelle scienze sperimentali, in quelle che richiedono misure particolarmente accurate (come l'astronomia e la geodesia), ma anche per l'esecuzione di calcoli puramente matematici su dati esatti (in ispecie con calcolatori elettronici) perché si hanno inevitabilmente per lo meno gli errori da arrotondamento (ed in genere anche altri derivanti dall'uso di procedimenti approssimati).

Cercasi angolo retto (esatto).

Un esempio geometrico. In genere si considerano esatti (e difatti in teoria lo sono) i procedimenti di costruzione basati su intersezioni di rette (o cerchi), tracciamento di parallele o perpendicolari, ecc. Sorprenderà sapere quanto in pratica ciò sia difficile: nella costruzione di un apparecchio di precisione complesso e delicato (integrafo) la causa d'errore più pregiudizievole e più difficile da correggere risultò l'assicurare l'esatta perpendicolarità di due direzioni.

Ma fermiamoci su un caso semplice. Per dividere un dato segmento in parti uguali (o secondo frazioni date), come ci serviva ad es. per il problema del n. 5 (*fig. 8*, e varianti alle *figg. 9* e *10*) il metodo "esatto" è quello basato sul teorema di Talete. Basta tracciare suddivi-

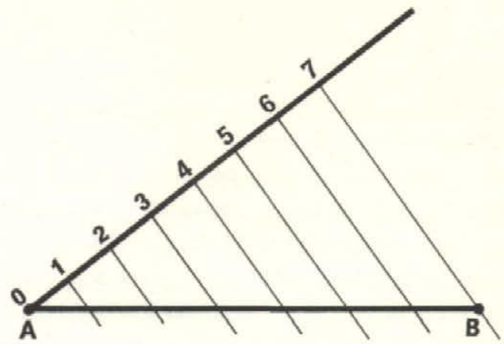


FIGURA 46.

sioni equidistanti su un'altra retta arbitraria r partendo da un estremo del segmento AB da suddividere, e riportarvele mediante parallele (*fig. 46*, in cui supponiamo di volere la divisione in settimi). Ci sarà una certa imprecisione nel segnare le suddivisioni uguali su r, ma nel riportarle su AB s'incontrano cause d'imprecisione specifiche. Nel tracciare la congiungente di "7" con B, un'imprecisione che la faccia passare un po' staccata da tali punti produce un'imprecisione tanto maggiore sulla sua direzione quanto più *piccola è la distanza* "7" — B; nel tracciare le parallele si ha poi il medesimo errore nel punto di partenza ("6", "5", ...), un errore di parallelismo (con conseguenze più sensibili sulle congiungenti lunghe) e un errore di lettura della suddivisione cercata in base all'intersezione (tanto più grave quanto più essa avviene obliquamente). Conviene pertanto scegliere, per le suddivisioni di partenza, una grandezza circa uguale a quella finale, e tracciarle su una retta r poco inclinata rispetto ad AB (evitare congiungenti lunghe ed angoli piccoli) ma non tanto poco che (nonostante la poca differenza tra le suddivisioni su AB e su r) le congiungenti abbiano a risultare troppo oblique, e la distanza "7" — B troppo piccola.

Si faccia attenzione come in certi casi errori anche piccoli possano comportare conclusioni grossolanamente errate, o addirittura indurre a errori di ragionamento. Quando il dato che interessa è una differenza (relativamente piccola) tra grandezze molto più grandi, una piccola imprecisione su queste può addirittura capovolgere il risultato: si pensi ad es. al bilancio di un'azienda, dove l'utile sia la differenza di profitti e perdite di ammontare quasi uguale (o il patrimonio sia la differenza fra attività e passività di ammontare quasi uguale). Lo stesso fenomeno si ha in problemi matematici ("sistemi di equazioni lineari", soprattutto, che geometricamente corrispondono a determinare intersezioni di rette, piani, ecc.) quando si presentino "mal condizionati" (ciò corrisponde al caso in cui rette, piani, ecc. sono pressocché paralleli, cosicché, come già rilevato nel precedente esempio, l'intersezione è mal individuabile). È una difficoltà che dà molto filo da torcere nel calcolo elettronico, dove rende disagevole sapere quanto i risultati ottenuti siano, in certe situazioni, attendibili.

L'errore c'è; ma dove?

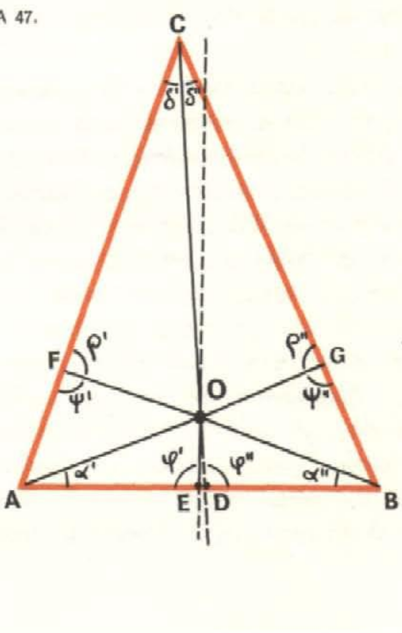
L'ultimo rischio accennato, di conclusioni matematicamente assurde, è eccezionale, ma eccone un esempio: la dimostrazione che **ogni triangolo è isoscele!** *Nel triangolo* ABC (*fig. 47*) *sia* O *l'intersezione della bisettrice* CD *con l'asse di simmetria della base (verticale per il punto di mezzo,* E); *da essa si calino le perpendicolari ai due altri lati (ottenendo* F *e* G). *Coi soliti criteri si può verificare che i due triangoli superiori* (COF *e* COG) *sono congruenti (simmetrici), e così i due intermedi* (FOA *e* GOB), *e così pure i due sulla base* (AEO *e* BEO). *Quindi* $\overline{CF} + \overline{FA} = \overline{CG} + \overline{CB}$ *ossia* $\overline{AC} = \overline{BC}$!

Colpa del disegno: facendolo esatto, il punto F (*o* G, *quello sul lato minore*) *cadrebbe al di sotto della base, sul prolungamento di* CA, *e si avrebbe la conclusione esatta: i due lati divengono uguali se* ad uno si toglie e all'altro si aggiunge *una stessa grandezza* ($\overline{AF} = \overline{BG}$). *La colpa è però anche dell'impostazione di Euclide, ove si ragiona sulle grandezze assolute ma si ignora il segno, affidandosi a una figura che può esser mal fatta per decidere se sommarle o sottrarle. Motivo in più per preferire l'impostazione vettoriale di cui segni e versi ed orientamenti fanno parte integrante.*

16. COME SFRUTTARE I RAGIONAMENTI "PER CONTINUITÀ"

Alcuni semplici esempi mostreranno quanto sia utile, anche trovandosi di fronte a problemi di natura del tutto elementare, aver presenti dei tipi di ragionamento "per continuità". Oltre all'utilità immediata essi giovano a svincolare dall'ambito di concezioni anti-

FIGURA 47.



quate suscettibili di favorire malintesi e preconcetti; in tal modo (insieme ad altre idee già accennate) favoriscono l'avvio ad intuire (ed in seguito, eventualmente, a studiare) i principi del calcolo infinitesimale.

Un primo uso, semplice ed efficace, consiste nel dimostrare per assurdo qualcosa mediante considerazione di un caso-limite. Ad es., può sembrare, a prima vista, a un ragazzo, che, deformando un quadrato (in rombo), l'area rimanga invariata. Benché sia immediato mostrare che invece è minore, essendo data da *base* × *altezza*, è più istruttivo far vedere che l'assurdità della supposizione poteva balzare subito agli occhi se uno avesse la lodevole abitudine di controllarla **pensando a tutti i casi fino al caso-limite**: quando il rombo si schiaccia riducendosi a un segmento, l'area si riduce a zero (e vi arriva non con un salto, ma divenendo *piccola oltre ogni limite*). Analogamente, sullo stesso esempio, si dimostra erronea la supposizione che rimanga costante la somma delle diagonali (al limite, preso il lato $= 1$, essa vale $2 + 0 = 2$, mentre per il quadrato vale $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$).

Parliamo pure del "limite".

La frase sopra usata, « divenendo piccola oltre ogni limite », adombra l'idea di tendenza a un limite. Ivi non si riferisce che a un'osservazione intuitiva su un fatto geometrico. Non sembra però né difficile né fuori luogo dare il concetto in forma precisa, sia pur limitatamente a casi particolarmente "comodi", come il tendere di una grandezza positiva a zero sempre decrescendo, o all'infinito sempre crescendo. Limitiamoci, per dare un esempio di definizione, di criterio, di applicazione, a quest'ultimo caso. Considerando una grandezza che varia sempre crescendo (in funzione di un indice n, *e si potrà scriverla* a_n, *oppure di una variabile continua* x *che si potrà pensare sia il tempo, e si potrà scriverla* $f(x)$), *i casi sono due: o esiste un valore* K *che non viene mai superato, oppure non esiste, ossia la grandezza cresce finendo per superare qualsiasi valore. In questo secondo caso si dice che essa* tende all'infinito. *Criterio utile: se si dimostra che, da un qualunque punto in poi, la grandezza cresce ancora di* 1 (*o di altra quantità fissa*), *è dimostrato che tende all'infinito* (*altrimenti dovrebbe non superare un certo* K, *ma allora neppure* $K - 1$ *perché crescendo ancora poi di* 1 *supererebbe* K*; quindi neppure* $K - 2$, $K - 3$, ...; *assurdo*).

Ed ecco una conclusione particolare notevole: sommando 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ecc., *si giunge a superare qualunque numero* (*cioè, al crescere del numero dei termini la somma tende all'infinito*) (1). *Per applicare il criterio mostriamo che la somma di* 1000 *termini a partire da* 1/1000 (*e così in generale*) *supera* 1/2; *infatti l'ultimo è* 1/2000 *ed è il più piccolo; la somma quindi è maggiore di* $1000/2000 = 1/2$. *Come interpretazione geometrica, ciò dice che l'area racchiusa nella strettissima "coda" tra l'iperbole* $y = 1/x$ (*v. figg. 35 e 36*) *e l'asse* x *da un qualunque punto in poi* è infinita*: vi si può racchiudere, tagliato in opportuni pezzettini, un quadrato più grande del sistema galattico!* (*Lo stesso vale ovviamente per la coda, simmetrica, fra l'iperbole e l'asse* y). *I pezzettini possono essere rettangolini di base* $= 1$, *collocati sull'asse* x, *e di altezza* 1 (*il* 1°, *sul segmento* 0,1), 1/2 *il* 2° (*su* 1,2), 1/3 *il* 3° (*su* 2,3), *ecc.* (*che rimangono sotto la curva toccandola solo nel vertice:* $1/x$ *vale* 1 *per* $x = 1$, 1/2 *per* $x = 2$, *ecc.*).

