SULLE FUNZIONI SIMMETRICHE COMPLETE

Non è, nè può essere, scopo di questa Nota un'ampia trattazione delle proprietà di queste funzioni, alle quali valenti Autori hanno dedicato più d'una Memoria. Ciò che qui si trova è soltanto una elementare introduzione allo studio dell'importante argomento, la quale è svolta con semplicità di metodo, e forma il compimento promesso a quanto da me è stato esposto, in questo Periodico, (*) sulla divisione dei polinomi interi.

1.

Essendo

$$P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$
$$D^{(r)} = x^r - b_1 x^{r-1} - \dots - b_{r-1} x - b_r$$

due polinomi interi, è stato dimostrato che i coefficienti del quoziente Q e del resto R, della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$, si possono comporre mediante $n-r$ coefficienti simbolici $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, \dots b_1^{(n-r)}$. Questi, come dipendenti razionalmente dai coefficienti di $D^{(r)}$, sono esprimibili per funzioni simmetriche delle radici dell'equazione $D^{(r)} = 0$, e precisamente per quelle conosciute sotto il nome di *funzioni omogenee o simmetriche complete.*

Se con V_m indichiamo la funzione simmetrica completa del grado m, relativa agli elementi $\alpha, \beta, \gamma, \dots \rho$, vale a dire, se per $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ si ha:

$$V_0 = 1$$
$$V_1 = \sum \alpha$$
$$V_2 = \sum \alpha\beta + \sum \alpha^2$$
$$V_3 = \sum \alpha\beta\gamma + \sum \alpha\beta^2 + \sum \alpha^3$$
$$V_4 = \sum \alpha\beta\gamma\delta + \sum \alpha\beta\gamma^2 + \sum \alpha\beta^3 + \sum \alpha^2\beta^2 + \sum \alpha^4$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

(*) Anno VII, pag. 127-132 e pag. 178-185.

potremo porre, in generale:

$$V_m = \sum\sum \alpha^{\lambda_1} \beta^{\lambda_2} \gamma^{\lambda_3} \dots \mu^{\lambda_m}$$

estendendo il primo segno $\sum$ ai sistemi di valori positivi, interi o nulli delle λ, che verificano l'equazione

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_m = m$$

colla condizione, già posta in chiaro dalle espressioni di V_1, V_2, V_3 e V_4, che *ogni soluzione, comprendente un determinato numero delle* λ, *sia considerata una volta sola, e in maniera che i valori delle* λ *differenti da zero si succedano in ordine di grandezza crescente, cominciando sempre da* λ_1.

2.

Si dimostra facilmente il teorema:

Se il polinomio $D^{(r)}$ *è il prodotto di* k *polinomi interi* X_1, X_2, ... X_k, *dei gradi* $r_1, r_2, \dots r_k$, *respettivamente, rapporto alla* x, *e se* Q_1 *è il quoziente di* $P^{(n)}$ *diviso per* X_1, Q_2 *è il quoziente di* Q_1 *diviso per* X_2, *ecc., e infine* Q_k *è il quoziente di* Q_{k-1} *diviso per* X_k, *sarà* Q_k *il quoziente di* $P^{(n)}$ *diviso per* $D^{(r)}$.

Infatti, posto

$$(1)\quad P^{(n)} = X_1 Q_1 + R_1,\ Q_1 = X_2 Q_2 + R_2,\ Q_2 = X_3 Q_3 + R_3, \dots Q_{k-1} = X_k Q_k + R_k$$

se ne deduce, moltiplicando la seconda eguaglianza per X_1, la terza per $X_1 X_2$, ecc., la k^{esima} per $X_1 X_2 \dots X_{k-1}$, sommando e riducendo:

$$(2)\quad P^{(n)} = X_1 X_2 \dots X_k Q_k + (X_1 X_2 \dots X_{k-1} R_k + X_1 X_2 \dots X_{k-2} R_{k-1} + \dots + X_1 R_2 + R_1)$$

e per l'ipotesi fatta sui gradi dei polinomi X_1, X_2, ... X_k, è manifesto che il grado del prodotto $X_1 X_2 \dots X_{k-1} R_k$ sarà, al più, eguale a

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1} + (r_k - 1)$$

e quindi minore del grado del divisore $D^{(r)}$. E poichè, evidentemente, il termine considerato ha il maggior grado tra tutti quelli che compongono il polinomio in parentesi, ne segue che, indicando con Q il quoziente e con R il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$, sarà

$$Q = Q_k$$

$$R = X_1 X_2 \dots X_{k-1} R_k + X_1 X_2 \dots X_{k-2} R_{k-1} + \dots + X_1 R_2 + R_1.$$

Adunque, per la prima di queste uguaglianze, il quoziente Q potrà essere trovato, come nell'Aritmetica, anche col mezzo delle divisioni indicate dal sistema delle (1), c. d. d..

