

Storia e proprietà della più celebre tavola di moltiplicazione: la Mensa Pythagorea

Luca Nicotra¹

¹ Ingegnere meccanico, giornalista pubblicitista, Membro onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile del periodico «ArteScienza», Direttore editoriale di UniversItalia; luca.nicotra1949@gmail.com.

Sunto

La tavola pitagorica è nota a tutti fin dalle prime classi della scuola elementare, eppure le sue origini storiche e la sua struttura matematica riservano varie sorprese. In questo articolo viene posto in evidenza un falso storico troppo spesso dimenticato. Noi oggi chiamiamo "tavola pitagorica" la tavola di moltiplicazione dei numeri naturali nel sistema decimale, ma in realtà, originariamente, con il nome di *mensa pythagorea*, italianizzato in tavola pitagorica, si indicava nel Medioevo un abaco attribuito ai neopitagorici del periodo alessandrino, la cui struttura suggeriva chiaramente l'idea della notazione scritta posizionale dei numeri. La particolare distribuzione dei numeri nella tavola pitagorica dà luogo a numerose proprietà, che ricordano quelle dei quadrati magici, alcune delle quali già note, altre invece scoperte dallo scrivente. Alcune di esse trascendono la qualifica di pure curiosità aritmetiche, rivestendo un significato matematico più generale.

Parole Chiave: tavola pitagorica, abaco, ossi di Nepero, Boezio.

1. Le tavole di moltiplicazione

La moltiplicazione fra numeri naturali¹ è una legge di composizione interna sull'insieme N^* che associa a ogni coppia ordinata (n_i, n_j) di elementi di N^* un elemento n_{ij} di N^* stesso. Essa è pertanto una mappa dell'insieme delle coppie ordinate di N^* in N^* stesso:

$$(n_i, n_j) \rightarrow n_{ij}$$

ovvero una mappa del prodotto cartesiano $N^* \times N^*$ nell'insieme N^* stesso:

$$f : N^* \times N^* \rightarrow N^*$$

L'elemento neutro è l'unità.

Nel caso in cui si consideri la moltiplicazione in un sottoinsieme finito di N^* , la mappa f risulta completamente definita da una tabella a doppia entrata (detta in generale tavola di composizione o, in questo caso, di moltiplicazione) che riporta nella prima casella in alto a sinistra il simbolo della legge di composizione (in questo caso: \times), nella prima riga e nella prima colonna i successivi elementi del sottoinsieme finito di N^* (figura 1) e nella casella ij all'incrocio fra la i -esima riga e la j -esima colonna, contenenti rispettivamente gli elementi n_i, n_j della coppia ordinata (n_i, n_j) , il risultato n_{ij} della loro moltiplicazione. Dalla tavola di moltiplicazione risulta evidente l'unità come elemento neutro della moltiplicazione. Inoltre, essendo la moltiplicazione una legge di composizione commutativa, nella tavola di moltiplicazione l'elemento n_{ij} è uguale all'elemento n_{ji} e di conseguenza la tavola risulta simmetrica rispetto alla sua diagonale principale.

Tuttavia, normalmente, si rappresenta la tavola di moltiplicazione più semplicemente con il quadrato evidenziato in giallo nella figura 1.

Le tavole di moltiplicazione furono molto diffuse in tutto il Medioevo: la tavola pitagorica è l'esempio più comune che è pervenuto fino ai nostri tempi. La particolare distribuzione dei numeri nella tavola pitagorica dà luogo a numerose curiose proprietà, alcune delle quali già note,² altre invece scoperte dallo scrivente (Nicotra, 2009). Alcune di esse trascendono la qualifica di pure curiosità, rivestendo un significato matematico più generale (per es. il teorema 4.1 e il corollario 5.3).

¹ Qui e nel seguito $N^* = \{1, 2, 3 \dots\}$.

² In *Enciclopedia Generale Illustrata*, vol. IV, p. 9, Milano, Rizzoli Larousse, 1969 si trovano i teoremi 4.1 e, parzialmente accennati per il caso di un quadrato di tre caselle, i teoremi 4.2, 4.3, 4.4 ed enunciato, senza dimostrazione, il corollario 4.1. I teoremi 4.7, 5.3 e il corollario 5.2 si trovano accennati da Giuseppe Spinoso a pag. 56 del numero 1-2 anno XII-1963 di «La scienza e i giovani», Firenze, Le Monnier.

2. Dall'abaco alla tavola di moltiplicazione: un errore di trascrizione

La costruzione di strumenti per computare è comune a tutti i popoli dell'antichità. Essi sono stati ampiamente utilizzati anche dopo l'introduzione dei sistemi di numerazione scritta, sia perché il calcolo strumentale è più rapido sia perché, fino a tempi abbastanza recenti, erano poche le persone che sapevano leggere e quindi utilizzare la numerazione scritta. Lo strumento per calcolare più diffuso

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 1 – Tavola di moltiplicazione.

era l'abaco, di cui sono state realizzate diverse versioni, differenti sia nelle realizzazioni fisiche sia nella struttura di calcolo (Nicotra, 2013).

I primi a costruire un abaco furono i babilonesi, che intorno al V, IV sec. a.C. utilizzarono un *abaco di marmo* di forma rettangolare, su cui erano incisi due gruppi di undici linee verticali attraversate da una linea orizzontale.

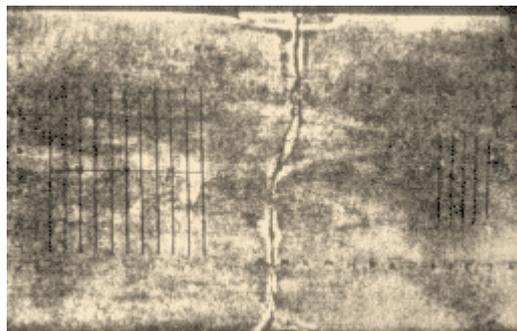


Fig. 2 – L'abaco di Salamina.

Gli antichi fenici, gli ebrei e poi i greci, gli etruschi e i romani usavano l'*abaco a polvere*: una tavoletta rettangolare, di legno o di bronzo, chiamata *abak* dai fenici, *avak* dagli ebrei, $\alpha\beta\alpha\chi$ dai greci, *apcar* dagli etruschi, *abacus* dai romani, termini che derivano tutti dall'antica parola fenicia *abak* = *polvere*. Sulla tavoletta, infatti, era incollata della polvere di colore verde (*pulvis hyalinus*) che permetteva di tracciare con una bacchetta (*radius*) simboli numerici e figure geometriche, utilizzandola, così, come noi oggi usiamo la lavagna. Nell'isola di Salamina, nel 1846, è stato ritrovato un esemplare di tale abaco (figura 2) (Loria, 1914, p. 749).

Successivamente i romani usarono un secondo tipo di abaco, l'*abaco a lapilli* (figura 3), costituito da

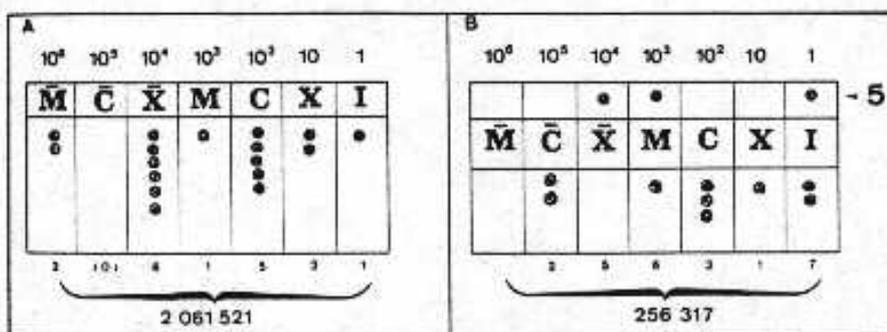


Fig. 3 – L'abaco romano a lapilli in due diverse versioni.

una tavoletta rettangolare con scanalature parallele al lato minore, al di sopra delle quali erano impresse le lettere del sistema di numerazione romano, per indicare l'ordine delle unità al quale ciascuna scanalatura corrispondeva.

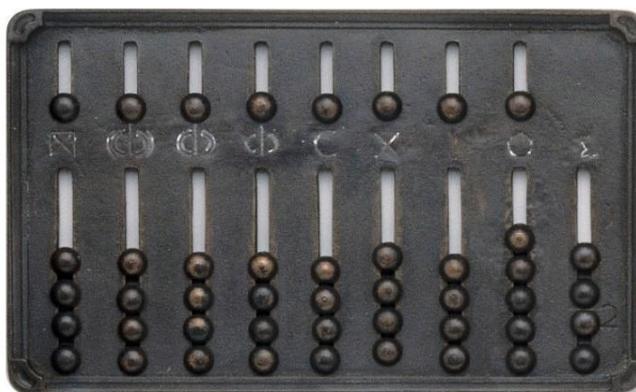


Fig. 4 – L'abaco romano a bottoni.

All'interno di ciascuna scanalatura, secondo i modelli di abaco che si susseguirono nel tempo, erano disposti tanti sassolini (*calculi*, da cui il termine calcolare) o dischetti (*abaculi*) o monetine (*denarii supputatorii*) quanti erano le unità di quell'ordine da rappresentare.