Un secondo uso dei ragionamenti per continuità consiste nell'impiegarli a dimostrare l'esistenza (a volte anche l'unicità) di soluzione per un problema; ad es. se qualcosa cresce con continuità (senza "salti") ed aveva tempo fa una grandezza inferiore a un certo livello ed ora è maggiore, *c'è stato certamente* un istante in cui aveva esattamente quel livello. Lo stesso ragionamento, ma in un'applicazione più interessante, basta a provare che fra le coppie di diametri coniugati di un'ellisse ve n'è di ortogonali tra loro (sono gli assi di simmetria, o semplicemente *assi* dell'ellisse). Consideriamo due diametri coniugati, a e b; facciamo ruotare a finché giunge nella posizione che aveva b (e allora b, conservandolo coniugato, giungerà nella posizione che aveva a). L'angolo tra a e b, durante questa rotazione, passa con continuità da un valore α a $180^\circ - \alpha$, e attraversa necessariamente il valore 90° (che ne è la media, quindi è intermedio).

Si può dividere in tre una fetta di torta?

Attenzione! Spesso si parla di non-esistenza, o **impossibilità**, *di soluzione per certi problemi (duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del circolo), che il ragionamento per continuità mostra ovviamente aver soluzione. Ma si tratta d'altro: dell'impossibilità di dare una soluzione con procedimenti restrittivamente prestabiliti (per es., costruzioni con riga e compasso, risoluzione di equazioni algebriche, ecc.). Sono cose interessanti anche per la matematica moderna (anzi: solo in tempi relativamente recenti siffatte questioni hanno avuto completa risposta); tuttavia, l'insistenza su tali argomenti e con questa terminologia risente forse troppo l'influenza di preconcetti dell'epoca in cui la scoperta che non tutti i numeri sono razionali (cioè frazioni, ossia periodici come scrittura decimale) apparve ai pitagorici come uno scandalo e una crisi.*

Ed infine, l'uso più costruttivo è quello di portare effettivamente a una soluzione (non limitarsi a dimostrare che deve esistere). Prendiamo la trisezione dell'angolo: non sappiamo (mediante costruzione ammessa) dividere l'angolo (sarà una fetta di torta) in tre parti; però in quattro sì (basta dimezzare e dimezzare ancora le metà), e allora siamo a cavallo. Se diamo 1/4 a ciascuna di tre persone ne avanza uno; dividiamolo in quarti (sono 1/16 del pezzo iniziale) e distribuiamone tre; ne avanza una che dividiamo e distribuiamo come sopra e continuiamo così per tutta l'eternità (o, se non abbiamo pazienza infinita e tempo infinito, fermiamoci quando avremo in mano una fettina trascurabile). Avremo ottenuto 1/3 come somma di $1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 + 1/4096$, con l'avanzo di 1/4096 ulteriormente da dividere in tre parti (2) (p. es., e se no ci fermeremo più avanti).

Questi esempi ci portano già alla soglia del "calcolo differenziale" (o "analisi infinitesimale"): in esso rientra lo studio delle serie (convergenza, divergenza, ecc.; v. precedenti esempi), quello delle derivate (pendenza della tangente a un diagramma, determinazione degli elementi di un "confronto marginale" in economia, di una situazione di equilibrio, o di movimento, ecc., in fisica, ecc.) e quello degli integrali (area sotto un diagramma e problemi analoghi; l'esempio riguardante la "coda" dell'iperbole valga come indicazione). Tale teoria serve tra l'altro a ricavare l'andamento completo di un fenomeno dalla conoscenza della "legge" cui deve soddisfare istante per istante.

(1) Nel linguaggio dell'analisi matematica, ciò si esprime dicendo che la "serie armonica" $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n + \ldots$ è *divergente* (somma = infinito = ∞).

(2) Quando l'angolo è piccolo, dividendo in tre parti uguali la *corda* (anziché l'arco) l'errore è (di più in più) trascurabile.

17. COME RIFLETTERE IN TERMINI DI PROBABILITÀ

Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintentendoli quanto basta per applicarli male.

In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare (come ha notato acutamente uno psicologo, John Cohen) un effetto dell'avversione all'incertezza: o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza (probabilità, statistica), oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.

Converrà qui abbondare in esemplificazioni ridotte a brevi cenni: non sarebbe agevole svilupparle, e si può farne a meno limitandosi ad esporle a titolo di monito, di memento, *sperabilmente di stimolo a studiare tali argomenti a tempo debito riflettendovi con particolare attenzione.*

Non si deve ignorare che in un gran numero di prove (in giochi, estrazioni, scommesse, assicurazioni, ecc.) è probabile una "compensazione", un apparire di "regolarità statistiche" grazie alla "legge dei grandi numeri"; **non si deve ritenere** *però (come spesso si conclude da interpretazioni troppo letterali e apodittiche di siffatta tendenza alla "compensazione"):*

— **che** *se si sono verificati scarti in un senso (p. es. uno è stato sfortunato al gioco)* **sia da attendersi uno scarto in senso opposto** *per dar luogo alla "compensazione";*

— **che** *se qualcosa è eccezionalmente improbabile (come un lungo ritardo di un numero al lotto)* **sia da attendersi qualcosa che l'impedisca** *(p. es. che un numero arretrato si affretti ad uscire);*

— **che sia meno rischioso giocare molti colpi** *piuttosto che pochi o uno solo (per dar modo di funzionare alla "legge dei grandi numeri").*

In effetti, la "compensazione" è il comportamento prevedibile in base all'ammissione che ogni prova dia un risultato a caso, senza memoria del passato, *ed è assurdo pensare di trarne conclusioni in contraddizione con le ipotesi di partenza. La "compensazione" poi dice soltanto che il rischio* (1) *al crescere del numero delle prove,* n, *cresce meno rapidamente di* n *(precisamente come* $\sqrt{n}$ *: per* $n = 100$, *nel rapporto da* 1 *a* 10 *anziché da* 1 *a* 100, *come accennato nel* n. 15; *per* $n = 10000$, *nel rapporto da* 1 *a* 100 *e non da* 1 *a* 10000, *ecc.); in tal modo diminuisce (come* $1/\sqrt{n}$*) il rischio relativo, cosicché è esatto concludere che giocare* 1000 *su un solo colpo è dieci volte più rischioso che giocare* 10 *per ogni colpo su* 100 *colpi (è altrettanto rischioso che giocare* 100 *ogni colpo su* 100 *colpi, ma* 10 *volte meno che giocare* 1000 *su ogni colpo su* 100 *colpi).*

Guai scambiare queste delicate comparazioni di gradi d'incertezza e di rischio con affermazioni appartenenti alla logica ordinaria (non probabilistica) e costruirvi sopra ragionamenti di tipo ordinario: sarebbe come volersi arrampicare su un'impalcatura di gomma supponendola rigida.

Grandi equivoci anche nell'uso e interpretazione di medie e indici (NB, 23).

Un esempio autentico. Un avvocato, in una causa per pensioni vitalizie sostenne che, poiché la tavola di mortalità indica che un individuo di 70 anni vive (in media) fino a 80, ma poi se vive fino a 80 anni vive ancora fino a 85, ne consegue (anche rinunciando alle ulteriori correzioni ripetendo il criterio) che un individuo di 70 anni vive fino a 85 (2). L'errore è evidente: la media tiene conto di tutte le possibilità, di morire sia prima che dopo; rifacendo il ragionamento con partenza da tale media si tien conto invece soltanto del caso in cui la morte avvenga dopo (e non è più la media).

Più in generale, bisogna tener presente che la scelta di un particolare tipo di media non può esser fatta ad arbitrio, per comodità o in base a preferenze personali: per ogni problema (se ben formulato) c'è un solo tipo di media che vi risponde.

Molte analoghe osservazioni si potrebbero fare su argomenti di cui sarebbe impossibile far intuire il senso senza dilungarsi in spiegazioni.

Qui "tacere" è "falsare".

Ma un'osservazione di carattere generale e fondamentale non può essere omessa (e la diciamo parafrasando e riassumendo passi di R. A. Fisher): *mentre nella logica deduttiva* (logica della certezza) *è lecito ragionare utilizzando solo una parte delle premesse e dei dati disponibili, in quanto così facendo si potrà giungere a un insieme, sia pure più limitato, di conclusioni che saranno però sempre ESATTE , nella logica induttiva* (logica dell'incertezza, logica probabilistica, logica statistica) *ciò non è lecito: utilizzando solo una parte dell'informazione, in questi ragionamenti si può giungere invece a conclusioni FALSIFICATE* (come avviene, ad es., quando in una disputa o in un processo si sopprimessero le testimonianze a favore, oppure quelle contrarie).

Quanto ad esemplificazioni concrete, limitiamoci a due sole, intese a completare sotto questo aspetto i cenni su aspetti economici (n. 7).

L'incertezza nell'economia.

Nella preferenza fra decisioni economiche alternative, le cui conseguenze sono incerte, il criterio logicamente **coerente** (per chi si prefigge il guadagno; eventuali altri scopi andrebbero se del caso valutati come equivalenti, per l'interessato, a un certo guadagno) sta nella scelta fatta in modo da avere il massimo **guadagno sperato**; criterio che va corretto (se gli importi in gioco sono rilevanti) in quello di render massima la **utilità sperata** (ove l'utilità di un guadagno grande si valuti meno che proporzionalmente accresciuta per tener conto dell'avversione al rischio).