Le condizioni

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ \dots\ R_k = 0$$

sono necessarie e sufficienti affinchè il polinomio $P^{(n)}$ sia divisibile per $D^{(r)}$. (*)

3.

Siano ora

(3) $$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots\ \lambda,\ \mu,\ \dots\ \rho$$

le r radici dell'equazione $D^{(r)} = 0$, dimodochè si abbia identicamente

$$D^{(r)} = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \lambda)(x - \mu) \dots (x - \rho).$$

Sussisterà in tal caso il seguente teorema:

Determinando il quoziente della divisione di x^n *per* $D^{(r)}$ *col prendere successivamente per divisori, com'è indicato dalle* (1), *i fattori* $x - \alpha$, $x - \beta$, $\dots$ $x - \rho$, *i coefficienti del quoziente stesso sono le funzioni simmetriche complete di grado* 0, 1, 2, 3, ... $(n - r)$ *delle quantità* $\alpha, \beta, \gamma, \dots \rho$.

(*) Se si suppone

$$X_1 = X_2 = \dots = X_k = X$$

e perciò

$$D^{(r)} = X^k$$

la (2) diviene

$$P^{(n)} = X^k Q_k + X^{k-1} R_k + X^{k-2} R_{k-1} + \dots + X R_2 + R_1$$

dalla quale apparisce che, se si dà all'esponente k un valore tale che X^{k+1} sia di grado superiore ad n, o se, ciò che è lo stesso, nel sistema delle (1), s'intendono ora proseguite le divisioni, finchè il polinomio Q_k resulta di grado inferiore ad X, si può trasformare $P^{(n)}$ in un polinomio ordinato per le potenze di X, moltiplicate per altrettanti polinomi Q_k, R_k, ... R_2, R_1 *di grado inferiore* a quello di X.

In particolare poi, per $X = x - a$, si trova

$$P^{(n)} = (x-a)^n Q_n + (x-a)^{n-1} R_n + (x-a)^{n-2} R_{n-1} + \dots + (x-a) R_2 + R_1$$

con Q_n, R_n, ... R_2, R_1, *indipendenti* dalla x.

Infatti, supposto che rispetto ad una parte delle radici (3)

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.\ \lambda$$

sia soddisfatta la proprietà analoga dai coefficienti

$$1,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots.$$

del quoziente ottenuto dopo aver diviso per $x-\alpha$, $x-\beta$, ... $x-\lambda$, si sa che, dividendo questo quoziente per $x-\mu$, i coefficienti del nuovo quoziente sono:

$$1,\quad \mu+V_1,\quad \mu^2+V_1\mu+V_2,\quad \mu^3+V_1\mu^2+V_2\mu+V_3,\ \ldots.$$

e si vede chiaramente che, coll'ipotesi fatta, le forme di questi coefficienti convengono alle funzioni simmetriche complete di grado 0, 1, 2, 3, ... degli elementi

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.\ \lambda,\ \mu.$$

Dopo ciò, basta ricordare che dividendo x^n per $x-\alpha$ si hanno per coefficienti del quoziente

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots.$$

che possono riguardarsi come le funzioni simmetriche complete di grado 0, 1, 2, 3, ... dell'elemento α, per ritenere che il teorema è dimostrato in generale.

In forza di esso, il quoziente q_n della divisione di x^n per $D^{(r)}$ è della forma

$$q_n = x^{n-r} + V_1 x^{n-r-1} + V_2 x^{n-r-2} + \ldots. + V_{n-r-1} x + V_{n-r}.$$

Ma si ha pure

$$q_n = x^{n-r} + b_1 x^{n-r-1} + b_1^{(1)} x^{n-r-2} + \ldots. + b_1^{(n-r-2)} x + b_1^{(n-r-1)} \quad (*)$$

e dal confronto di queste espressioni si traggono le relazioni

$$(4)\qquad \begin{gathered} V_1 = b_1,\quad V_2 = b_1^{(1)},\quad V_3 = b_1^{(2)},\ \ldots. \\ V_{h+1} = b_1^{(h)},\ \ldots.\ V_{n-r} = b_1^{(n-r-1)} \end{gathered}$$

che collegano appunto ognuna delle $b_1^{(h)}$ colla funzione simmetrica completa delle radici del divisore, della quale rappresenta il valore espresso mediante i coefficienti.