Nel 1853, un illustre archeologo, il padre gesuita Raffaele Garrucci (Garrucci, 1853), studiando una

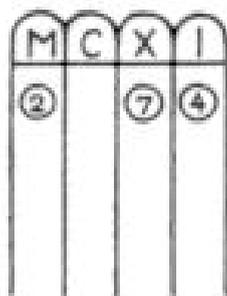


Fig. 5 – L'abaco medioevale a colonne o a gettoni detto anche abaco di Boezio. Fu detto anche erroneamente Mensa Pythagorea. Per maggiore chiarezza i gettoni riportano le attuali cifre indo-arabe e non gli apici di Boezio originali (vedi figura 6).

raccolta di antichi bronzi di proprietà di Carlo Bonichi, trovò un esemplare di un terzo tipo di abaco utilizzato dai romani: l'*abaco a bottoni* (figura 4), realizzato in un formato che oggi definiremmo "tascabile". Si tratta di una lamina di bronzo, lunga 11.5 cm e alta 9.4 cm, recante nove scanalature inferiori parallele al lato minore e otto superiori divise da una linea orizzontale.³

Ciascuna scanalatura (o alveolo) della parte inferiore contiene quattro bottoni a forma di piccoli chiodi ribattuti nella parte posteriore (*claviculi umbellati* o *aerae*), ad eccezione della seconda (dedicata alle onces) che ne ha cinque. Iniziando da destra, la prima scanalatura è divisa in tre parti, dedicate alle unità frazionarie romane: *semuncia*=1/2 uncia, *sicilicus*=1/4 uncia, *sextula*= 1/6 uncia.

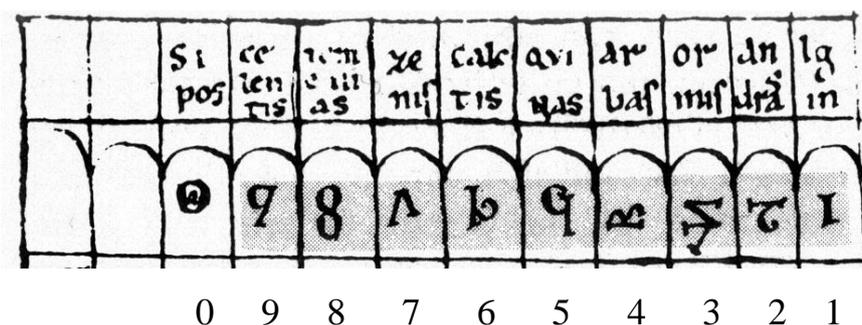


Fig. 6 – Gli apici di Boezio in un manoscritto latino dell'XI secolo. Qui compare lo zero. In alto i loro nomi nell'ordine da 0 a 9: S ipos, Celentis, Temenias, Zenis, Caltis, Quimas, Arbas, Ormis, Andras, Igin. L'origine e il significato di tali nomi (escluso Quinas di origine latina) sono ancora ignoti.

³ Di esso si aveva già notizia. In due lettere inviate il 15 marzo 1593 a Giusto Lipsio e il 18 agosto 1593 all'erudito tedesco Gioacchino Liebbard (detto Camerario), Marco Velsero fornisce il disegno dell'abaco a bottoni.

La seconda scanalatura è riservata all'unità frazionaria *uncia* = $1/12$ *axis*. Le scanalature dalla terza alla nona si riferiscono alla parte intera del numero: unità semplici I (*axis*), decine X, centinaia C, migliaia (I), decine di migliaia ((I)), centinaia di migliaia (((I))), milioni M [i].⁴Le scanalature superiori, invece, hanno ciascuna un solo bottone, che vale il numero di bottoni della scanalatura inferiore maggiorato di uno: cinque bottoni per gli alveoli della parte intera (dal terzo al nono), sei bottoni per l'alveolo delle once (il secondo).

L'abaco antico, nelle sue varie forme costruttive esaminate, conteneva già l'idea del valore posizionale delle cifre, in quanto ogni scanalatura era dedicata a un ordine di unità e quindi determinava il 'peso' dei *calculi* in essa contenuti. Per esempio, tre sassolini entro la scanalatura delle unità semplici hanno il valore di tre unità semplici, mentre se contenuti nella scanalatura delle centinaia hanno il valore di tre centinaia, e così via. La rappresentazione strumentale dei numeri fornita dall'abaco era, quindi, posizionale, mentre quella scritturale, tramite i numerali, era additiva.

Nel Medioevo, il principio di economia portò a trasformare l'*abaco a bottoni* nell'*abaco a colonne*, che utilizzava simboli-scritti al posto dei sassolini o dei bottoni: dentro ciascuna scanalatura si

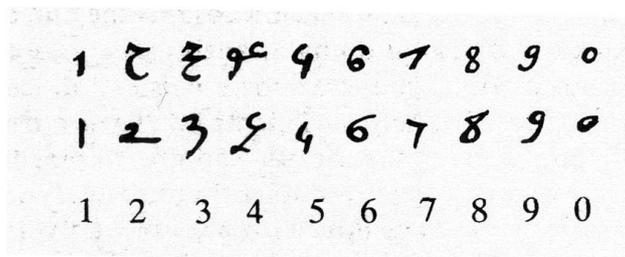


Fig. 7 – Cifre 'indo-arabe' dette *ghobār*.

inseriva un gettone con impressa la cifra che indicava il numero di bottoni sostituiti. Nell'esempio dell'*abaco a colonne* di figura 5, al posto di sette sassolini (o bottoni) che dovrebbero essere posti nella colonna delle decine si utilizza un solo simbolo-segno: la cifra 7. In cima ad ogni colonna continua, inoltre, a comparire la cifra dell'ordine di unità cui la colonna è intestata. L'*abaco a colonne* risultò quindi in perfetta sintonia con il sistema posizionale di numerazione scritta, tanto da perdere con il tempo la sua ragion d'essere e scomparire gradualmente dall'uso (figura 5).

Il termine gettone deriva dal latino *iacere* che significa gettare. Infatti, i calcoli erano gettati entro le scanalature: il gettone sostituì così di nome e di fatto l'operazione del 'gettare i sassolini', soppressa nel nuovo *abaco a colonne* o *abaco a gettoni*. Esso fu chiamato anche *abaco di Boezio* in quanto descritto verso la fine del primo libro dell'*Ars Geometrica* (figura 9), attribuita al console romano Manlio Torquato Severino Boezio (480-526), per il fatto che negli antichi manoscritti essa si trova assieme all'opera *De Institutione Arithmetica*, da lui realmente compilata come rifacimento dell'*Introduzione Aritmetica* di Nicomaco di Gerasa (I secolo d. C).⁵

⁴ Gli ultimi quattro numerali indicati sono quelli arcaici sostituiti successivamente dai simboli M X C M. Le linee orizzontali indicano che il numero deve essere moltiplicato per 1000 (vedi fig. 3).

⁵ Manlio Torquato Severino Boezio (Roma 475 circa - Pavia 524 circa) apparteneva a una antica nobile famiglia, i cui membri avevano ricoperto importanti cariche nell'Impero Romano. Anche i due figli, Boezio e Simmaco, proseguirono la tradizione di famiglia di ricoprire ruoli statali prestigiosi diventando entrambi consoli nel 522. Boezio studiò alla Scuola

Le cifre impresse sui gettoni, che inizialmente non comprendevano ancora lo zero,⁶ furono chiamate *apici* da Boezio stesso e *figure d'abaco* successivamente (figura 6) ed erano molto somiglianti alle cifre arabe dette *ghobar* (figura 7) diffuse dagli arabi occidentali della Spagna. Essi subirono molte

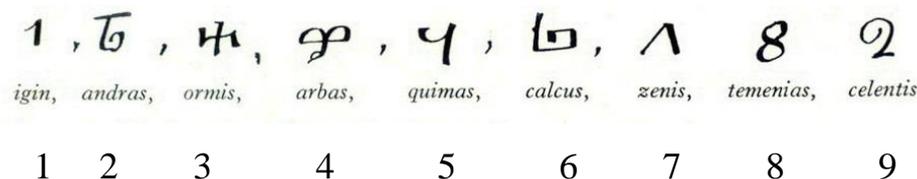


Fig. 8 – Una variante degli apici di Boezio con i loro nomi.

varianti dovute alla fantasia dei copisti, che arrivarono a ruotare sul fianco e persino a riprodurre soltanto una parte degli archetipi originali (figura 8). Soltanto dopo il XIII-XIV secolo cominciarono a stabilizzarsi in forme molto somiglianti a quelle delle nostre cifre attuali. Tale somiglianza ha fatto sospettare ad alcuni studiosi che le origini del sistema di numerazione scritturale decimale potessero risalire ai romani del II secolo (Ginanni, 1753, pp. 19-110) o addirittura a Pitagora e alla sua scuola (Romagnosi, 1827, pp. 580 e seg).⁷ La tesi di Francesco Ginanni poggia sul fatto che in un codice

di Atene, dove si insegnavano soprattutto Aristotele e Platone. Intorno al 502 si fa risalire l'inizio della sua attività letteraria e filosofica: scrisse i trattati del quadrivio (le quattro scienze fondamentali del tempo: aritmetica, geometria, astronomia e musica): *De institutione arithmetica*, *De institutione musica*, *De institutione geometrica* e *De institutione astronomica* (gli ultimi due perduti). La fama della sua grande erudizione si diffuse nell'Impero Romano d'Oriente e gli valse l'innalzamento a rango di *patricius* nel 507 e nel 510 la nomina a console *sine collega* da parte di Teodorico, carica biennale che gli diede diritto a un seggio permanente nel Senato Romano. Tradusse in latino e commentò molte opere di Aristotele, scrisse vari libri di filosofia e di teologia. Nel 522 fu nominato *magister officiorum*, alta carica nella burocrazia imperiale, molto vicina all'imperatore e dotata di vasti poteri, di cui Boezio si valse a favore di varie giuste cause. Fra queste, la difesa da un processo ingiusto dell'ex console Albino, accusato di complottare contro Teodorico. Fu proprio la difesa di Albino che causò la caduta in disgrazia di Boezio, che fu accusato, o in base ad alcune sue lettere forse falsificate, di avere sostenuto la necessità di «restaurare la libertà di Roma». Nel settembre 524 Boezio fu incarcerato a Pavia, con l'accusa di praticare arti magiche e in prigione scrisse la sua opera più famosa, il *De consolatione philosophiae*. Fu processato e nell'estate del 525 fu condannato a morte. La sentenza venne ratificata da Teodorico stesso ed eseguita nell'*Ager Calventianus*, una imprecisata località vicino Pavia, ove avvenivano le sentenze capitali.