Questo *guadagno sperato* è il valore del guadagno calcolato usando le probabilità come *prezzi* dei guadagni incerti. Se un individuo potrà ricavare, da un certo affare o scommessa od altro, un guadagno di 1200 o 500 o 0 o — 400 (perdita di 400) a seconda di quale tra 4 casi possibili si verificherà, il valore del guadagno, o guadagno sperato, *per lui*, dipenderà dalle probabilità che attribuirà ai detti 4 casi; supposto siano 20 %, 35 %, 15 %, 30 %, il valore sperato di ogni singolo caso e quello complessivo saranno dati dal semplice conteggio seguente (che, interpretando le probabilità come *prezzi*, secondo il concetto più significativo, è né più né meno che il conteggio di un bottegaio o di un ragioniere):

$$
\begin{array}{rcr}
1200 \text{ a } 20\,\% & = & 240 \\
500 \text{ a } 35\,\% & = & 175 \\
0 \text{ a } 15\,\% & = & 0 \\
-\,400 \text{ a } 30\,\% & = & -\,120 \\
\hline
\text{Totale} & = & 295
\end{array}
$$

(1) Ossia, per dirne il senso sommariamente, l'**ordine di grandezza dei guadagni o perdite.**

(2) Cifre arrotondate, sostanzialmente corrispondenti alle tavole di mortalità italiane 1950 (NB, 3).

Il "problema del giornalaio".

Il seguente esempio intende mostrare l'importanza che ha anche in questo campo il criterio di basarsi su confronti *marginali*. Si dice "problema del giornalaio" perché si pensa a un individuo che compra un certo numero di oggetti, p. es. al prezzo di 10 per rivenderli al prezzo di 25 in giornata dopo di che perdono ogni valore (e così è dei giornali, prescindendo dalla resa o tenendone implicitamente conto ritoccando i dati).

Quanti pezzi converrà comprare? Egli dovrà valutare quali probabilità attribuisce al fatto di *poterne vendere* 0, 1, 2, 3, ecc., calcolare il guadagno sperato nell'ipotesi di *comprarne* 0, 1, 2, 3, ecc., e vedere quale sia massimo. Ma tale procedimento laborioso si semplifica di colpo pensando in termini marginalistici: **ogni pezzo in più** che acquista porta a un aumento o a una diminuzione di guadagno sperato, perché comporta un'uscita certa di 10 ed un'entrata di 25 *se esso sarà venduto* (ossia se le richieste saranno più di quante si potevano soddisfare senza quel pezzo in più). La probabilità di vendere l'n-esimo pezzo (per es., il 12°) è la probabilità di avere almeno n (12) richieste, ossia la somma delle probabilità di tutti i singoli numeri da n in poi. Ci sarà convenienza ad acquistare il 12° pezzo — in generale l'n-esimo — se si attribuisce probabilità superiore al 40 % alla sua vendita ossia al fatto di avere almeno 12 richieste (perché la spesa di 10 si compensa col ricavo di 25 al 40 % di probabilità); insomma: ci si deve arrestare a quel numero di pezzi oltre il quale la probabilità di vendere tutte le copie scende al di sotto del 40 % (in generale, del rapporto tra prezzo d'acquisto e prezzo di vendita).

Nella valutazione delle probabilità ci si avvale di vari elementi che possono presentarsi caso per caso (ragioni di simmetria come per dadi, palline in un'urna, roulette, ecc.; esperienze statistiche su fenomeni simili; confronti, ecc.), integrandole in genere con conoscenze, opinioni, ecc. relative al singolo caso in questione. Il giornalaio avrà un'esperienza, ma potrà ad es. ritenere o no significativa la manifestazione di una tendenza recente all'aumento, o avrà motivi particolari per attendere minori o maggiori richieste nel caso particolare di "domani", e via dicendo. Imparare praticamente, esercitandosi, a saper apprezzare i gradi di probabilità ed esprimere meditatamente le proprie valutazioni in fatto di probabilità, sarebbe una delle più preziose conquiste di un progresso nell'educazione: il senso del ragionamento probabilistico è infatti, come detto, deplorevolmente manchevole e distorto se non si ha cura di coltivarlo e affinarlo.

Una prima questione, a tale proposito, potrebbe riguardare la convenienza di raccogliere informazioni o di effettuare sperimentazioni per avere una migliore base di giudizio (in ciò rientrano i problemi di collaudi per campione, controlli di qualità, indagini statistiche in genere); il criterio sarebbe sempre unico: spingere le indagini fino al punto in cui sono redditizie, cioè, in termini marginalistici, finché l'ultima lira spesa per estenderle o approfondirle porta un guadagno sperato di una lira grazie al probabile miglioramento di decisioni che consente. Sarebbe difficile dare in breve esempi, che presupporrebbero nozioni di tecnica statistica.

Il pronostico "intelligente".

Ci soffermeremo invece, un po', sull'altro aspetto, di "addestramento nelle valutazioni". Presenteremo, a tale scopo, uno schema che, da primi esperimenti, è risultato efficace e istruttivo, e che può applicarsi a titolo divertente di gioco, e cioè per pronostici sul campionato di calcio. (Naturalmente ci si potrebbe occupare di altri eventi di natura qualunque; c'è solo la difficoltà di trovarne altri che si presentino regolarmente ogni settimana con caratteristiche analoghe).

Il "pronostico" consiste nell'indicare, per ogni partita, le tre *probabilità che uno attribuisce a ciascuno dei risultati "1" - "X" - "2" (per usare i simboli del Totocalcio): ad es. riempiendo una schedina nel modo seguente:*

Partite	Probabilità (in %)		
	1	X	2
A - B	50	30	20
C - D	45	30	25
E - F	80	15	5
G - H	25	35	40
I - J	35	45	20
K - L	60	25	15
M - N	30	40	30
O - P	75	15	10
Q - R	15	50	35

Quando è noto il risultato si calcola, per ogni partita, una penalizzazione e se ne fa la somma; la classifica di giornata, e quella finale (che è ancora più importante perché rivela meglio le qualità di ciascuno, eliminando sbalzi casuali in singole giornate), sono fatte in base al minimo di penalizzazioni.

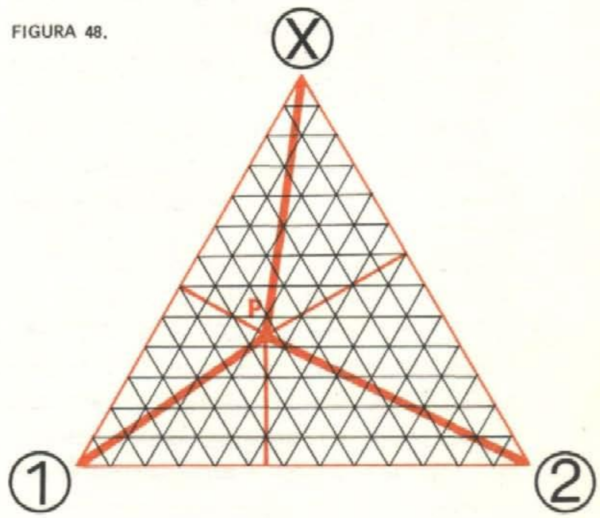
Le penalizzazioni si possono calcolare (se si ammettono solo indicazioni di probabilità di 5 *in* 5, *cioè in* % *con ultima cifra* 0 *o* 5) *in base alla tabellina stampata a piè di pagina.*

Per l'uso, valga un esempio; prendiamo la partita O - P coi pronostici 75 - 15 - 10, *e supponiamo sia terminata in pareggio; allora la penalizzazione si calcola come segue:*

Probabilità	Evento	Risultato	Penalizzazioni
75 %	"1"	FALSO	225
15 %	X"	VERO	289
10 %	"2"	FALSO	4
Penalizzazione totale per la partita			518

Indichiamo, pur senza poter chiarire il perché, il significato geometrico della regola. In un triangolo equilatero (v. *fig. 48*) la somma delle distanze dai lati è costante (e uguale all'altezza) per tutti i punti interni *P*. Prendendo l'altezza = 1 (ossia = 100 %) ogni punto *P* rap-

FIGURA 48.



Probabilità		00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50		XXXXXXXXX
Penalizz. se l'evento risulta	VERO	400	361	324	289	256	225	196	169	144	121	100	FALSO	Penalizz. se l'evento risulta
	FALSO	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	VERO	
XXXXXXXXXXX		100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50		Probabilità

(N.B.: le probabilità da 0 a 50 si leggono *sopra* e per esse VERO-FALSO si legge *a sinistra*; le probabilità da 50 a 100 si leggono *sotto* e per esse VERO-FALSO si legge a destra; nella colonna e riga così individuate si trova la penalizzazione).

presenta un pronostico coerente (con somma delle tre probabilità $=1=100\%$); i vertici (contraddistinti con "1", "X", "2") corrispondono al pronostico di probabilità 100 % attribuita a quel risultato. La penalizzazione è (1) il quadrato della distanza tra il punto P del pronostico e il vertice corrispondente al risultato realizzatosi. Per maggiori indicazioni confrontare (NB, 6, p. 312).

Si noterà che la penalizzazione minima, 0, *si ottiene soltanto se si era attribuita tutta la probabilità* (100 %) *al risultato esatto. Non conviene tuttavia tentare il colpo grosso di azzeccare "in pieno": parecchi (in quell'esperimento) avevano inizialmente tale tendenza e se ne emendarono ammaestrati da solenni batoste. Il metodo è congegnato in modo che* ciascuno deve nel suo interesse esprimere fedelmente le proprie valutazioni (2); *ha lo scopo, pertanto, di correggere la tendenza a "tentar d'indovinare" propria dei concorsi tipo Totocalcio; chi invece vi trasporta quella stessa mentalità anziché emendarla impara a sue spese l'errore commesso.*

La penalizzazione massima si ha appunto se uno attribuisce tutta la probabilità a un risultato, e se ne verifica un altro (penalizzazione $2 \times 400 = 800$: 400 *per il* 100 % *attribuito ad evento FALSO,* 400 *per lo* 0 % *attribuito all'evento VERO, e nulla per l'altro* 0 % *attribuito ad evento FALSO). E bisogna abituarsi a pensare che fatti poco probabili sono sempre possibili (siamo tutti troppo faciloni nel dire e considerare "impossibile" qualcosa che non è assolutamente impossibile!).*

Un'ultima osservazione: non è necessario imporre, *come norma del gioco, che la somma delle probabilità dia il* 100 %; *chi se ne scosta si danneggia (perché ciò equivale a prendere come punto* P *un punto fuori del piano del triangolo, ed è preferibile prendere la sua proiezione nel triangolo perché si diminuisce così la distanza dai vertici, e quindi la penalizzazione, qualunque sia il risultato* [3]).