(*) V. *Periodico*, Anno VII, pag. 178.

Se rammentiamo ora che:

$$(5)\quad b_1^{(h)} = b_1 b_1^{(h-1)} + b_2 b_1^{(h-2)} + b_3 b_1^{(h-3)} + \dots + b_h b_1 + b_{h+1} \quad (*)$$

ovvero

$$b_1^{(h)} - b_1 b_1^{(h-1)} - b_2 b_1^{(h-2)} - b_3 b_1^{(h-3)} - \dots - b_h b_1 = b_{h+1}$$

si conclude altresì, per le (4), che deve aversi

$$(6)\quad V_{h+1} - b_1 V_h - b_2 V_{h-1} - b_3 V_{h-2} - \dots - b_h V_1 = b_{h+1}$$

e quindi, dando ad h i valori 0, 1, 2, ...

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{r} V_1 = b_1 \\ V_2 - b_1 V_1 = b_2 \\ V_3 - b_1 V_2 - b_2 V_1 = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ V_{h+1} - \dots - b_{h-2} V_3 - b_{h-1} V_2 - b_h V_1 = b_{h+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Avuto poi riguardo all'origine dell'equazione (5), la (6), che n'è una conseguenza, non subisce, nel caso che sia $h+1 > r$, altra modificazione che quella resultante dal porre uguali a zero tutte le b_s in cui l'indice s è maggiore di r.

Per tutte queste considerazioni non può passare inosservata la perfetta analogia che v'ha tra le (7) e le *formule di* NEWTON che servono al calcolo delle *funzioni simmetriche semplici* $s_p = \sum \alpha^p$. Esse, per l'equazione $D^{(r)} = 0$, sono, com'è noto:

$$\begin{array}{r} s_1 = b_1 \\ s_2 - b_1 s_1 = 2 b_2 \\ s_3 - b_1 s_2 - b_2 s_1 = 3 b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{h+1} - \dots - b_{h-2} s_3 - b_{h-1} s_2 - b_h s_1 = (h+1) b_{h+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

e ne consegue che le funzioni simmetriche semplici e quelle complete sono legate da equazioni della forma

$$\begin{gathered} s_{h+1} - \dots b_{h-2} s_3 - b_{h-1} s_2 - b_h s_1 \\ = (h+1)(V_{h+1} - \dots - b_{h-2} V_3 - b_{h-1} V_2 - b_h V_1) \end{gathered}$$

(*) V. *Periodico*, Anno VII, pag. 184.

per tutti i valori di $h+1 \leqq r$, mentre per $m=r+d$, si ha contemporaneamente:

$$s_m - b_1 s_{m-1} - \ldots - b_{m-d-2} s_{d+2} - b_{m-d-1} s_{d+1} - b_{m-d} s_d = 0$$
$$V_m - b_1 V_{m-1} - \ldots - b_{m-d-2} V_{d+2} - b_{m-d-1} V_{d+1} - b_{m-d} V_d = 0.$$

4.

Dall'essere $b_1^{(m-1)} = V_m$, resulta che si potrà ricorrere alla teoria delle funzioni simmetriche, per stabilire la forma letterale di $b_1^{(m-1)}$, cioè l'espressione di V_m mediante i coefficienti di $D^{(r)}$.

Si sa appunto, da quella teoria, che dovrà aversi:

$$b_1^{(m-1)} = \sum C_i^{(m-1)} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \ldots b_m^{\alpha_m}$$

dove $C_i^{(m-1)}$ è un coefficiente numerico, e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sono le soluzioni positive, intere o nulle delle equazioni:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m = k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots m)$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + m\alpha_m = m$$

o, com'è facile a vedere, le soluzioni positive, intere o nulle dell'unica equazione

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + m\alpha_m = m.$$

Così, ad esempio, per $m = 2, 3, 4, 5$, si trovano le forme:

$$b_1^{(1)} = C_1^{(1)} b_1^2 + C_2^{(1)} b_2$$
$$b_1^{(2)} = C_1^{(2)} b_1^3 + C_2^{(2)} b_1 b_2 + C_3^{(2)} b_3$$
$$b_1^{(3)} = C_1^{(3)} b_1^4 + C_2^{(3)} b_1^2 b_2 + C_3^{(3)} b_1 b_3 + C_4^{(3)} b_2^2 + C_5^{(3)} b_4$$
$$b_1^{(4)} = C_1^{(4)} b_1^5 + C_2^{(4)} b_1^3 b_2 + C_3^{(4)} b_1^2 b_3 + C_4^{(4)} b_1 b_2^2 + C_5^{(4)} b_1 b_4 + C_6^{(4)} b_2 b_3 + C_7^{(4)} b_5 \quad (*)$$

nelle quali restano da determinare i soli coefficienti numerici, ciò che può farsi con vari metodi.