⁶ L'utilizzo dell'abaco da parte degli "abacisti" non richiedeva l'uso dello zero per indicare una quantità mancante: bastava non mettere nulla nella colonna dell'ordine corrispondente. La necessità dell'uso dello zero fu avvertita più tardi dagli "algoristi", cioè da coloro che sostituirono l'abaco con il calcolo scritto "all'indiana" (algorismo) così detto perché faceva uso del sistema decimale posizionale e delle sue cifre, di origine indiana. *Abacus* è il termine latino con cui si designava l'abaco, mentre *abbacus* (con due b) è il termine latino con cui in Italia dal secolo XIII in poi ci si riferiva al calcolo (algorismo) basato sul sistema di numerazione scritta decimale e posizionale di origine indo-araba. Per tale motivo i due termini abaco e algorismo sono stati utilizzati come sinonimi, mentre invece erano opposti i termini abaco e algorismo. Sulle differenze fra i termini *abacus* e *abbacus* vedasi Keith Devlin (Devlin, 2012, pp. 21-22).

⁷ Francesco Ginanni (1716 -1766), di famiglia nobile, trascorse la fanciullezza in un vivace ambiente culturale scientifico e letterario che vantava illustri studiosi, laici ed ecclesiastici. Nella sua opera *Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscolarum origine* sostiene che le nostre attuali cifre sono nate in Italia e che furono usate già nel sec. II d.C. sotto l'impero di Marco Aurelio. Secondo M. Chasles, A. Humboldt, invece, sarebbero state inventate nella Scuola Pitagorica e i neo-pitagorici greci di Alessandria le avrebbero diffuse nella Roma imperiale, poi nel Vicino Oriente e in India tramite gli scambi commerciali. Da Roma il sistema di numerazione posizionale viene esportato in Spagna e nelle province romane dell'Africa settentrionale. Gli arabi lo apprendono durante le loro conquiste di queste

antico compaiono numeri rappresentati da lettere romane unite a cifre simili alle nostre attuali (Ginanni, 1753, p. 94). La tesi di Gian Domenico Romagnosi, invece, era giustificata in quanto il nuovo abaco a gettoni, dove gli apici compaiono, è indicato nell'*Ars Geometrica* con il nome di *Mensa Pythagorea*, perché attribuito ai neopitagorici della scuola alessandrina, cui apparteneva Boezio stesso. *Tavola Pitagorica* o *Arco Pitagorico*, furono poi i nomi in volgare con i quali fu battezzato il nuovo abaco a colonne, che ebbe particolare diffusione nelle scuole claustrali medievali spagnole, per opera del teologo e matematico francese Gerberto di Aurillac (940 o 950-1003 d.C.), divenuto papa col nome di Silvestro II nel 999.⁸ Lo stesso Boezio dà spiegazione del diverso 'peso' che gli *apici* hanno nelle diverse colonne dell'abaco, confermando il loro valore posizionale.

Secondo le moderne indagini filologiche, invece, sembra che l'*Ars Geometrica* non fosse di Boezio, bensì un'opera medievale risalente al secolo XI che raccoglie contributi di vari autori. La denominazione *Mensa Pythagorea* deriverebbe, in tal caso, dalla sua attribuzione ai tardo-neopitagorici medioevali e non ai neopitagorici della scuola alessandrina, seguaci diretti dell'antica scuola pitagorica. Su questa diversa attribuzione poggia la tesi di coloro che confutano le origini pitagoriche delle cifre decimali a favore dell'origine indiana.⁹

Nel riprodurre successivamente il manoscritto dell'*Ars Geometrica*, il copista, per errore, sostituì l'abaco neopitagorico con la comune tavola di moltiplicazione, di aspetto assai simile, conservando però per quest'ultima il nome di Tavola Pitagorica che designava l'abaco neopitagorico.

Dunque, la tavola di moltiplicazione che tutti noi conosciamo come "tavola pitagorica" non deve il suo nome né a Pitagora né ad alcuno dei suoi seguaci, bensì soltanto a un errore di trascrizione. Il primo a rilevare l'errore è stato Corrado Mannert nel 1801 (Mannert, 1801). Successivamente anche Michel Chasles (Chasles, 1875), V.G. Enestrom (Enestrom, 1894) e Paul Tannery (Tannery, 1897), hanno citato la sostituzione dell'abaco neopitagorico con la tavola di moltiplicazione. Guglielmo Libri, celebre matematico e bibliofilo dell'Ottocento, prese in considerazione tale errore, tant'è che nella sua tesi sull'origine delle nostre cifre menziona l'abaco pitagorico (Libri, 1839, pp. 261-280). Tuttavia, ancor oggi si perpetua questo falso storico e si continua ad attribuire a Pitagora la paternità della tavola di moltiplicazione.

province. Non esistono, però, documenti storici che attestino la conoscenza del sistema di numerazione posizionale da parte dei greci; al contrario le fonti storiche confermano l'uso da parte dei greci del periodo alessandrino della notazione numerica additiva simile a quella ebraica. (Ifrah, 1989, p.240). Se i matematici greci avessero veramente ideato il sistema di numerazione decimale posizionale, lo avrebbero applicato e certamente Aristotile ne avrebbe fatta menzione nelle sue opere, come osserva Andrea Stiattesi (Stiattesi, 1870, p. 396).

⁸ Appassionato studioso entrò in contatto con la cultura araba nella Spagna islamica, assorbendone le conoscenze matematiche e astronomiche, che si prodigò di diffondere in Europa.

⁹ Molti documenti storici attestano che le nostre attuali cifre, compreso lo zero, e la notazione decimale posizionale sono nate nella parte settentrionale dell'India nel V sec. d. C. (Bombelli, 1876 cap. IX "Se gli antichi popoli italici conoscessero la numerazione indiana, detta volgarmente araba" pp. 59-65). Gli indiani diffusero l'invenzione presso i «greci di Alessandria nell'epoca classica del Sincretismo. Da essi sarebbe passata ai Neo-Pitagorici (di cui è nota la propensione ad accogliere le idee bramini), l'ultimo dei quali è appunto Manlio Severino Boezio; da questo l'avrebbe appresa Gerberto, il quale, a sua volta, l'avrebbe diffusa in tutta l'Europa, non esclusa la Spagna; quivi gli arabi l'avrebbero trovata e se ne sarebbero impadroniti». (Loria, 1914, p. 806, si veda anche l'intero paragrafo "La pretesa origine pitagorica del sistema decimale" a pp. 800-807). Gli stessi arabi del Vicino Oriente chiamavano *hindi* le cifre da loro utilizzate, lasciando chiaramente trasparire le loro origini indiane.

Pythagorici vero, ne in multiplicationibus et participationibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt
10 sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant; a posterioribus appellabatur abacus, ut quod alta mente conceperant, melius si quasi videndo ostenderent, in
15 titiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant.

Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel characteres. Quidam enim huiuscemodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati 1, ista autem binario , tertia vero tribus , quarta vero quaternario , haec autem quinque asscriberetur , ista autem senario , septima autem septenarie conveniret , haec vero octo , ista autem novenario iungeretur . Quidam vero in huius formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto ut littera quae esset prima unitati, secunda binario tertia ternario, ceteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in huiusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscripto tantummodo sortiti sunt. Hos enim apices ita varie cet

Fig. 9 – La citazione della Mensa Pythagorea e degli apici nell'*Ars Geometrica* di Boezio. (*De Institutione Arithmetica* a cura di G. Friedlein, Lipsia, 1867, pp. 396, 397).