Il metodo descritto, per le sue caratteristiche, sarebbe adatto anche per gli esami tipo "quiz" (risposte a questionari); servirebbe infatti ad eliminare l'effetto del "tirare a indovinare" (in inglese, "guessing"), che falsa o rende incerte le valutazioni delle prove (4).

18. I " CERVELLI " ELETTRONICI E IL NOSTRO

Non si può mancare di fare almeno cenno dei calcolatori elettronici, limitandoci però a quegli aspetti che dànno degli spunti utili per considerazioni conclusive.

Sulla struttura e funzionamento dei calcolatori diciamo pochissime cose che probabilmente tutti già sanno. Tutti

(1) A meno di un fattore introdotto per avere numeri interi quanto più piccoli era possibile.

(2) Precisamente, se uno indica il pronostico rappresentato dal punto P' anziché da quello P, corrispondente alle sue opinioni, aumenta la propria *penalizzazione sperata* del quadrato della distanza PP'.

(3) Tuttavia, in pratica, ciò può non esser vero se ci si deve limitare a numeri "tondi": conviene infatti arrotondare sempre ogni singola probabilità al valore più vicino senza curarsi che la somma dia 100 %. Ad es. chi ritenesse uguali le tre probabilità (33,33 % ciascuna) dovrebbe scrivere 35 - 35 - 35 (avendo in ogni caso penalizzazione $169 + 49 + 49 = 267$) anziché sostituire uno dei 35 con 30 (penalizzazione $169 + 49 + 36 = 254$ o $196 + 49 + 49 = 294$ a seconda che si realizza un evento con 35 o quello con 30: si ha un risparmio di $267 - 254 = 13$ punti in 2 casi su 3 ma una maggior perdita di $294 - 267 = 27$ punti, cioè un po' più che doppia, nel terzo).

(4) Non tanto agli effetti del confronto fra gli esaminati, dove, se le domande sono numerose, avviene ugualmente che chi più sa dia più risposte esatte (con scarti trascurabili) quanto agli effetti di un'analisi riguardante la conoscenza di singole questioni. Se, ad es., per una data domanda ciascuna delle risposte indicate (supponiamo 4) è stata scelta da circa 1/4 degli esaminati, sarebbe pur importante (e invece è impossibile) sapere se le risposte esatte erano tutte dovute al caso ("guessing") oppure se almeno uno, o due, o alcuni, effettivamente conoscevano la questione.

sanno che operano a velocità elevatissime (tempi di millesimi o milionesimi di secondo — ora ci si avvicina ai miliardesimi! — per le varie operazioni); per poterle sfruttare occorre però una rivoluzione ancor più significativa concettualmente, cioè affidare alla macchina l'esecuzione automatica di un intero, e spesso colossale e complesso, programma di calcoli e di elaborazioni. A tale scopo, tra l'altro, occorre che tutti i dati e i risultati intermedi vengano immagazzinati e, finché servono, conservati in appositi organi di "memoria", in modo da potervi rapidamente essere reperiti ed estratti per riutilizzarli.

Il modo di eseguire i calcoli conveniente per noi (eseguendoli a mano o con macchine comandate passo passo da noi) non è però in genere il più adatto per un calcolatore elettronico: p. es., data la facilità e rapidità con cui può eseguire e ripetere molte volte calcoli semplici e dello stesso tipo, è in genere conveniente escogitare metodi che si avvantaggiano di ciò piuttosto che tradurre in programmi dei procedimenti più complicati, meno standardizzabili.

Il sistema binario.

Un esempio di semplificazione particolarmente adatta (e perciò adottata) nel calcolo elettronico è l'uso del sistema binario *di numerazione. Nel nostro sistema abituale (decimale; cioè* base = 10) *occorrono 10 cifre* (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) *e, scrivendo un numero, l'ultima cifra a destra rappresenta il numero delle* unità, *cui va aggiunto un numero di* decine *dato dalla 2ª cifra, uno di centinaia (cioè* decine di decine) *dato dalla terza, e così via. Lo stesso criterio, prendendo per* base *il numero* DUE *consente di scrivere ogni numero in forma binaria, mediante due sole cifre,* 0 *e* 1 *(e, in generale, si potrebbe prendere per base un numero arbitrario, p. es.,* dodici, *o* sessanta, *o* otto, *ecc. e far uso di altrettanti segni per le cifre, cioè per i numeri da zero a quello precedente la base). Limitandoci ad esemplificare per il sistema binario, un numero sarà scritto mediante zeri ed uni, p. es.* 110111001000110*; l'ultima cifra, cioè, contando da destra, la prima, dà le unità; sono* 0, *e quindi abbiamo* 0*; la seconda dà il numero di* paia*; sono* 1 *e quindi abbiamo (in scrittura decimale)* 2*; la terza dà il numero di* paia di paia*; sono* 1 *e quindi abbiamo* 4 *(col* 2 *di prima,* 6)*; seguono tre zeri, e vuol dire che non abbiamo paia di paia di paia* (8), *né* (16), *né* (32)*; al posto successivo c'è un* 1 *che vale* 64 *(e col* 6 *precedente arriviamo a* 70)*; i due zeri successivi dicono che non va sommato* 128 *né* 256*; i tre uni successivi dicono che vanno sommati invece* 512 *e* 1024 *e* 2048 *(col* 70 *precedente arriviamo a* 3654)*; poi niente* 4096 *ed infine* 8192 *e* 16384, *con che arriviamo a* 28230*: è questo il numero indicato sopra in forma binaria. L'esempio avrà fatto capire la scrittura, e non insistiamo; il vantaggio di avere due sole cifre è scontato con la scomodità di scritture più lunghe (circa* 10 *cifre binarie per ogni tre cifre decimali;* v. EP, 29)*; però le regole di operazione sono assai semplificate:*

$$0+0=0, \quad 0+1=1+0=1,$$
$$1+1=10$$

cioè $1+1=0$ *e "porto"* 1 *(un "paio");*

$$0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0, \quad 1\cdot 1=1:$$

e la "tavola pitagorica" è tutta qui!

Questo è molto vantaggioso per la macchina, sia per tale semplicità aritmetica, sia per l'appropriatezza di indicazioni in due "stati" per gli organi di una macchina (tipo: interruttore aperto *o* chiuso, *anziché "rotella a 10 cifre" come nelle macchine da tavolo). Lo stesso vale per gli organi di memoria (p. es. punto magnetizzato o no su dischi, tamburi, nastri; perforato o no su scheda o telebanda; ecc.) ed è stato notato che anche la nostra memoria sembra funzionare col medesimo principio binario (le "sinapsi" possono essere o no elettricamente eccitate).*

I metodi iterativi.

Un altro esempio tipico è quello dei calcoli con metodo iterativo, *che risolvono un problema per approssimazioni successive ripetendo uno stesso calcolo finché si giunge al grado di esattezza prestabilito.*

Basti illustrare su un esempio un metodo iterativo per calcolare la radice di un numero qualunque (EP, 30). Vogliamo calcolare la radice di 10, osservando che sappiamo che $10 = 10 \times 1$, e vogliamo arrivare a modificare i due fattori facendoli diventare uguali, e cioè: $10 = \sqrt{10} \times \sqrt{10}$ (o almeno molto vicini).

Per avvicinarli basta sostituire ai due fattori di partenza, 10 e 1, la semisomma $\frac{1}{2}(10 + 1) = 5{,}5$ e il corrispondente $10/5{,}5 = 1{,}818181...$; poi la loro semisomma e il corrispondente 10/tale semisomma, e così via. La macchina lo fa molto rapidamente. Ma, facendolo a mano, si può arrotondare come fa comodo: si può così sperimentare il metodo con minor fatica: a 5,5 potremo sostituire 5, e avremo $10 = 5 \times 2$, a $\frac{1}{2}(5 + 2) = 3{,}5$ potremo sostituire 3 e avremo $10 = 3 \times 3{,}3333$, a $\frac{1}{2}(3+3{,}3333)$ potremo sostituire 3,16 e troveremo

$$10 = 3{,}16 \times 3{,}164,$$

e $\frac{1}{2}(3{,}16 + 3{,}164) = 3{,}162$ è già il valore esatto con 3 decimali (proseguendo si può ottenerne quante altre si vuole, naturalmente facendo divisioni di numeri sempre più lunghi).

Come concludere?

Lo studio e la ricerca di metodi del genere, che si devono a loro volta evolvere per adeguarsi alle crescenti possibilità e alle nuove caratteristiche di macchine sempre più progredite tecnicamente e concettualmente, dà luogo a ripensamenti anche dal punto di vista della *"filosofia"* della matematica, del modo di vedere e pensare dei matematici. Inoltre, le stesse macchine, o varianti più specificamente intese a quelle applicazioni, servono a rinnovare molti aspetti dell'organizzazione della vita sociale (meccanizzazione e automazione di servizi, di uffici, di procedure, di gestione, di regolazione di processi produttivi, e via dicendo): è questo un fenomeno in cui la logica del matematico ha e più dovrebbe avere una parte essenziale, che potrebbe renderlo altamente benemerito dell'umanità.

In certo senso, l'esser riusciti a far eseguire, a una macchina che nulla "capisce" dello scopo di ciò che le viene ordinato, tante aperture e chiusure di circuiti, eccitazioni e diseccitazioni di organi, magnetizzazioni o smagnetizzazioni in punti della memoria, ecc., che per noi acquistano il significato di calcoli e di risposte a nostri problemi, e tutto ciò formalizzando la richiesta che si riduce a una successione di segni convenzionali, si può dire che costituisca il massimo successo del formalismo. Ma questo significa che, di conseguenza, l'istruzione formalizzata deve sempre più costituire l'ideale e la norma anche per gli esseri umani, o, viceversa, significa che per essi diviene sempre più importante saper capire e impostare i problemi, riservando alle macchine il compito di occuparsene, con tanta maggiore abilità, dopo che siano ridotti allo stato di formalizzazione adatto per chi deve saper operare senza capire?

Il punto di vista cui ci siamo sempre ispirati in quanto precede induce, naturalmente, a propendere per la seconda risposta. Oltre a quest'argomento, i calcolatori ci offrono anche un'analogia che appare utile e appropriata per ritornare sul confronto iniziale, tra imparare per teorie (*sistematicamente, ordinatamente*) *e* per problemi (*avventurosamente, estrosamente*).