Osserviamo, per ultimo, che l'uguaglianza tra il numero dei termini che compariscono in $b_1^{(1)}$, $b_1^{(2)}$, $b_1^{(3)}$ e il numero delle differenti funzioni simmetriche (semplici e composte) che costituiscono

(*) Cfr. *Periodico*, Anno VII, pag. 184.

le corrispondenti funzioni simmetriche complete V_2, V_3, V_4 (*), non è fortuita, ma dipende dal fatto che, *l'equazione*

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \ldots . + m\,\alpha_m = m$$

e l'equazione

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots . + \lambda_m = m,$$

colla limitazione impostale nel n.° 1, hanno lo stesso numero di soluzioni.

ELCIA SADUN.

SULL'ASSIOMA DELLE PARALLELE,

SULLA DEFINIZIONE DEL PIANO E SULL'UGUAGLIANZA DELLE FIGURE

Non è il caso per me di parlare delle definizioni di piano proposte prima della pubblicazione dei *Fondamenti di Geometria* del Prof. Veronese, essendo esse minutamente discusse nell'Appendice che chiude l'importante lavoro del chiaro Autore. La definizione che si legge alla pag. 299 dei *Fondamenti di Geometria*, irreprensibile dal punto di vista scientifico, perde, a parer mio, alquanto del suo pregio, quando l'A. si studia di adattarla alle esigenze dell'insegnamento secondario (pag. 299 XLI), specialmente perchè essa riposa sopra una definizione troppo artificiale di rette parallele (**), per la quale il concetto di parallela, che nella sua origine dipende unicamente da un'idea di posizione, viene subordinato a quello dell'uguaglianza delle figure (***). Ora a me sembra che potrebbesi ottenere un certo vantaggio, dal punto di vista didattico, seguendo la via che qui mi studierò di tracciare.

(*) In accordo colla forma trovata della funzione $b_1^{(4)}$, si ha pure

$$V_5 = \Sigma\,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon + \Sigma\,\alpha\beta\gamma\delta^2 + \Sigma\,\alpha\beta\gamma^3 + \Sigma\,\alpha\beta^2\gamma^2 + \Sigma\,\alpha\beta^4 + \Sigma\,\alpha^2\beta^3 + \Sigma\,\alpha^5.$$

(**) La definizione per le rette parallele proposta dal Prof. Veronese [*Fond.*, nota XVI, p. 258], la esprimeremo, affinchè riesca più chiara a chi non ha sott'occhio il libro in discorso, in questo modo: Data una coppia di rette a, b taglientisi in A, se prendiamo a partire da A in due versi opposti due segmenti $(AB) \equiv (AB')$ sulla a ed altri due $(AC) \equiv (AC')$ sulla b, i terzi lati BC, $B'C'$ dei due triangoli uguali ABC, $AB'C'$ che così si ottengono, si dicono *paralleli*.

(***) Credo doveroso di osservare che il Veronese (pag. 210, nota I) nelle note romane con le quali accompagna il suo lavoro intende solo di mostrare la possibilità di seguire i suoi principî in un trattato elementare, senza voler stabilire un ordine determinato specialmente nel principio.

1. Ammetto i seguenti assiomi del Prof. Veronese: 1° « Esistono punti distinti. - Tutti i punti sono identici » (pag. 210); 2° « Due punti distinti qualunque determinano un sistema identico nella posizione delle sue parti e continuo, che li contiene, e si chiama retta. - Esistono punti fuori della retta » (pag. 216, nota IV), ed ammetto pure le proprietà che l'A. ne deduce relativamente alla geometria della retta in sè stessa. A questa parte della geometria è naturale di far seguire uno studio di relazione fra le rette, ed ammetteremo anche noi l'assioma: « Se due rette qualunque hanno un punto comune A, ad un segmento (AB) dell'una è identico un segmento (AB') dell'altra » con l'importante conseguenza: « Due rette qualunque sono identiche» (pag. 221).