3. La meccanizzazione della tavola di moltiplicazione

Una geniale variante della tavola pitagorica fu introdotta dall'inventore dei logaritmi: l'astronomo, matematico e fisico scozzese lord John Napier barone di Murchiston (1550-1617), noto con il nome latinizzato di Giovanni Nepero. Questi, volendo munirsi di uno strumento di calcolo per la compilazione delle tavole dei logaritmi e per i calcoli astronomici, concepì e realizzò uno strumento fondato sulla tavola pitagorica e su una tecnica delle moltiplicazioni già nota con diversi nomi: “per graticola, per quadrettatura, per tavola, per gelosia”, probabilmente ideata in India e ivi sicuramente utilizzata sin dal VI secolo (Ibrah, 1989, p. 261), poi ampiamente utilizzata dagli arabi, quindi diffusa in Italia da Leonardo Fibonacci nel XIII secolo. I due fattori vengono scritti ai lati di una tabella con tante righe e colonne quante sono le loro cifre.¹⁰ Ogni casella, formata dall'incrocio di una riga con una colonna, è divisa dalla diagonale principale in due triangoli destinati a contenere i risultati parziali della moltiplicazione fra le cifre dei due fattori. Volendo moltiplicare 324 per 43, scritti i due numeri ai lati della tabella (figura 10a), si scrive in ciascuna casella il prodotto dei numeri corrispondenti alle

		3	2	4	
	1	0	1		
1	2	8	6	4	
	0	0	1		
3	9	6	2	3	
	9	3	2		

Fig. 10a – Schema di moltiplicazione per graticola o per gelosia.

cifre dei due fattori, ponendo nel triangolo inferiore le unità e in quello superiore le decine. Per ottenere il prodotto dei due numeri dati, basta sommare in diagonale i numeri dei triangoli delle caselle, tenendo conto degli eventuali riporti. Nel nostro esempio, nella seconda striscia diagonale $6+1+6$ dà come risultato 3 con il riporto di 1 che va sommato ai numeri nei triangoli della striscia diagonale successiva: 1, 8, 0, 9, dando come risultato 9 con il riporto di 1 che va sommato ai numeri nei triangoli della striscia successiva: 0, 2, 0, dando come risultato 3 senza alcun riporto. Il prodotto cercato è quindi 13.932.

¹⁰ Le denominazioni “per graticola, per quadrettatura, per tavola” sono chiaramente comprensibili dalla disposizione stessa a reticolo dei numeri da moltiplicare. Quella, invece, “per gelosia” deriva dalla somiglianza di questo schema di calcolo alle persiane che si usava mettere alle finestre, la cui regolazione permetteva di vedere fuori senza essere visti dall'esterno: ciò consentiva ai mariti “gelosi” di sottrarre alla vista indiscreta di estranei le loro mogli senza impedire loro di guardare fuori.

L'idea che ispirò Nepero è molto semplice e geniale: inserire, prendendolo dallo schema della “moltiplicazione per gelosia”, la separazione, con una diagonale, delle unità dalle decine nei risultati

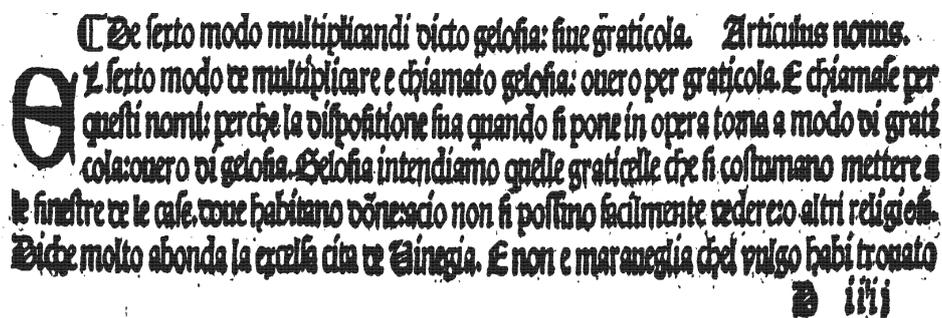


Fig. 10b – La citazione dello schema di moltiplicazione per graticola o per gelosianella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* di Luca Pacioli (Pacioli, 1494, *Distinctio Secunda, Tractatus tertius c28*): «El sexto modo de multiplicare e chiamato gelosia ouero per graticola. E chiamase per questi nomi: perche la dispositione sua quando si pone in opera torna a moda di graticola: ouero di gelosia. Gelosia intendiamo quelle graticelle che si costumano mettere ale finestre de le case doue habitano done: acio non si possino facilmente vedere: o altri religiosi di che molto abonda la excelsa cita de Vinegia»

delle moltiplicazioni fra i numeri naturali nelle caselle della tavola pitagorica e realizzare fisicamente come elementi mobili le colonne della tavola (figura 11). Il nuovo strumento fu descritto da Nepero nella sua opera *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo* nel 1617, anno della sua morte. Fu chiamato *Bacchette* o *Virgulae numeratrices* o *Ossi di Nepero*, poiché spesso le bacchette furono realizzate in avorio. Per certi aspetti somigliava all'abaco a colonne e per altri alla tavola pitagorica, ma conteneva in embrione il nuovo concetto di elaborazione automatica dei calcoli, evidenziando, in particolare, l'aspetto dei riporti. Esso realizzava una specie di tavola pitagorica a colonne mobili, che si potevano accostare componendo, con le cifre impresse nella prima casella in alto, le cifre del numero da moltiplicare. Con tale strumento era possibile eseguire più speditamente moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radice di numeri interi.

Lo strumento è fisicamente costituito da un contenitore recante una colonna fissa divisa in dieci

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	1
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	2
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	3
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	4
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	4/4	6
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	7
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	8
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	9

Fig. 11 - Le 10 bacchette mobili e il regolo fisso di Nepero.

caselle numerate da 0 a 9 senza diagonale. A ogni numero intero, da zero a nove, è dedicata una bacchetta mobile, che riporta come intestazione nella prima casella in alto la cifra corrispondente e nelle sottostanti caselle i suoi successivi multipli (figura 11). Una barra diagonale separa in ciascuna casella, come nello schema della moltiplicazione per graticola, le due cifre di ciascuno di tali multipli, ponendo sotto la diagonale le unità e sopra le decine; nei casi in cui il prodotto è a una sola cifra, viene posto lo zero sopra la diagonale. All'interno del contenitore vengono disposte, accostate alla colonna fissa, le colonne mobili che compongono il numero da moltiplicare.

Volendo, per esempio, ottenere il prodotto di 324 per 4, si accostano alla colonna fissa le bacchette del 3, del 2 e del 4 (figura 12a). Nelle caselle della riga del 4 si leggono i prodotti parziali 16, 8, 12 per i quali sono evidenziati in alto a sinistra i riporti da sommare di volta in volta: 1, 0.

3	2	4	x
0/3	0/2	0/4	1
0/6	0/4	0/8	2
0/9	0/6	1/2	3
1/2	0/8	1/6	4
1/5	1/0	2/0	5
1/8	1/2	2/4	6
2/1	1/4	2/8	7
2/4	1/6	3/2	8
2/7	1/8	3/6	9

a

3	2	4	x
0/3	0/2	0/4	1
0/6	0/4	0/8	2
0/9	0/6	1/2	3
1/2	0/8	1/6	4
1/5	1/0	2/0	5
1/8	1/2	2/4	6
2/1	1/4	2/8	7
2/4	1/6	3/2	8
2/7	1/8	3/6	9

b

Fig. 12 - Le moltiplicazioni 324 x 4 e 324 x 43 con le bacchette di Nepero.

Con le bacchette di Nepero è possibile eseguire anche moltiplicazioni fra due numeri a più cifre. Per ottenere il prodotto 324×43 , accostate le bacchette del 3, del 2 e del 4 alla bacchetta fissa, si procede come nell'esempio precedente ottenendo i prodotti parziali 324×3 e 324×4 nelle righe del 3 e del 4 (figura 12b). Quindi si sommano i due prodotti parziali $324 \times 3 = 972$ e $324 \times 4 = 1296$ scrivendone le cifre spostate di un ordine da destra:

Nell' *Organum Mathematicum* di Padre Gaspard Schott del 1668, è descritto un altro dispositivo attribuito a Nepero, costituito da cilindri paralleli divisi ciascuno in dieci zone numerate da 0 a 9.

$$\begin{array}{r} 972+ \\ 1296 = \\ 13932 \end{array}$$

4. Le proprietà della tavola pitagorica

Consideriamo la tavola pitagorica generale P_N costruita, come è noto, disponendo nella prima riga i primi N numeri interi, nella seconda i loro multipli secondo 2, nella terza i multipli secondo 3, e così via fino alla riga N . Di conseguenza anche la prima colonna contiene i primi N numeri interi, la seconda i loro multipli secondo 2, la terza i multipli secondo 3 e così via: il numero intero contenuto nella casella all'incrocio della generica riga n con la generica colonna p è dunque np .¹¹ Da tale legge di distribuzione dei numeri nella tavola e dalla proprietà commutativa della moltiplicazione discende la loro simmetria rispetto alla diagonale principale, la quale contiene i quadrati dei primi N numeri interi essendo ivi $n=p$. Inoltre i numeri delle righe e delle colonne della tavola formano progressioni aritmetiche di ragione 1 (1^a riga e colonna), di ragione 2 (2^a riga e colonna) di ragione 3 (3^a riga e colonna),...e così via.

Molte dimostrazioni delle proprietà elencate sono semplici e immediate, altre sono basate sulla proprietà della somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica che è $(a_1 + a_n) n/2$. In particolare, la somma dei primi N numeri interi è $(1 + N) N/2$.