Cosa resta?... quasi niente!...

Serviranno come utile riferimento, per tentare di rispondere, le riflessioni su cosa resta di quel che si studia a scuola, contenute in due articoli di giornale dedicati al problema *degli esami.* (*Carlo Oliva*, « *Un esercito di smemorati* » *e Cesare Mannucci*, « *Le vicende della memoria* »; *in Corriere della Sera, risp.* 16/*VI e* 14/*VII*, 1965).

« *Non è né logico né sensato che interi anni di studio scorrano via come l'acqua sul marmo, senza lasciare, non che qualcosa di stabile e basilare, nemmeno una traccia nella cultura dell'individuo* » — *dice C. Oliva lamentando come* « *le cose che si studiano a scuola si dimenticano facilmente:... Dopo soli tre anni dall'esame di maturità... ecco, non ricordiamo quasi niente di quell'esame... e non solo dell'esame ma neanche delle relative materie. Non è strano?* ». *Egli si chiede poi se* « è un male inevitabile, che c'è sempre stato e sempre ci sarà, dappertutto, o deriva da cause contingenti ed eliminabili: dalla scuola che non sa veramente insegnare, dagli studenti che non riescono a studiare sul serio, da una effettiva lacerazione della cultura contemporanea che il singolo studente e studioso non è in grado, da sé, di colmare? ».

L'altro articolo sdrammatizza alquanto il fatto in sé della smemoratezza, spiegando che è naturale, che si ricorda solo ciò che interessa, che all'occorrenza ciò che si è dimenticato spesso riaffiora. Rimane tuttavia la domanda: « *perché le cose che più facilmente dimentichiamo sono quelle imparate a scuola,* » *di cui* (*citando Croce*) « *ci riempiamo provvisoriamente la memoria ma senza fonderle nel nostro intelletto?* ». *Risposta:* « *Ben poche delle cose che lo studente, anche il migliore, impara in quegli anni, riescono ad accendere nella mente un interesse veramente vitale* »; *occorre pertanto che* « l'individuo *ricavi l'abitudine intellettuale alla ricerca attiva, al confronto, all'approfondimento* ».

Occorre vitalizzare (dice Mannucci) il « sapere enciclopedico, immobile, completamente sistemato », abbattere i compartimenti stagni, scompaginare l'ordine formale delle cose morte per conseguire l'apparente disordine delle cose vive.

Dischi o nastri nella testa?

A parte altre questioni, la differenza di "ordine" cui qui alludiamo, che è quella esistente e sottolineata tra l'ordine delle trattazioni scolastiche e quello seguito nella scorribanda che ora concludiamo, si può raffigurare con quella tra due diverse forme di memoria nei calcolatori elettronici. L'una è quella di mezzi come i nastri magnetici: sono avvolti in bobine, su ogni bobina è registrato tutto il suo contenuto in un certo ordine, ed è accessibile alla lettura soltanto svolgendolo dal principio alla fine. L'altra è quella delle memorie "ad accesso diretto" (p. es. a dischi), dalle quali, come dice la denominazione, si può ottenere istantaneamente, a richiesta, l'informazione che serve, indipendentemente dalle altre. È chiaro che, nell'analogia, la prima corrisponde al metodo scolastico, sistematico, di ordinare ogni materia in una successione concatenata di nozioni, unidimensionale come una filastrocca e priva di agganci con cose estranee (o pretesamente tali per malinteso orgoglio di autonomia). La seconda corrisponde alla riorganizzazione auspicata. In cui, grazie ai molteplici collegamenti e associazioni tra idee presentatesi insieme o contrapposte in svariate questioni e riflessioni, l'intera memoria è capace di mobilitarsi per cercare ovunque risposte o suscitare echi riflessi sotto l'effetto di ogni stimolo.

Dobbiamo combatterci, tra fautori dell'uno e dell'altro sistema, per una scelta unica ed esclusiva? No, e sembra che l'analogia con le memorie elettroniche debba giovare anche per rispondere equilibratamente a tale apparente dilemma.

Per immettere in una macchina una grande quantità di dati, per conservarli fuori uso per un'epoca futura, per altri casi particolari di elaborazioni, la forma tipo nastro è preferibile o addirittura necessaria; per il funzionamento vivo, efficiente, versatile, è preferibile o addirittura indispensabile la forma "ad accesso diretto", tipo dischi. Seguire sistematicamente un nastro (una catena di deduzioni, di connessioni, di graduali approfondimenti) può essere spesso utile e talvolta è certamente necessario, ma *come una fase dello studio, non come la finalità dello studio.*

"Degradazione" liberatrice.

Pensando a quest'ultima immagine della memoria ad accesso diretto, chiunque intenda studiare con profitto dovrebbe piuttosto prefiggersi, come finalità, quella di organizzare la propria così.

"Degraderà" in tal modo a cose utili comprensibili familiari divertenti appetibili ciò che viene usualmente rivestito di forme pure solenni accademiche ed ermetiche. (Suol dire spiritosamente un collega che quando il professore si accinge a spiegare i numeri reali secondo la moda liceale sente l'obbligo di mettersi la cravatta nera). Con quest'opera di degradazione — che è piuttosto di demistificazione — contribuirà ad una spinta liberatrice necessarissima in tutta la cultura.

Per illustrare tale idea in forma adeguatamente non accademica, basti riportare due passi felicissimi di una critica teatrale (sulla recita di *Androclo e il leone* di Shaw a Ostia Antica) di Sandro de Feo (su « L'Espresso », 25-VII-1965).

*Egli depreca con ragione gli « scritti seriosi, musoni e corrucciati, di quel profondismo tutto formale e scolastico che incredibilmente ancora resiste in Europa e risale nientemeno alla retorica, dominante nel mondo antico, del "*sermo sublimis*" e del "*sermo humilis*", secondo cui nessuna storia, nessun dramma potevano essere presi sul serio e compresi nel novero delle cose nobili e profonde se non erano rivestiti di nobile forma e di discorsi e ragionamenti solenni ». Occorre invece reagire, mischiare e scompigliare le carte. E infatti « fu il sentimento e la poesia del cristianesimo a mischiare e scompigliare le carte della stanca, sussiegosa retorica degli antichi, rivestendo di "sermo humilis", di parole terra-terra e, all'occorrenza, di puerilità farsesche le passioni più alte e i pensieri sublimi; e fu un grande santo cristiano, san Francesco, ad aggiungervi più di un grano di folle allegrezza. E l'intuizione di Shaw, nelle molte sue commedie in cui è questione esplicitamente o velatamente e allegoricamente di santi, discende da questa tradizione e rivoluzione della poesia e del realismo moderni ».*

ESERCIZI E PROBLEMI

I riferimenti nel testo sono dati con la sigla EP *seguita dal numero progressivo dell'esercizio o problema. Qui, dopo il numero progressivo, è indicata la pagina (o le pagine) ove l'esercizio è menzionato, per dar modo di rintracciare l'argomento cui si riferisce e le indicazioni che possono aiutare a comprendere e impostare il problema.*

1. (p. 5). Quando sono *simili* due rettangoli? Un rettangolo ha lati di 12 cm e 18 cm; un rettangolo ad esso simile che ha un lato di 30 cm ha l'altro lato...? Quando sono simili due rombi? due ellissi (cfr. n. 5, *fig. 12*)? due corone circolari?

2. (p. 7). Il quadrato di π (= 3,141592...) è quasi esattamente = 10 : ne è inferiore circa dell'1,3% (esattamente è $\pi^2 = 9{,}8696...$). Di quanto, all'incirca, in %, π^4 sarà inferiore a 100? e π^6 a 1000?

3. (p. 15). Col medesimo ragionamento, stabilire se, nel caso della *fig. 13*, le ellissi cui appartengono gli archi che formano la curva cercata hanno o no in comune la tangente nei punti di saldatura (i punti sui prolungamenti dei lati del quadrato).

4. (p. 15). Un filo (teso) congiunge due punti fissi A e B (nello spazio) passando attraverso un cerchio (fisso). Individuare il punto P del cerchio ove il filo si appoggerà (ossia, per cui la distanza $\overline{AP} + \overline{PB}$ è minima).

5. (pp. 17 e 69). Perché le linee si scostano sempre ugualmente dall'equatore nell'onda verso nord e verso sud? Esistono punti per cui la geodetica (partendo, per fissare le idee, da Roma) volge prima verso N, poi verso S, e poi ancora verso N? Vi sono dei punti per i quali sia la partenza (da Roma) che l'arrivo possano avvenire in direzione del parallelo? o per cui ciò si verifichi solo all'arrivo?

6. (p. 21). Per individuare il punto da cui parte un suono, sapendo che esso si propaga in linea retta con velocità nota, basta disporre tre posti d'ascolto e rilevare i ritardi tra l'arrivo in essi (p. es. trasmettendo segnalazioni elettriche a una centrale). Il procedimento è stato usato in guerra, effettivamente, per individuare la posizione di artiglierie, o di lavori con mine, ecc., del nemico. Come risulta individuato il punto P (conoscendo le differenze tra AP e BP, tra AP e CP, e (quindi) tra BP e CP)?
Cosa potete dire circa l'accuratezza di tale individuazione (secondo i concetti indicati nel n. 15)? Cercate di vedere dove può trovarsi P se si ammette che ciascuna delle tre differenze predette possa essere affetta da un errore di una data grandezza al più (p. es., su un disegno, di 1 cm).

7. (p. 23). Problema simile (ricordare la regola di divisibilità per 3 e per 9): un numero la cui somma delle cifre è divisibile per 3 ma non per 9 (o, se si preferisce, che divisa per 9 dà resto 3 o 6) non può essere un quadrato.

8. (p. 23). Controllare che, per x intero, la cifra delle unità di x^5 è la medesima che per x (basta verificarlo per $x = 0,1,...,9$; oppure si può vedere, in base a quanto detto per i quadrati, che $x^5 - x$, ossia $x(x^4 - 1)$, è sempre divisibile per 10). Perciò, se uno ricorda le quinte potenze di 10, 20, ..., 90 (anche approssimativamente: milioni 0, 1, 3, 24, 100, 300, 800, 1700, 3300, 6000) può rispondere di colpo alla richiesta della radice quinta di un numero fino a 10.000.000.000 che sia una quinta potenza.