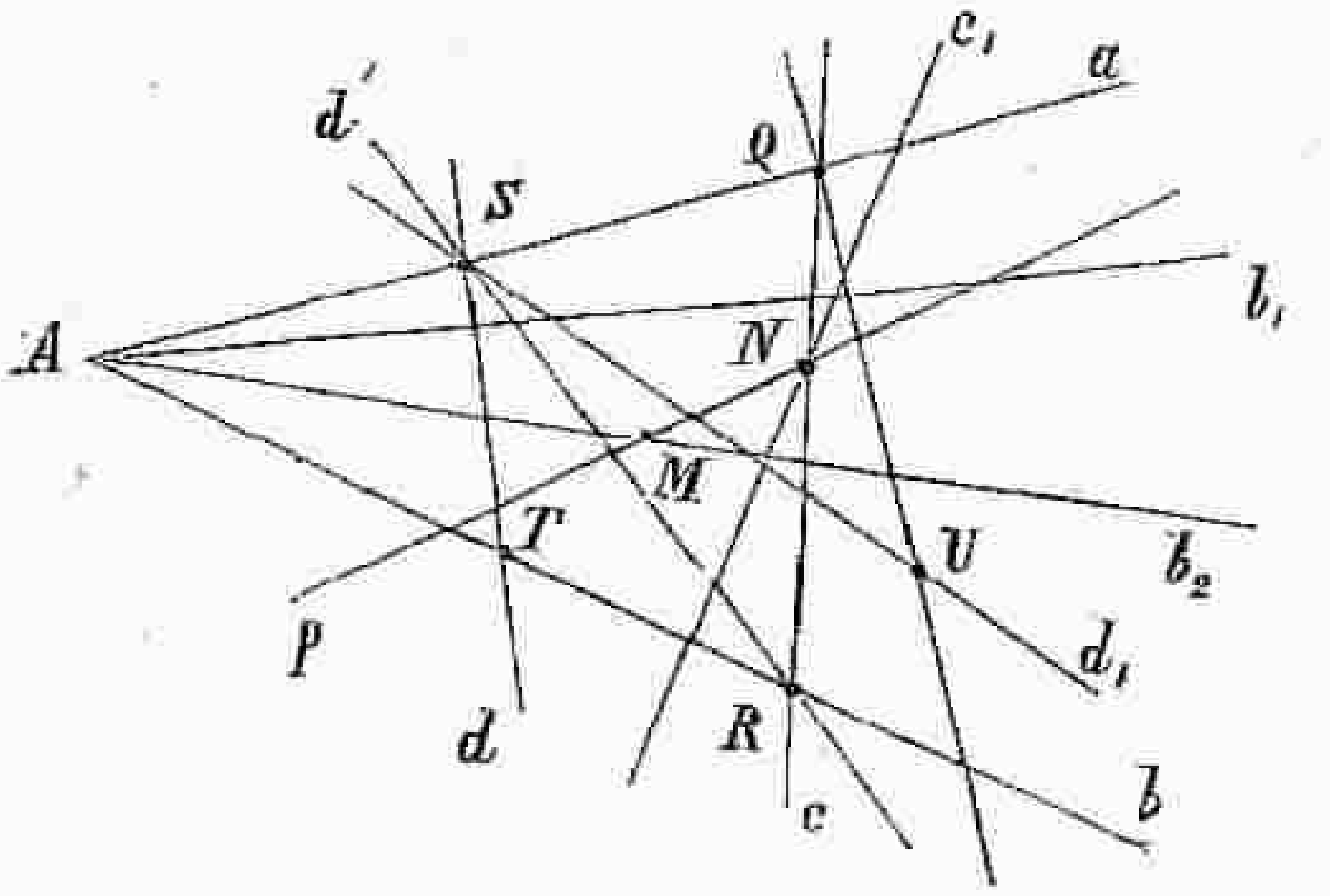


Fig. 1ª.

Una continuazione naturale di questo studio di relazione fra le rette consiste nella ricerca delle condizioni d'intersecabilità delle medesime, a fondamento della quale porremo il seguente (*)

Assioma (**). *Date due rette* a, b *che si tagliano in un punto* A, *ed un punto* N, *fuori di esse, di una loro comune segante* (*che non passi per* A), *tutte le rette passanti per* N *e seganti una delle rette date,* AD ECCEZIONE DI UNA, *tagliano anche l'altra.* Quell'unica retta che passando per N taglia p. e. b e non a, la chiameremo *parallela ad* a *rispetto a* b *passante per* N, e per risparmio di spazio la indicherò col simbolo (a, b, N).