Teorema 4.1 // *Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un numero intero sia quadrato di un altro numero intero è che termini, nella scrittura decimale, con una delle cifre 0, 1, 4, 5, 6, 9. Ovvero non può essere quadrato di un numero intero un numero terminante con una delle cifre 2, 3, 7, 8.*

Dimostrazione

Nel sistema decimale un numero intero può porsi nella forma $10d + u$, essendo d il numero delle decine e u il numero delle unità semplici. Pertanto il suo quadrato è $(10d + u)^2 = 100d^2 + 20du + u^2$. Le unità semplici del numero dato sono quindi le stesse di u^2 . Osservando la diagonale principale

¹¹ Da questo punto in poi, per ragioni di maggiore chiarezza della notazione, per indicare le generiche righe e colonne della tavola di moltiplicazione userò le lettere n, p in luogo di i, j usate all'inizio di questo articolo (parag. 1).

della tavola pitagorica P_{10} , che contiene i quadrati dei primi 10 numeri interi e quindi anche u^2 , si vede che questo deve terminare con una delle cifre 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Teorema 4.2 // *Un numero qualunque np della tavola pitagorica P_N è la media aritmetica dei due numeri della sua stessa riga n o colonna p da esso "equidistanti",¹² nonché dei k numeri¹³ che lo precedono e lo seguono sulla sua stessa riga n o colonna p .*

Per esempio, nel caso di figura 13 considerato il numero 24, per i numeri da esso equidistanti lungo la stessa riga o colonna si ha:

$$(6 + 42) / 2 = 24, \quad (12 + 36) / 2 = 24, \quad (18+30) / 2 = 24$$

$$(12+ 36) / 2 = 24, \quad (16 + 32) / 2 = 24, \quad (20+28) / 2 = 24$$

Inoltre consideriamo i numeri entro le 3 caselle che precedono e seguono 24 lungo la sua stessa riga e colonna (in questo caso è $k = 3$ spostandosi sia lungo la riga sia lungo la colonna di 24, ma si potrebbero considerare valori differenti per le due direzioni):

$$(6 + 12 + 18 + 30 + 36 + 42) / 6 = 144 / 6 = 24$$

$$(12 + 16 + 20 + 28 + 32 + 36) / 6 = 144 / 6 = 24.$$

Dimostrazione

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 13

Considerato il numero np all'incrocio della riga n con la colonna p , i numeri che lo precedono e lo seguono di k caselle sulla sua stessa riga sono rispettivamente $n(p - k)$ e $n(p + k)$. La loro somma è $n(p - k) + n(p + k) = 2np$, da cui: $np = [n(p - k) + n(p + k)]/2$. Analogo ragionamento si può ripetere considerando la colonna p .

¹² Da qui in poi equidistanti = separati dallo stesso numero di caselle.

¹³ K è un numero naturale ≥ 1 e $\leq \min \{(p - 1), (N - p)\}$ se si considera la riga n -esima, oppure ≥ 1 e $\leq \min \{(n - 1), (N - n)\}$ se si considera la colonna p -esima.

Sia ora w l'elemento centrale di $2k + 1$ numeri consecutivi della stessa riga o colonna. Per la prima parte dell'asserto, ciascuna delle k coppie di elementi equidistanti da w ha per somma $2w$ e quindi la somma totale di tali coppie è $S_k = 2wk$, da cui: $w = S_k/2k$.

Teorema 4.3 // *La somma dei numeri situati nei quattro estremi delle mediane o nei quattro vertici di un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$) contenuto nella tavola pitagorica P_N è quattro volte il numero della casella centrale.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 14a

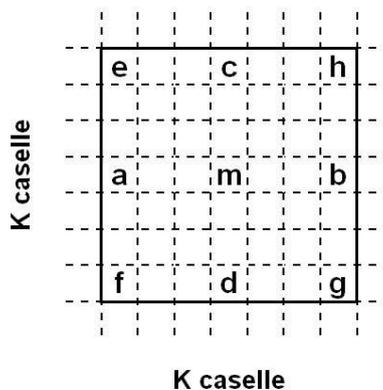


Fig. 14b

Per esempio con riferimento al quadrato evidenziato in figura 14a:

$$12 + 36 + 16 + 32 = 4 \times 24 = 96; \quad 8 + 24 + 48 + 16 = 4 \times 24 = 96.$$

Dimostrazione

Considerato un qualunque quadrato di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$) contenuto in P_N (figura 14b), le coppie di numeri (a, b) , (c, d) situati ai quattro estremi delle mediane del quadrato appartengono rispettivamente alla stessa riga e alla stessa colonna dell'elemento centrale m e sono da esso equidistanti. Per il teorema 4.2 è: $a + b = 2m$, $c + d = 2m$ e quindi $a + b + c + d = 4m$.

Analogamente, le coppie di numeri (e, f) , (h, g) che figurano nei quattro vertici del quadrato appartengono rispettivamente alle medesime colonne di a e di b e sono da essi equidistanti, per cui, ancora in virtù del teorema 4.2, si ha: $e + f = 2a$, $h + g = 2b$ e quindi, sommando membro a membro e tenendo conto che è $a + b = 2m$, si ha infine:

$$e + f + h + g = 2(a + b) = 4m.$$

Teorema 4.4 // La somma S_l dei numeri delle caselle laterali di un quadrato di lato k caselle (k

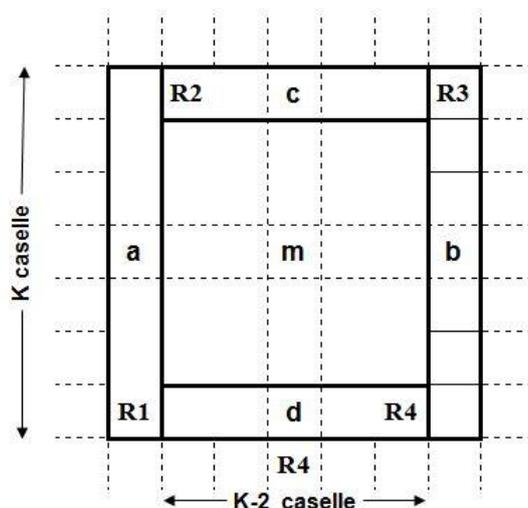


Fig. 15

naturale dispari $\leq N$) contenuto nella tavola pitagorica P_N è tante volte il numero m della casella centrale quante sono le caselle laterali. Poiché queste sono $4(k-1)$ si ha dunque:

$$S_l = 4(k - 1)m \tag{1}$$

La (1) si applica anche nel caso in cui il quadrato coincida con l'intera tavola pitagorica ponendo $k = N$.

Per esempio, con riferimento al quadrato evidenziato in figura 14a:

$$S_l = 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 30 + 36 + 42 + 48 + 40 + 32 + 24 + 16 + 14 + 12 + 10 = 4(5 - 1) \times 24 = 16 \times 24 = 384.$$

Dimostrazione

In un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$), il numero delle caselle laterali è $4(k - 1)$. Per il teorema 4.2, la somma dei numeri contenuti nei rettangoli R1, R2, R3, R4 evidenziati in figura 15 sono rispettivamente:

$$(k - 1)a + a, (k - 3)c + c, (k - 1)b + b, (k - 3)d + d.$$

Pertanto, sommando e dopo semplici passaggi, è $S_l = (a + b + c + d)k - 2(c + d)$. Quindi, essendo per il teorema 4.3: $a + b + c + d = 4m$ e per il teorema 4.2: $c + d = 2m$, risulta infine: $S_l = 4mk - 4m = 4(k - 1)m$.

Teorema 4.5 // *La somma dei numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica P_N è:*

$$S_l = (N - 1)(N + 1)^2 \quad (2)$$

Per esempio, nella tavola pitagorica P_{10} è $S_l = (10 - 1)(10 + 1)^2 = 1089$, risultato che il lettore volenteroso può verificare effettuando la somma dei numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica costruita con i primi 10 numeri naturali.

Dimostrazione

Ripartiamo i numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica nei rettangoli evidenziati in figura 16. I numeri contenuti in ciascuno di questi sono per:

$$\begin{aligned} \text{(R1): } & 2, 3, 4, \dots, N; \quad \text{(R2): } 1, 2, 3, \dots, N - 1; \\ \text{(R3): } & N, 2N, 3N, \dots, (N - 1)N; \quad \text{(R4): } 2N, 3N, 4N, \dots, N^2. \end{aligned}$$

Essi costituiscono progressioni aritmetiche di ragione 1 per i rettangoli 1 e 2, di ragione N per i rettangoli 3 e 4. Pertanto, osservando che in ciascun rettangolo sono contenuti $(N - 1)$ numeri, le loro somme sono:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(2+N)(N-1)}{2}, \quad S_2 = \frac{(1+N-1)(N-1)}{2}, \\ S_3 &= \frac{[N+(N-1)N](N-1)}{2}, \quad S_4 = \frac{(2N+N^2)(N-1)}{2} \end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro, dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene la (2).

Teorema 4.6 // *Il numero della casella centrale della tavola pitagorica P_N (N naturale dispari) è il quadrato della media aritmetica fra il primo e l'ultimo numero della prima riga (o colonna) della tavola*

$$m = \left(\frac{1+N}{2}\right)^2 \quad (3)$$

Per esempio, nella tavola pitagorica P_9 si ha $m = \left(\frac{1+9}{2}\right)^2 = 25$.