9. (p. 27). Calcolare il quadrato di 3000, e quindi ottenere quelli di 3001, 3002, ecc. aggiungendo via via gli opportuni numeri

dispari. Giunti al quadrato di 3010 (oppure 3020) controllare il risultato col calcolo diretto (3010×3010; oppure $[3000 + 10]^2$).

10. (p. 29). La somma dei quadrati dei primi n numeri è il volume di una piramide a gradini formata sovrapponendo n tavolette quadrate di lato $n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1$, e ciascuna di altezza 1. Il volume di una piramide vale *base* $\times$ *altezza* / 3. Verificare che il volume trovato per la "piramide a gradini" risulta effettivamente compreso tra quelli della piramide inscritta e di quella circoscritta, che hanno (accertarsene!) lato della base ed altezza tra loro uguali, e rispettivamente n ed $n + 1$.

11. (pp. 31 e 38). Si deforma un quadrato tenendone fisso un lato (base): quale linea percorre il punto d'incrocio delle diagonali? Che relazione c'è tra il risultato cui si perverrà e il teorema di cui ad EP, 19? E se invece di un quadrato si ha, inizialmente, un rettangolo (altezza minore, oppure maggiore, della base)?
Se pensiamo fisso un lato verticale, il rettangolo può rappresentare un cancello (di quattro travetti in legno, p. es.). Perché viene aggiunto qualcosa in diagonale? e secondo quale diagonale? (pensare e distinguere i due casi: diagonale realizzata con travetto di legno, oppure con cavetto d'acciaio).

12. (p. 33). Quale può essere l'ombra di una sfera su un piano, risp. con luce solare (sorgente a distanza praticamente infinita) oppure con luce uscente da un punto (distanza finita)? Quando è circolare? quando è illimitata?

13. (p. 33). I passaggi fatti sull'esempio numerico, e che in generale consistono nel trasformare $y = a x^2 + b x + c$ in $y = a\ (x + b/2\ a)^2 + (c - b^2/4\ a)$, significano solo che in tal modo la parabola viene espressa nella forma più naturale con riferimento al suo vertice. Posto infatti $x_0 = -\ b/2\ a$ ed $y_0 = c - b^2/4\ a$, risulta $y = y_0 + a\ (x - x_0)^2$, ossia la parabola parte dal livello $y = y_0$ nel punto $x = x_0$ (dove il termine quadrato si annulla) e sale simmetricamente scostandosi da $x = x_0$ (se $a > 0$; discende se $a < 0$). Le radici (ossia le intersezioni x_1, x_2 della parabola coll'asse delle ascisse) esistono se y_0 è negativo ed a positivo (o viceversa), come si vede dalla *fig. 34*. Del resto la formula stessa permette di ricavare $a\ (x - x_0)^2 = -\ y_0$, $x - x_0 = \pm \sqrt{-y_0/a}$ (essendosi in sostanza, pensando il vertice come nuova origine, ricondotto il problema a quello banale di trovare l'intersezione della parabola $y = a x^2$ con una retta orizzontale $y =$ costante). Di qui la formula risolutiva

$$x_{1,\,2} = x_0 \pm \sqrt{-\ y_0\ /\ a},$$

ossia esplicitamente

$$x_{1,\,2} = \left\{ -\ b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c)} \right\} /\ 2\ a\ .$$

14. (p. 33). E istruttivo vedere il problema (e la formula risolutiva) del precedente EP, 13 sotto un altro aspetto, anche perché è sotto questa forma (sostanzialmente) che esso è stato affrontato e risolto per la prima volta dal matematico mussulmano Al-Khuwarizmi (vissuto a Bagdad intorno all'800-850 d. C.).
Per comodità scriviamo l'equazione nella forma

$$x^2 + 2\ k\ x = l^2$$

(con riferimento ai simboli dell'es. precedente, ciò significa porre $k = b/2\ a$ e $l^2 = -\ c/a$; considereremo il caso particolare in cui a e b sono positivi e c negativo, cosicché k è positivo come l^2, che risulta tale già per averlo scritto come quadrato). Possiamo allora interpretare k, l ed x come lunghezze (le prime due assegnate, la terza incognita), e l'equazione come una relazione che vogliamo sussista fra delle aree:

dobbiamo scegliere una lunghezza x tale
che il quadrato di lato x
più due rettangoli di lati k ed x
dia (come area) il quadrato di lato l.

La *fig. 49* si deve pensare costruita così. Dapprima si disegnano gli assi, e i due quadrati di lato k ed l (noti), nella posizione indicata. Il problema è poi di determinare lo spessore, x, del bordo a forma di L rovesciata che contorna sopra e a destra il quadrato k^2 (bordo formato appunto da un quadrato di lato x e due rettangoli di lati x e k), in modo tale che la sua area sia uguale a quella del quadrato l^2. Ma ciò vuol dire che il quadrato di lato $k + x$ (che è k^2 più il "bordo") dev'essere uguale alla somma dei quadrati k^2 ed l^2, ossia il suo lato $k + x$ (per il teorema di Pitagora) dev'essere $\sqrt{k^2 + l^2}$ (ipotenusa, v. figura). Risulta $x = -\ k + \sqrt{k^2 + l^2}$.

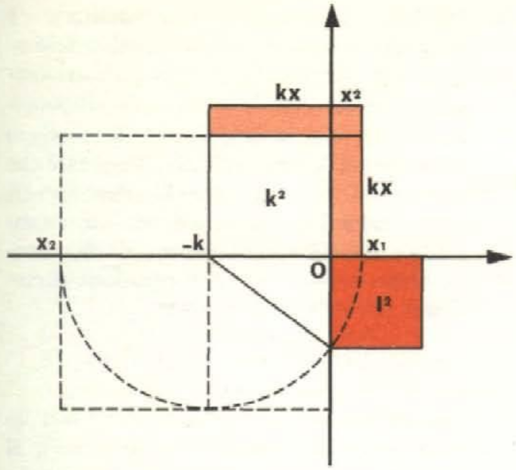


FIGURA 49.

Ciò è in accordo con la precedente formula risolutiva, ma dovremmo avere anche l'altra soluzione (con segno "$-$" davanti alla radice). Effettivamente, anche portando l'ipotenusa dal punto $-k$ verso sinistra anziché verso destra si ha una soluzione (che però va interpretata opportunamente tenendo conto dei segni dei prodotti che dànno aree: si cerchi di farlo per esercizio guardando le linee punteggiate); intendendo le aree in senso positivo soltanto la prima soluzione risponde al problema geometrico.

15. (p. 34). Nella *fig. 30* (descrizione, v. nel testo) il rettangolo di base x e altezza y ha area massima tra quelli col vertice sul segmento tra $(0, 2y)$ e $(2x, 0)$; gli altri hanno area minore, e pertanto tutti gli altri punti di detto segmento stanno al di sotto dell'iperbole che lo tocca in quel punto. Ciò basta ad assicurare che è tangente (sapendo che l'iperbole non ha punti angolosi o altre irregolarità).

16. (p. 34). L'affermazione finale richiede una precisazione. La proprietà vale per qualunque curva che sia tangente all'iperbole *esternamente;* se è tangente *internamente* si ha, anziché un massimo, un minimo, e se è tangente *attraversandola* non si ha né massimo né minimo. Cercate di disegnare varie curve tangenti all'iperbole in quel punto, realizzando i tre casi e osservando che vale quanto detto (v. *fig. 30*).

17. (p. 35). Eseguire con esattezza il disegno (come nella *fig. 37,* ma con triangolo di forma diversa) e constatare che le tre rette concorrono effettivamente in un punto.

18. (p. 37). Si segnino, su una circonferenza di centro O, due punti A e B, e quindi un altro qualunque, P; il teorema rammentato dice che l'angolo APB è metà di quello AOB (con l'avvertenza che per AOB si deve intendere l'angolo per andare da A a B senza passare per P, cosicché se P è sull'arco minore tra A e B si deve prendere $360° - AOB$ nel senso più naturale). Si tracci il diametro per P (e naturalmente O); esso divide sia AOB che AOP nella somma (o differenza) di due angoli; è facile vedere (e si cerchi di spiegare) che la proprietà detta vale per le due parti di qua e di là della diagonale, e quindi per la somma (o differenza).

19. (p. 37). Cosa dice il teorema di cui al precedente EP, nel caso particolare di un angolo inscritto in un semicerchio (cioè: A e B estremi di un diametro, P punto qualunque sulla circonferenza)? Come si può utilizzare tale risultato per costruire la retta perpendicolare a una data (e passante per un dato punto)?

20. (p. 36). Come EP, 17, ma con riferimento alla *fig. 39.*

21. (pp. 38 e 41). Occorre sempre fare attenzione alla possibilità che un problema sia inteso nel piano o nello spazio (e ad altre varianti del genere, spesso sottintese, ma che a volte traggono in inganno, casualmente o volutamente). Ecco tre domande... facili se non si pensa (come capita quasi a tutti) che si riferiscano al piano anziché allo spazio: *a*) costruire due circonferenze senza punti in comune e passanti ciascuna per il centro dell'altra; *b*) con 6 fiammiferi uguali costruire 4 triangoli equilateri; *c*) con 3 tagli dividere una torta in 8 pezzi.

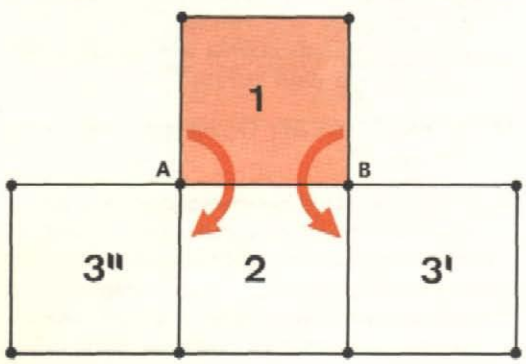
22. (p. 39). Se è data la base AB, il terzo vertice P deve trovarsi sulla verticale per H e sulla circonferenza per A e B di centro O tale che $AOB = 2\gamma$ (γ = angolo dato, opposto alla base); costruzione usata nella *fig. 39,* basata sulla dimostrazione suggerita in EP, 18. Se, anziché la base, è data l'altezza, dopo fatta la costruzione precedente scegliendo AB ad arbitrio, basta

tracciare la parallela alla base alla distanza da P voluta (h); questo lato, coi due precedenti, dà il triangolo desiderato.

23. (p. 40). In base alla definizione, dimostrare che: l'ombra di un corpo convesso (sia da sorgente infinitamente lontana, o no) è sempre convessa; l'intersezione (parte comune) di due (o più) corpi convessi è convessa.

24. (p. 41). La rototraslazione è il movimento di un cavatappi (o in genere di una vite). Tale movimento si può effettuare in due tempi: prima la sola rotazione, poi la sola traslazione (lungo l'asse di rotazione); ma una traslazione si può ottenere (come si è detto) mediante due rotazioni (v. anche EP, 25). In base a ciò, si indichi un modo per ottenere un qualunque spostamento (rototraslazione) mediante tre rotazioni.

25. (p. 42). Verificare praticamente la non permutabilità di rotazioni con centro diverso. Si prenda ad es. un cartoncino quadrato, e si indichino con A e B i punti (del pavimento, del tavolo) ove si appoggiano gli estremi di un suo lato (v. schema);



con una rotazione ad angolo retto in verso orario intorno ad A e in senso antiorario intorno a B si passa dalla posizione iniziale (1) alla (3') o alla (3'') a seconda che si eseguisce prima la rotazione intorno ad A o quella intorno a B (passando sempre attraverso la posizione (2), dove però il cartoncino si trova in direzioni opposte, come si vede se esso porta scritte o disegni). Con un foglio trasparente e rigato, si possono fare esperimenti più variati con rotazioni di angolo qualunque attorno a punti qualunque (punti segnati su un foglio fisso sottostante, nei quali sarà successivamente fissato con uno spillo il foglio trasparente da farvi ruotare attorno).

26. (p. 46). Quando è che una similitudine è una rotazione (cioè lascia invariate le lunghezze)? Notare che i vettori unitari vengono trasformati in vettori di lunghezza $\sqrt{a^2 + b^2}$ (che si dice *modulo* del numero complesso $a + i\,b$); quindi... Verificare che il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli, e constatare che ciò è conseguenza diretta (senza alcun calcolo) della conclusione precedente (... se l'avete trovata).

27. (p. 46). Considerando la parabola

$$y = x^2 - 2\,x + 2\,,$$

che si può scrivere $y = (x - 1)^2 + 1$ (è sempre $y \geqslant 1$, quindi sempre $y > 0$), si ha un esempio di equazione di secondo grado senza radici (reali): per nessun x reale è $x^2 - 2\,x + 2 = 0$, ossia $x^2 = 2(x - 1)$. La formula risolutiva dà $x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$, e, ponendo al posto di $\sqrt{-1}$ le rotazioni ad angolo retto $\pm\, i$, si constata che effettivamente le similitudini $1 + i$ ed $1 - i$ sodisfano l'equazione. Esse infatti consistono nella rotazione di 45° con ingrandimento da 1 a $\sqrt{2}$ (cioè: sono le similitudini che portano un lato di un quadrato nella diagonale, nell'uno o l'altro verso); eseguendole due volte si ottiene x^2 che è una rotazione ad angolo retto con raddoppio delle misure lineari (e infatti $(1 + i)^2 = = 1 + 2\,i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2\,i$, e così $(1 - i)^2 = -\,2i$), ciò che è proprio lo stesso che si può ottenere moltiplicando per 2 la similitudine $x - 1$ che è $(1 + i) - 1 = i$, rispettivamente $(1 - i) - 1 = -\,i$.
Ciò vale in generale. Anche il fatto che le radici siano numeri *complessi coniugati* (cioè differenti solo per il segno della parte immaginaria, ossia del tipo $a + i\,b$ e $a - i\,b$) vale sempre (e soltanto) se i coefficienti dell'equazione sono reali (ad es. non per $x^2 + 2\,x + 1 - 2\,i = 0$, le cui radici sono i e $i - 2$, come si verifica agevolmente).

28. (p. 46). La notizia data in fine ad (EP, 27) si estende al caso di equazioni algebriche di qualsiasi grado, n (*a* coefficienti reali): le radici sono o reali o, a coppie, numeri complessi coniugati. Poiché in tutto sono n (come annunciato nel testo), si concluda (in base a quanto sopra) che un'equazione reale *cubica* (cioè, di grado $n = 3$) ha sempre almeno una radice reale. Lo stesso per qualunque n dispari. Più in generale: le radici reali sono in numero dispari se

n è dispari, in numero pari se n è pari. Ogni polinomio di grado n si può scomporre nel prodotto di n termini $(x - x_1)$ $(x - x_2)$ ... $(x - x_n)$ dove $x_1, x_2, ..., x_n$ sono le radici (che, nel caso di polinomi a coefficienti reali, sono reali o a coppie complesse coniugate). Va precisato che, nel contare le radici (p. es. negli enunciati detti sopra), se uno stesso numero figura più volte in tale sviluppo va contato più volte (radici doppie se figurano due volte, e così triple, quadruple, ecc.); le radici complesse coniugate hanno sempre la stessa molteplicità (per equazioni reali) e quindi le conclusioni predette non ne soffrono (non c'è da temere ad es. che una equazione cubica abbia due radici complesse coniugate di cui una doppia, il che metterebbe in difetto la conclusione che ne esiste una reale!).

29. (p. 57). Si cerchi di giustificare e possibilmente precisare questa indicazione partendo dall'osservazione che $2^{10} = 1024$.

30. (p. 58 agg.). Proseguire il calcolo di $\sqrt{10}$ trovando ancora uno o più decimali. Sperimentare il metodo su qualche altro caso.

31. (p. 69). Ci sono persone che, volendo star sedute all'ombra, collocano le sedie dove il terreno è in ombra (p. es., ombra di un ombrellone); poi si stupiscono di trovarsi con la testa al sole. Come dovevano collocare la sedia?

32. (p. 69). Per finire: Scrivendo a macchina, una persona usava il nastro a due colori, scrivendo tutto in nero tranne la parola FINE in rosso al termine di ogni capitolo. Una volta notò che tale parola si vedeva scritta sul nastro rosso (perché i caratteri erano sporchi di nero). Però guardando il nastro alla fine del lavoro vide che a volte era scritto FINE e altre volte ENIF. Perché?

NOTA BIBLIOGRAFICA

a) Opere senz'altro accessibili e adatte per ragazzi sui 10-13 anni

1. *La via della matematica*, di EMMA CASTELNUOVO, ed. La Nuova Italia, Firenze (nuova edizione, 1966), nei due volumi:
   1 *a*: *I numeri*; 1 *b*: *La geometria.*
   È un libro di testo, ma è anche e soprattutto molto di più e di meglio.
2. « Serie M », ed. Zanichelli, Bologna:
   Libriccini contenenti trattazioni divulgative e semplici di argomenti diversi.
   Finora apparsi: 2 *a*: *Strumenti per calcolare*; 2 *b*: *I sistemi di numerazione*; 2 *c*: *Invito alla matematica* (tutti di D. A. JOHNSON e W. H. GLENN; tradotti dall'americano); annunciati: *Il mondo delle misure - Avventure tra i diagrammi - Scorciatoie nei calcoli - Divertimenti matematici - Insiemi e operazioni.*
3. *Compendio statistico italiano*, edito (ogni anno) dall'Istituto Centrale di Statistica, Roma. Porta molte aggiornate tabelle statistiche d'ogni genere (con diagrammi, ecc.), utili per consultazione e per esercitazioni di carattere concreto su dati effettivi.

b) Adatte per ragazzi di 10-13 anni particolarmente dotati per la matematica, oppure di età maggiore e più avanti con gli studi

4. « Serie MM », ed. Zanichelli, Bologna:
   Volumetti contenenti trattazioni divulgative ed elementari di argomenti diversi (di livello abbastanza più elevato rispetto alla « Serie M », v. NB, 2).
   Finora apparsi 4 *a*: *Il mondo dei grandi numeri* (PH. J. DAVIS); 4 *b*: *I grafi e le loro applicazioni* (O. ORE); 4 *c*: *Numeri razionali e numeri irrazionali* (I. NIVEN); 4 *d*: *Trasformazioni geometriche* (I. M. YAGLOM). Si tratta di traduzioni (i primi tre autori sono americani, il quarto è un russo).
5. *How to solve it?* (« Come si risolve? »), di GEORG POLYA, A Doubleday-Anchor Book, New York 1957.
   È tradotto in quasi tutte le lingue, e sembra apparirà presto anche in italiano insieme alle altre opere, più elevate, dello stesso autore (v. NB, 12 e 13). Questi è impareggiabile per genialità e infaticabilità nell'esaminare e illustrare le esigenze di un'intelligente educazione nello spirito della matematica. Anche i volumi successivi sono da raccomandare in questo stesso senso (a un livello più avanzato).
6. *La matematica per le applicazioni economiche*, di B. DE FINETTI e F. MINISOLA, ed. Cremonese, Roma 1961.
   Vi si possono trovare, un po' più sviluppati, argomenti come quelli accennati nel testo, di carattere economico, statistico, probabilistico (ma anche altri: notizie in forma facile su funzioni, ecc.).

c) Adatte ad un livello ancora un po' più avanzato

7. *Le matematiche nella storia e nella cultura*, di FEDERIGO ENRIQUES (pubbl. a cura di A. Frajese), ed. Zanichelli, Bologna 1938. Svariate e interessanti notizie, in parte facili, in parte relative ad argomenti elevati, sull'evoluzione della matematica e le sue relazioni con gli altri campi del pensiero e con le applicazioni.
8. Serie « *Argomenti di Matematica* », ed. Progresso Tecnico Editoriale, Milano.
   Volumetti sul tipo della « Serie MM » (v. NB, 4), ma, in genere, un gradino di difficoltà più su. Autori russi, traduzione da quella americana. Finora usciti: 14.
9. *Introduzione alla matematica*, di ALFRED NORT WHITEHEAD, trad. it. La Nuova Italia, Firenze 1965 (orig. inglese, Londra 1911).
10. *Introduzione alla matematica*, di E. C. TITCHMARSH, trad. it. nella collez. « Saper tutto », ed. Garzanti, Milano 1963.
11. *Che cos'è la matematica*, di RICHARD COURANT e HERBERT ROBBINS, trad. it. ed. Boringhieri (già Einaudi), Torino 1951.