Dimostrazione

Nel caso in cui N è dispari, e quindi la tavola pitagorica ha un elemento centrale, applicando entrambi i teoremi 4.4 e 4.5, che forniscono la somma dei numeri laterali della tavola, si può scrivere: $4(N - 1)m = (N - 1)(N + 1)^2$ da cui la (3).

Teorema 4.7 // La somma dei numeri di un rettangolo di s colonne per t righe (s e t naturali $\leq N$), contenuto nella tavola pitagorica P_N , è il prodotto fra le somme dei numeri d'ordine di quelle colonne e di quelle righe, ovvero è:

$$S_R = \frac{2p+s-1}{2} s \frac{2n+t-1}{2} t \quad (4)$$

essendo p, n i numeri d'ordine, rispetto alla tavola, della prima colonna e della prima riga del rettangolo considerato.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 17.

Per esempio la somma totale S_R dei numeri contenuti nel rettangolo evidenziato in azzurro in figura 17 è:

$$S_R = 8 + 12 + 16 + 10 + 15 + 20 = 81$$

Poiché 8 si trova nella colonna 2 e riga 4, 12 nella colonna 3 e riga 4, 16 nella colonna 4 e riga 4, 10 nella colonna 2 e riga 5, 15 nella colonna 3 e riga 5, 20 nella colonna 4 e riga 5, applicando la prima parte dell'enunciato del teorema si ha

$$S_R = (2 + 3 + 4) \times (4 + 5) = 9 \times 9 = 81.$$

Oppure applicando la (4) essendo $s = 3, t = 2, p = 2, n = 4$:

$$S_R = \frac{2 \times 2 + 3 - 1}{2} \times 3 \times \frac{2 \times 4 + 2 - 1}{2} \times 2 = 9 \times 9 = 81$$

Dimostrazione

Le righe del rettangolo (figura 18) contengono i multipli dei numeri $p, p+1, p+2, \dots, p+s-1$ rispettivamente secondo $n, n+1, n+2, \dots, n+t-1$ (figura 18).

La somma dei numeri della prima riga del rettangolo è:

	p	$p+1$	$p+2$	$p+s-1$
n	np	$n(p+1)$	$n(p+2)$	$n(p+s-1)$
$n+1$	$(n+1)p$	$(n+1)(p+1)$	$(n+1)(p+2)$	$(n+1)(p+s-1)$
$n+2$	$(n+2)p$	$(n+2)(p+1)$	$(n+2)(p+2)$	$(n+2)(p+s-1)$
$n+t-1$	$(n+t-1)p$	$(n+t-1)(p+1)$	$(n+t-1)(p+2)$	$(n+t-1)(p+s-1)$

Fig. 18.

$$n[p + (p + 1) + (p + 2) + \dots + (p + s - 1)] = n \frac{(2p + s - 1)}{2} s$$

quella dei numeri della seconda riga è:

$$(n+1)[p+(p+1) + (p+2) + \dots + (p+s-1)] = (n+1) \frac{(2p+s-1)}{2} s$$

e così via fino alla somma dei numeri dell'ultima riga t :

$$(n+t-1)[p+(p+1)+(p+2)+\dots+(p+s-1)] = (n+t-1) \frac{(2p+s-1)}{2} s$$

Addizionando le somme dei numeri delle t righe così trovate, si ottiene la somma S_R dei numeri contenuti nel rettangolo:

$$[n+n+1)+(n+2) + \dots + (n+t - 1)] [p+(p+1)+(p+2)+\dots+(p+s-1)] \quad (4.1)$$

Le somme indicate entro le due parentesi quadre sono rispettivamente la somma dei numeri d'ordine delle t righe e delle s colonne dei numeri del rettangolo, il che dimostra la prima parte dell'asserto.

Inoltre, le somme indicate entro le due parentesi quadre della (4.1) sono somme rispettivamente di t e s termini consecutivi di progressioni aritmetiche. Pertanto dalla (4.1) si ottiene immediatamente:

$$S_R = \frac{2p + s - 1}{2} s \frac{2n + t - 1}{2} t$$

ovvero la (4).

Nel caso particolare di un quadrato, ponendo nella (4) $s = t = k$, la somma S_Q dei numeri in esso contenuti è:

$$S_Q = (2p + k - 1) (2n + k - 1) \left(\frac{k}{2}\right)^2 \quad (5)$$

essendo p, n i numeri d'ordine, rispetto alla tavola pitagorica, della prima colonna e della prima riga del quadrato considerato.

Per esempio, nel caso del quadrato verde evidenziato nella tavola pitagorica di figura 17, si ha:

$$S_Q = 30 + 35 + 40 + 36 + 42 + 48 + 42 + 49 + 56 = 378$$

ovvero applicando il teorema 4.7:

$$S_Q = (6 + 7 + 8) \times (5 + 6 + 7) = 21 \times 18 = 378:$$

oppure applicando la (5) essendo $k = 3, p = 6, n = 5$:

$$S_Q = (2 \times 6 + 3 - 1) (2 \times 5 + 3 - 1) (3/2)^2 = 14 \times 12 \times 9 / 4 = 378.$$

Dal teorema 4.7 discende il seguente corollario:

Corollario 4.7.1 // *La somma S_{P_N} dei numeri della tavola pitagorica P_N è il quadrato della somma dei primi N numeri interi:*

$$S_{P_N} = \left(\frac{1+N}{2} N \right)^2 \quad (6)$$

e quindi la somma dei numeri della tavola pitagorica P_N è sempre un quadrato perfetto, qualunque sia N .

Per esempio, la somma dei numeri della tavola pitagorica relativa ai primi 10 numeri interi è:

$$S_{P_{10}} = \left(\frac{1+10}{2} \right) 10 = 55^2 = 3025.$$

Dimostrazione

La (6) si ottiene ponendo $p = n = 1, k = N$ nella (5). Si ricorda, inoltre, che la somma dei primi N numeri interi è $\frac{1+N}{2} N$.

Teorema 4.8 // *La somma S_Q dei numeri di un quadrato di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$) della tavola pitagorica P_N è tante volte il numero m della casella centrale quanti sono i numeri del quadrato stesso, ovvero il numero m della casella centrale è mediana e media aritmetica dei numeri del quadrato:*

$$S_Q = mk^2, \quad m = \frac{S_Q}{k^2} \quad (7)$$

Il quadrato può ovviamente coincidere con l'intera tavola pitagorica ($k = N$). Se m è un quadrato perfetto lo è anche S_Q : se il numero della casella centrale del quadrato è un quadrato perfetto, lo è anche la somma dei numeri del quadrato. Tale proprietà vale quindi per qualunque quadrato della tavola pitagorica avente la casella centrale sulla diagonale della tavola (che contiene i quadrati dei primi N numeri interi).

Per esempio, il numero della casella centrale del quadrato di 3 caselle evidenziato in verde nella figura 17 è 42. Pertanto è

$S_Q = 9 \times 42 = 378$, che, come precedentemente visto, è effettivamente la somma dei numeri di quel quadrato.

Dimostrazione

La (5) si può anche scrivere:

$$S_Q = (2p+k-1)(2n+k-1) \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(p + \frac{k-1}{2}\right) \left(n + \frac{k-1}{2}\right) k^2 \quad (8)$$

Osservando che, nel caso di k dispari, il numero della casella centrale del quadrato è:

$$m = \left(p + \frac{k-1}{2}\right) \left(n + \frac{k-1}{2}\right)$$

e che k^2 è il numero degli elementi del quadrato, rimane dimostrato il teorema.

Teorema 4.9 // *In un qualunque quadrato contenuto nella tavola pitagorica P_N i prodotti dei numeri delle due diagonali sono uguali.*

Per esempio, per il quadrato evidenziato in figura 14a si ha:

$$P' = 8 \times 15 \times 24 \times 35 \times 48 = 4838400, \quad P'' = 24 \times 25 \times 24 \times 21 \times 16 = 4838400.$$

Dimostrazione

Si consideri nella tavola pitagorica P_N un qualunque quadrato di lato k caselle ($k \leq N$) e siano n, p rispettivamente i numeri d'ordine, rispetto all'intera tavola, della prima riga e della prima colonna del quadrato (figura 19).

Ciascun termine della diagonale principale del quadrato è il prodotto di due fattori che si

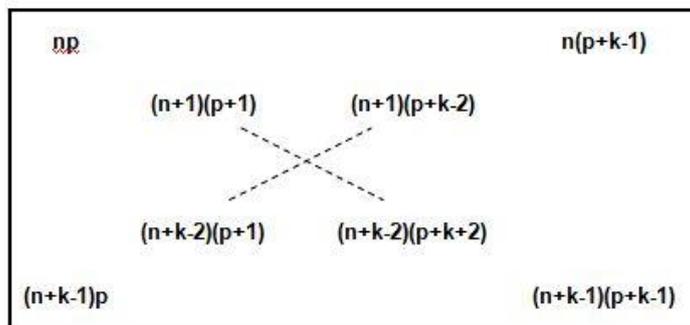


Fig. 19.

incrementano di una unità spostandosi di una riga e di una colonna in senso crescente, iniziando dal primo termine in alto a sinistra che vale np :

$$P' = n p (n+1)(p+1) \dots (n+k-2)(p+k-2)(n+k-1)(p+k-1)$$

ovvero, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$P' = n (n+1) \dots (n+k-2)(n+k-1)p(p+1) \dots (p+k-2)(p+k-1) \quad (9)$$

Analogamente, ciascun termine della diagonale secondaria è il prodotto di due fattori: il primo si incrementa di una unità spostandosi di una riga in senso crescente, mentre il secondo si decrementa di una unità spostandosi di una colonna in senso decrescente, cominciando dall'ultimo termine in alto a destra che vale $n(p+k-1)$. Il loro prodotto è quindi:

$$P'' = n (p+k-1) (n+1) (p+k-2) \dots (n+k-2) (p+1) (n+k-1)p$$

ovvero, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$P'' = n(n+1) \dots (n+k-2) (n+k-1)p(p+1) \dots (p+k-2) (p+k-1) \quad (10)$$

Dal confronto delle (9) (10) risulta che i fattori dei due prodotti P' , P'' sono identici, e pertanto è $P' = P''$.