12. *Mathematics and Plausible Reasoning*, di GEORG POLYA, ed. Princeton University Press, Princeton, N.Y. 1954; nei due volumi:
12 *a*: *Induction and Analogy in Mathematics*;
12 *b*: *Patterns of Plausible Inference*.
13. *Mathematical Discovery*, di GEORG POLYA, ed. Wiley, New York.
13 *a*: vol. I, 1962; 13 *b*: vol. II, 1964.
Il II vol. contiene indici generali per l'intera opera del POLYA sull'argomento della soluzione di problemi (NB, 5, 12 *a*, 12 *b*, 13 *a*, 13 *b*); cfr. i commenti ad (NB,5).

d) Opere di interesse didattico (per insegnanti, ecc.)

14. *Didattica della matematica*, di EMMA CASTELNUOVO, ed. La Nuova Italia, Firenze 1963.
15. *Matematica moderna, matematica viva*, di ANDRÉ REVUZ, trad. it., ed. Armando Armando, Roma 1965.

e) Riviste

16. « Le scienze e il loro insegnamento », bimestrale, ed. Le Monnier, Firenze.
17. « Archimede », bimestrale, ed. Le Monnier, Firenze.
18. « Periodico di Matematiche », bimestrale, ed. Zanichelli, Bologna.
Tutte e tre le riviste sopra indicate (NB, 16, 17, 18) si occupano di matematiche con particolare riguardo ad argomenti e questioni attinenti all'insegnamento nelle scuole secondarie. Qualcosa di adatto ai ragazzi si può trovare saltuariamente in tutte, ma più nella prima.
19. « Scuola e Città », mensile, ed. La Nuova Italia, Firenze.
Si occupa di problemi scolastici e didattici, tra cui spesso quelli riguardanti l'insegnamento della matematica. Vedi in particolare un numero speciale:
19 *a*: « Matematica moderna e Scuola » (sett.-ott. 1965) con *Introduzione* di Aldo Visalberghi.

f) Enciclopedie

Chi possiede (o ha facilità di consultare) un'enciclopedia veda se le voci sulla matematica sono di livello per lui adatto.

g) Informazioni concernenti le Gare Matematiche

Le gare matematiche (menzionate ripetutamente nel testo) hanno una lunga tradizione in molti paesi (soprattutto in Ungheria, dove molti dei grandi matematici di quel paese si sono formati e rivelati in tali gare, istituite nel 1894 in onore di Eötvös).

In Italia, dopo iniziative sporadiche in varie città, hanno assunto una certa regolarità dal 1963, quando la Società « Mathesis » ha iniziato a far svolgere annualmente una « Gara matematica nazionale » cui sono ammessi i migliori elementi segnalatisi nelle gare locali, organizzate in genere presso gli Istituti di Matematica delle Università. Presso qualcuno di tali Istituti si comincia anche a tenere, per un contatto meno saltuario con studenti delle scuole secondarie, delle riunioni di « Club matematico » con conversazioni ad essi dedicate. Notizie sulle gare (problemi proposti, discussioni, premiati, ecc.) appaiono di quando in quando su riviste (come NB, 16, 17, 18); cfr. ad es.:

20. *Riflessioni su una gara matematica*, di B. DE FINETTI (in « Archimede », 1962).
Per raccolte più sistematiche e ricche di problemi (con soluzioni e spiegazioni illustrative) bisogna ricorrere a pubblicazioni estere. Quelle sotto citate si trovano però in una collezione da cui furono tratti i volumetti della « Serie MM » (NB, 4), sicché c'è da sperare che appaiano anche in italiano.
21. *Hungarian problem book* (I, II),
21 *a*: I (1894-1905); 21 *b*: II (1906-1928).
22. *The MAA Contest Problem Book* (I, II),
22 *a*: I (1950-1960); 22 *b*: II (1961-1965).
entrambi nella serie « New Mathematical Library », ed. Random House, New York.
I problemi di (NB, 22) sono più numerosi e semplici (in media) servendo per un esame finale, non per una gara.
Una conversazione al « Club Matematico » (Roma) è pubblicata:
23. *Paradossi sulle Medie*, di B. DE FINETTI (in « Per. di Mat. », 1966); un argomento svolto in modo analogo (anche se non proprio in un Club matematico) è ad es.:
24. « *Argomenti vecchi ed insegnamenti nuovi: i diagrammi triangolari* », di CARLO FELICE MANARA (in « Le Scienze, ecc. », 1965).

NOTA DIDATTICA PER L'INSEGNANTE

Le indicazioni date nel programma sono particolarmente elastiche, e ciò può essere utile se ciascun insegnante cercherà di sperimentare diversi metodi e confrontarne l'efficacia e la adeguatezza agli interessi dei ragazzi affidatigli. Tale controllo non può consistere nell'accertare la capacità di ripetere enunciati o di eseguire calcoli materiali, bensì nel rendersi conto di effettivi progressi nell'abitudine a vedere le cose attraverso l'aiuto di nozioni matematiche. A tal fine si presta particolarmente bene la scuola media, dato che le osservazioni scientifiche possono dare larga occasione di concreto impiego di considerazioni matematiche.

Quale che sia il metodo che ogni insegnante riterrà di seguire, più o meno rigidamente, a seconda delle preferenze proprie e di quelle che ritiene prevalgano fra i suoi allievi, ciò che importa soprattutto è di non far ritenere che la matematica si esaurisca nello studio della materia scolastica, che come tale risulta purtroppo quasi sempre e quasi inevitabilmente arida. Occorre mostrare che essa diviene interessante e attraente se intesa come spunto e suggerimento di riflessioni che ciascuno dovrebbe sviluppare, e mezzo per riuscire a padroneggiare problemi che ciascuno è destinato a incontrare, di natura diversissima.

A questo scopo è ispirato il presente volumetto che, come dice il titolo, vuol cercare di far comprendere quanto importi il "saper vedere" in matematica. Altri volumetti che seguiranno nella stessa collana riprenderanno tale tipo di considerazioni con riferimento a temi più specifici; in questo vengono toccati di sfuggita, a titolo esemplificativo, argomenti diversi, coll'intendimento di mostrare quante cose diverse e spesso ignorate si possono incontrare nel campo della matematica. Si tratta spesso di esempi troppo semplici per dare una idea adeguata o di accenni necessariamente superficiali a cose troppo complesse per essere spiegate, ma è proprio di stimoli di questo tipo che c'è bisogno (e che in genere mancano) per evitare che tutto (e in ispecie la matematica) si degradi, nell'insegnamento, a passiva e sterile ripetizione.

Occorre inculcare nei giovani la consapevolezza che sta a loro perfezionare e far sviluppare, appassionandovisi, ciò che dà loro la scuola. Occorre dir loro che quello che la scuola dà, e può dare, non è che un seme; i frutti matureranno negli anni e nei decenni per chi ne farà tesoro riservandogli un terreno fertile nella giovane mente e coltivandolo con la riflessione e l'esercizio. Che non cada nel deserto, ché andrebbe sprecato. E così avviene a chi si limitasse a conservarlo intatto e sterile per il giorno degli esami.

Forse di ciò è difficile rendersi ben conto, anche perché, nella scuola, la necessità di svolgere gravosi "programmi" non lascia tempo per riflessioni non strettamente attinenti agli argomenti che si susseguono uno dopo l'altro. Ed anche i problemi scolastici devono perciò quasi sempre limitarsi al tipo dei problemi *artificiali*, costruiti appositamente *per applicare un dato metodo*. Ciò conduce purtroppo a ritenere che la matematica consista in un mucchio di cose imparate da ricordare, e che, dato un problema, o si conosce la ricetta e lo si risolve applicandola macchinalmente (e non occorre pensare), oppure non la si conosce e allora non c'è niente da fare (e non occorre pensare).

È stato detto giustamente:

Occorrerebbe insegnare più " per problemi " che " per teorie ": una teoria dovrebbe avere la portata minima necessaria per inquadrare un certo gruppo di problemi.

G. Prodi, *dell'Univ. di Pisa* (NB., 18, 1965)

Ciò potrà farsi, almeno in parte, e col tempo, anche nella scuola (dove non mancano tendenze ed esperimenti in tal senso), e maggiormente nel doposcuola (sperando possa venir presto attuato efficientemente secondo le forme delle libere attività parascolastiche ormai attuate in molti paesi); comunque si potrà al massimo aiutare il seme ad attecchire, ad accendere il gusto di coltivarlo, non mai (come immaginano i pigri) a fornire il fabbisogno di frutti bell'e maturi per tutto il seguito della vita.

Ciascuno dovrà comunque e sempre integrare e ravvivare e personalizzare lo studio scolastico con la sua propria riflessione, con letture (NB), con l'esercizio su *effettivi* problemi (sia formulati da altri libri, anche qui in EP), in riviste, ecc.; sia desunti da cose da lui stesso osservate, come potrebbero essere ad es. (EP, 5, 11, 21, 31, 32). Allo stesso fine si svolgono, in molte sedi, delle " Gare matematiche " (per giovani di età 15-20, universitari esclusi). Molti dei temi proposti in tali gare vengono poi pubblicati su riviste (NB, *g*).

A tutte queste attività è bene che i giovani vengano incoraggiati e interessati, come e più che allo studio nel senso passivo e scolastico del termine.

INDICE

la ricerca

Enciclopedia diretta da:
Maria Corda Costa

Piano dell'opera:
Maria Corda Costa e Maria Laura Gardoncini

Consulenza scientifico-didattica:
Aldo Visalberghi

Tutto quanto si riferisce a esercitazioni, documenti, esperimenti, attività pratico-didattiche varie è stato sperimentato presso classi di insegnanti del MOVIMENTO DI COOPERAZIONE EDUCATIVA, della SCUOLA UMANITARIA DI MILANO, di SCUOLE E SEZIONI DI VARI CENTRI D'ITALIA.

Documentazione fotografica:
Teresa Succo
Mario Alberti

Coordinamento grafico:
Toio Bonfante

Coordinamento redazionale:
Casa Editrice Loescher

Composizione:
Tiposervizio - Torino

Stampa:
A.G.S. - Torino

Chi desiderasse informazioni di tipo didattico voglia indirizzare le richieste alla redazione della Rivista LA RICERCA - Sezione Corrispondenza - Loescher Editore - Via V. Amedeo 18 - Torino

I Edizione: giugno 1967