5. Quadrati *home* della tavola pitagorica

Consideriamo ora i quadrati di lato 1, 2, 3, ..., N caselle della tavola pitagorica generale P_N che hanno in comune la prima casella in alto a sinistra (figura 20). Chiameremo tali quadrati *home* e li indicheremo con la notazione $Q_{1;k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, N$). Essi godono di diverse proprietà.

Teorema 5.1 // *La differenza tra le somme dei termini delle diagonali principale e secondaria di un*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 20.

*quadrato qualunque di lato k caselle (k naturale $\leq N$) contenuto nella tavola pitagorica P_N è uguale alla somma dei termini della diagonale secondaria di un quadrato *home* di lato $k-1$ caselle:*

$$S'_k - S''_k = S''_{Q_{1,k-1}} \quad (11)$$

Per esempio, considerato il qualunque quadrato di lato 5 caselle evidenziato in figura 14a, si ha:

$$S'_5 = 8+15+24+35+48 = 130; S''_5 = 24+25+24+21+16 = 110.$$

La somma dei termini della diagonale secondaria del quadrato *home* di lato 4 caselle è $S''_{Q_{1,4}} = 4+6+6+4 = S'_5 - S''_5 = 20$.

Dimostrazione

Si consideri un quadrato di lato k caselle (k naturale $\leq N$) della tavola pitagorica P_N e siano $n; p$ i numeri d'ordine, rispetto all'intera tavola, della prima riga e della prima colonna del quadrato (figura 19).

La somma dei termini della diagonale principale è:

$$S'_k = n p + (n+1)(p+1) + (n+2)(p+2) + \dots + (n+k-1)(p+k-1)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} S'_k &= \sum_{i=0}^{k-1} (n+i)(p+i) = p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + \sum_{i=1}^{k-1} (n+i) i = \\ &= p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + n \sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{k-1} i^2 \end{aligned}$$

La somma dei termini della diagonale secondaria è invece:

$$S''_k = n(p+k-1) + (n+1)(p+k-2) + (n+2)(p+k-3) + \dots + (n+k-1)p$$

ovvero:

$$\begin{aligned} S''_k &= \sum_{i=0}^{k-1} (n+i)(p+k-1-i) = \sum_{i=0}^{k-1} [(n+i)p + (n+i)(k-1-i)] = \\ &= p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + n \sum_{i=0}^{k-2} (k-1-i) + \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i) \end{aligned}$$

Osservando che è:

$$n \sum_{i=1}^{k-1} i = n \sum_{i=0}^{k-2} (k-1-i)$$

trattandosi della stessa somma con gli addendi in ordine inverso, si ha:

$$\begin{aligned} S''_k &= p \sum_{i=0}^{k-1} (n+i) + n \sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i) \\ S'_k - S''_k &= \sum_{i=1}^{k-1} i^2 - \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i) \end{aligned}$$

ma poiché è:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) + \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i)$$

si ha:

$$S'_k - S''_k = \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) \quad (12)$$

Indicizzando con i le righe, il generico numero della diagonale secondaria di un quadrato *home* di lato k caselle è $i(k+1-i)$ e quindi la somma dei numeri della diagonale è:

$$S''_{Q_{1,k}} = \sum_{i=1}^k i(k+1-i) \quad (13)$$

Ponendo nella (13) $k-1$ al posto di k , si ottiene $S''_{Q_{1,k-1}} = \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i)$ e quindi la (12) diventa:

$$S'_k - S''_k = S''_{Q_{1,k-1}}$$

Dal teorema 5.1 discende il seguente corollario:

Corollario 5.1 // *La somma dei termini della diagonale principale di ciascun quadrato home della tavola pitagorica P_N è uguale alla somma dei termini delle diagonali secondarie del quadrato stesso e del quadrato home precedente.*

Per i primi 10 quadrati *home*, si sono calcolate le somme dei termini delle diagonali principale $S'_{Q_{1,k}}$ e secondaria $S''_{Q_{1,k}}$:

	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$Q_{1,4}$	$Q_{1,5}$	$Q_{1,6}$	$Q_{1,7}$	$Q_{1,8}$	$Q_{1,9}$	$Q_{1,10}$
$S''_{Q_{1,k}}$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
$S'_{Q_{1,k}}$		5	14	30	55	91	140	204	285	385

Nello schema è evidenziato, a titolo di esempio, che la somma $S'_{Q_{1,5}} = 55$ è pari alla somma di $S''_{Q_{1,5}} = 35$ e $S''_{Q_{1,4}} = 20$.

Con tale schema è immediato verificare la proprietà indicata per tutti i primi 10 quadrati *home* di P_N .

Teorema 5.2 // *La somma dei numeri contenuti in un quadrato home $Q_{1,k}$ della tavola pitagorica P_N è il quadrato della somma dei numeri della prima riga (o colonna) del quadrato stesso:*

$$S_{Q_{1,k}} = \left(\frac{1+k}{2} k \right)^2 \quad (14)$$

Per esempio, la somma dei numeri contenuti nel terzo quadrato *home* $Q_{1,3}$ (figura 20) è:

$$\begin{aligned} (1+2+3) + (2+4+6) + (3+6+9) &= (1+2+3) + 2(1+2+3) + 3(1+2+3) = \\ &= (1+2+3) (1+2+3) = (1+2+3)^2. \end{aligned}$$

Dimostrazione

Infatti, i quadrati *home* di una tavola pitagorica P_N sono essi stessi tavole pitagoriche P_1, P_2, P_3, \dots per le quali vale il corollario 5.1.

Teorema 5.3 // *La somma dei numeri compresi fra due quadrati home successivi $Q_{1,k-1}$, $Q_{1,k}$ della tavola pitagorica P_N è il cubo del numero della prima riga (o colonna) compreso fra i due quadrati stessi, ovvero è k^3 .*

Per esempio, la somma dei numeri contenuti fra i quadrati home $Q_{1,2}$ e $Q_{1,3}$ (figura 20) è: $3+6+9+6+3 = 27 = 3^3$, essendo 3 il numero della prima riga compreso fra $Q_{1,2}$ e $Q_{1,3}$.

Dimostrazione

La somma dei numeri compresi fra due quadrati home successivi $Q_{1,n-1}$ e $Q_{1,n}$ è pari alla differenza fra le somme dei numeri contenuti nei due quadrati stessi e quindi per il teorema 5.2:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+k}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1+k-1}{2}\right)^2 (k-1)^2 &= k^2 \left[\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{k^2}{4} (k^2+2k+1-k^2+2k-1) = k^3. \end{aligned}$$

Dai teoremi 5.2 e 5.3 discende che:

Corollario 5.2 // *La somma dei cubi dei primi N numeri interi è uguale alla somma dei numeri della tavola pitagorica P_N e quindi al quadrato della somma dei primi N numeri interi:*

$$1^3+2^3+3^3 + \dots + N^3 = S_{P_N} = (1+2+3+ \dots + N)^2$$

ovvero è:

$$\sum_{i=1}^N i^3 = \left(\frac{1+N}{2} N\right)^2 \quad (15)$$

Dimostrazione

Considerata P_N come unione dei quadrati home di lato 1, 2, 3, ... N caselle, la somma dei numeri contenuti in P_N è la somma delle somme dei numeri compresi fra i successivi quadrati home che, per il teorema 5.3, valgono $1^3, 2^3, 3^3, \dots, N^3$.

D'altra parte, la somma dei numeri contenuti nella tavola pitagorica P_N , per il corollario 4.1, è il quadrato della somma dei primi N numeri interi, che è fornita dalla (6). Rimane dunque dimostrata la (15).

Per esempio, nella tavola pitagorica P_4 , possiamo considerare i suoi numeri ripartiti in sottoinsiemi formati dai numeri compresi fra i quadrati home $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$, $Q_{1,4}$

$$1 = 1^3 = 1$$

$$2+4+2 = 2^3 = 8$$

$$3+6+9+6+3 = 3^3 = 27$$

$$4+8+12+16+12+8+4 = 4^3 = 64$$

La loro somma è dunque $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ ma anche per la (15):

$$\left(\frac{1+4}{2} 4\right)^2 = 10^2 = 100.$$

6. Cubi e ipercubi pitagorici

Possiamo pensare di estendere al caso del prodotto fra tre numeri interi lo schema di calcolo della tavola pitagorica. Avremo in tal modo, in luogo della tavola pitagorica, il cubo pitagorico generalizzato CP_N , inteso come tabella a tre entrate per il prodotto di tre numeri interi.

In fondo, si tratta di passare da un caso bidimensionale a uno tridimensionale. In luogo di righe e colonne, parleremo in tal caso di spigoli a, b, c del cubo pitagorico, disposti per esempio secondo gli assi x, y, z di una terna cartesiana.

Il prodotto fra i numeri interi n, p, q si troverà nella cella (cubo elementare) individuata dalle tre coordinate n, p, q . In tal modo si possono ottenere analoghe proprietà di quelle precedentemente viste per la tavola pitagorica.

A titolo di esempio accenniamo all'estensione al caso tridimensionale dei teoremi 4.2, 4.3. Il teorema 4.2 nel caso del cubo pitagorico diventa:

Teorema 6.1 // *Un numero qualunque del cubo pitagorico $3-CP_N$ è la media aritmetica dei due numeri da esso "equidistanti" nonché dei k (k naturale $\leq N$)¹⁴ numeri che lo precedono e lo seguono nella direzione di uno stesso spigolo del cubo.*

Dimostrazione

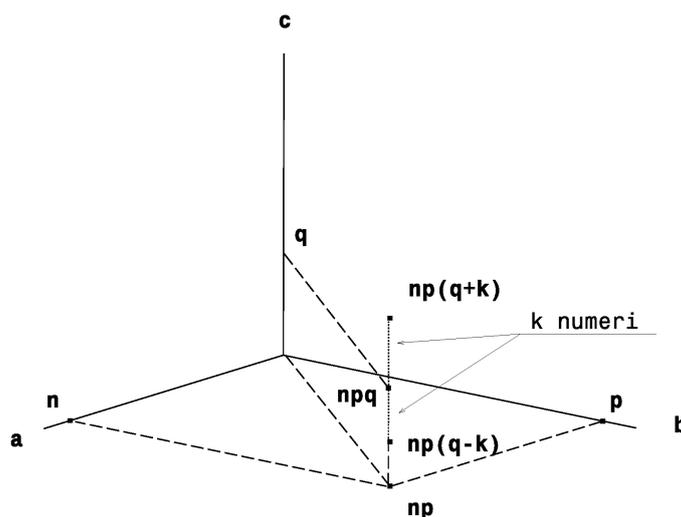


Fig. 21.

¹⁴ Analogamente alla nota 12: K è un numero naturale ≥ 1 e $\leq \min \{(n-1), (N-n)\}$ se si considera lo spigolo a , oppure ≥ 1 e $\leq \min \{(p-1), (N-p)\}$ se si considera lo spigolo b , oppure ≥ 1 e $\leq \min \{(q-1), (N-q)\}$ se si considera lo spigolo c .

Infatti, considerato un numero qualunque npq del cubo pitagorico (figura 21), i due numeri da esso distanti k celle secondo la direzione dello spigolo c del cubo sono $np(q-k)$ e $np(q+k)$, per cui la loro somma è: $np(q-k) + np(q+k) = 2npq$, da cui:

$$npq = \frac{np(q-k) + np(q+k)}{2}$$

Sia ora v l'elemento centrale di $2k + 1$ numeri consecutivi nella direzione dello spigolo c del cubo pitagorico. Per la prima parte dell'asserto, ciascuna delle k coppie di elementi equidistanti da v ha per somma $2v$ e quindi la somma totale di tali coppie è $S_k = 2vk$, da cui: $v = S_k / 2k$.

Analoghi ragionamenti si possono ripetere, per entrambe le parti dell'enunciato, considerando le

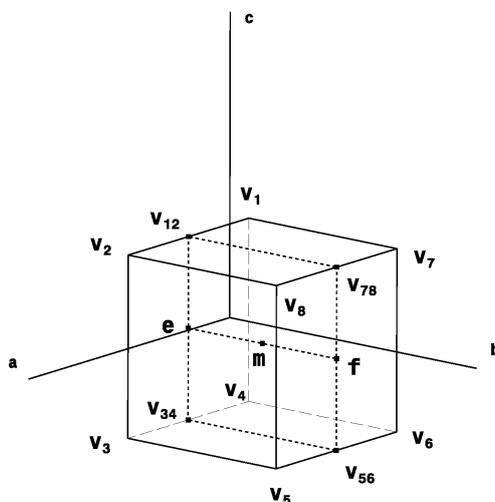


Fig. 22.

direzioni secondo gli altri due spigoli a , b del cubo pitagorico. Il teorema è pertanto dimostrato.

Il teorema 4.3 nel caso del cubo pitagorico diventa:

Teorema 6.2 // *La somma dei numeri situati negli otto vertici di un cubo di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$) contenuto nel cubo pitagorico 3- CP_N è otto volte il numero m della cella centrale.*

Si noti che nel caso bidimensionale la somma dei numeri contenuti nei quattro vertici di un quadrato della tavola pitagorica è $4 = 2^2$ volte il numero mediano del quadrato; nel caso tridimensionale la somma dei numeri contenuti negli otto vertici di un cubo del cubo pitagorico è $8 = 2^3$ il numero mediano del cubo... Questa proprietà può essere estesa al caso più generale dell'ipercubo pitagorico n -dimensionale: *la somma dei numeri contenuti nei 2^n vertici di un ipercubo n -dimensionale di lato k caselle (k naturale dispari $\leq N$) contenuto nell'ipercubo pitagorico n -dimensionale n - CP_N è 2^n volte il numero m della cella centrale.*

L'estensione di questa proprietà all'ipercubo n -dimensionale sarà trattata in un successivo articolo.

Dimostrazione

Infatti (figura 22), per il teorema precedente si ha:

$$e + f = 2m \tag{16}$$

$$e = \frac{v_{12} + v_{34}}{2} = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_3 + v_4}{2} \right) \frac{1}{2}$$
$$f = \frac{v_{56} + v_{78}}{2} = \left(\frac{v_5 + v_6}{2} + \frac{v_7 + v_8}{2} \right) \frac{1}{2} \quad (17)$$

e quindi sostituendo le (17) nella (16):

$$\frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} + \frac{v_5 + v_6 + v_7 + v_8}{4} = 2m$$

e infine:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 8m.$$

Bibliografia

Boezio Severino (1867). *De Institutione Arithmetica*, (a cura di G. Friedlein), Lipsia.

Bombelli Rocco (1976). *Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica*, 1, Roma.

Boncompagni Baldassarre (1877). «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 10 anno 1877.

Boncompagni Baldassarre (1881). «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 14 anno 1881.

Bortolotti Ettore, Gigli Duilio (1929). *Aritmetica pratica*, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, vol. 1° parte 1a, Milano, Hoepli.

Chasles Michel (1843). «Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris», 16 e 17 anno 1843.

Chasles Michel (1867). «Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris», 64 anno 1867.

Chasles Michel (1875). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Parigi, Gauthier - Villars 1875, p. 468.

Devlin Keith (2012). *I numeri magici di Fibonacci* (titolo originale: *The man of Numbers*), Bergamo, BUR Rizzoli.

Enciclopedia Generale Illustrata (1969), vol. IV, p. 9, Milano, Rizzoli Larousse..

Enestrom Von Gustaf . (1894). «Bibliotheca Mathematica» (2) 8, (1894), p. 120.

Garrucci Raffaele (1853). *Notizia di una tavoletta calcolatoria romana*. «Bulettno Archeologico Napolitano», Nuova serie, anno II, Dicembre 1853, pp. 93-96.

Ginanni Francesco (1753). *Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscolarum origine*. In: "Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici" a cura di Calogierà, Tomo 48, pp. 19-110, Venezia.

Ifrah Georges (1989). *Storia universale dei numeri*, Milano, Mondadori, 1989.

Libri Guglielmo (1839). *Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens*. «Journ. De Mathématiques», T. IV, 1839.

Loria Gino (1914). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano, Hoepli.

Mannert Corrado (1801). *De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine pythagorica*, Norimberga.

Napier John (1617). *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo*. Edimburgo, Andreas Hart.

Narducci Enrico – «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche», 15 anno 1882, 14.

Nicotra Luca (2009). *La tavola pitagorica: un falso storico dimenticato*. «Alice&Bob», n. 15, 2009, MatePristem Bocconi Springer-Verlag, Milano. La versione completa di approfondimenti è in [http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica](http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica;);

Nicotra Luca (2013). *Proprietà della tavola pitagorica*. «Alice&Bob», n. 36-37, 2013, MatePristem Bocconi Springer-Verlag, Milano. La versione completa è pubblicata in [http://matematica.unibocconi.it/articoli/propriet%C3%A0-della-tavola-pitagorica](http://matematica.unibocconi.it/articoli/propriet%C3%A0-della-tavola-pitagorica;); http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/Propriet%C3%A0TavolaPitagorica_Integrale-web_0.pdf.

Pacioli Luca (1494), *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Paganino de' Paganini, Venezia, p. .

Romagnosi Gian Domenico (1827). *Supplemento ed illustrazioni alla seconda parte delle Ricerche storiche sull'India di Robertson*. Tomo II, VI, Milano, Ferrario.

Spinoso Giuseppe (1963). «La scienza e i giovani», 1-2 anno XII-1963, Le Monnier, p. 56.

Stiattesi Andrea, (1870). *Sull'Aritmetica. Dissertazione storica-critica*. In: «Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche», Tomo III (novembre 1870).

Tannery Paul (1897). «L'Intermediaire des Mathematiciens» 4 (1897), pp. 162-163.