(*) Per brevità tralascio quelle considerazioni d'indole puramente didattica che potrebbero far meglio comprendere ad un principiante il legame del presente assioma coi precedenti.

(**) Le rette e i punti che nominerò saranno sempre quelli segnati nella figura 1ª, fino a che non si rimanderà il lettore ad altra figura.

Oss. Segue dalla definizione che la (a, b, N) taglia necessariamente b e quindi le (a, b, N), (b, a, N) sono due rette distinte.

Cor. *Se* p *è la* (a, b, N), *viceversa* a *è la* (p, c, A), *essendo* c *una qualunque delle comuni seganti di* a, b *passanti per* N. Difatti c, p, A sono nelle condizioni poste dall'assioma, quindi tutte le rette che congiungono A coi punti di c tagliano p, tranne la (p, c, A), e questa dunque è a.

Abbiamo dunque che ogni retta b_1 (diversa da a) uscente da A e segante c taglia p (la quale perciò è anche la (a, b_1, N)), e ogni b_2 uscente da A e segante p taglia c, a meno che c non sia la (b_2, b, N), e di più se una b_3, uscente da A, è la (c, p, A) o la (c, c_1, A) (essendo c_1 un'altra comune segante di a, b per N), dovendo essa tagliare o p, o c_1 (v. oss.) si comporta come una b_2 o una b_1. Per la (b, a, N) si può ripetere quanto si è detto per p, ed abbiamo così il

Teor. I. *Le comuni seganti di* a, b *passanti per* N *assieme delle* (a, b, N), (b, a, N) *formano un sistema tale, che ogni retta uscente da* A *(comprese le* a, b) *ed appoggiantesi ad una di esse, o che sia la parallela ad una di esse rispetto ad un'altra delle medesime passante per* A, *è tagliata da tutte le altre, meno che dalla parallela a quella retta rispetto a* b *(o ad* a) *passante per* N; *e la parallela, passante per* N, *ad* a *rispetto ad una qualunque delle nostre rette per* A *è sempre la* p.

Teor. II. *Nessuna retta che passa per* N *senza essere comune segante di* a, b *oppure* (a, b, N) *o* (b, a, N) *taglia una* b_1 *(o una* b_2, *o una* b_3) *(a meno che questa non passi per* N). Difatti se una tal retta m taglia b_1 in un punto O, allora, siccome a, b_1, N sono nelle condizioni poste dall'assioma, la $NO \equiv m$ o taglia a o è la (a, b_1, N), cioè (teor. I) la (a, b, N); lo stesso dicasi per b.

Teor. III. *La parallela ad* a *rispetto a* b *passante per un punto* M *di* p *è la* p *stessa*. Sia c una delle comuni seganti di a, b per N che vengono tagliate da $b_2 \equiv AM$ (teor. I); allora essendo a, c, M nelle condizioni volute dall'assioma, si ha $(a, c, M) \equiv p$, perciò MR taglia a ed è così comune segante di a, b per M, quindi si ha $(a, b, M) \equiv p$.

2. a) Sia d una retta che taglia a, b rispettivamente in S, T.

Tiriamo per S una d' (non passante per N) che tagli b in un punto R diverso da bp, per cui $c \equiv NR$ taglia a in un punto Q ed è quindi comune secante di a, d' per N, perciò d', tranne la (d', a, N), taglia (ass.) tutte le rette che uniscono N coi punti di a (comuni secanti di a, b per N e (b, a, N)). E siccome a è la (p, c, A) (n. 1 cor.), e quindi la (p, c, S) (n. 1 teor. III), così la d' che congiunge S con un punto R di c deve tagliare p (ass. applicato a c, p, S), sicchè p è anche la (a, d', N). Ora d è una retta che congiunge S con un punto di NT, la quale è o una comune secante di a, d' per N (v. sopra) o la $(a, d', N) \equiv p$ (se è $T \equiv bp$) o la (d', a, N), per cui taglia, tranne una, (n. 1, teor. I applicato ad a, d', N) tutte le comuni secanti di a, d' per N e taglia pure la $(a, d', N) \equiv p$ e la (d', a, N), cioè incontra tutte le comuni secanti di a, b per N (tranne una che è la (d, a, N), od anche per analoga ragione la (d, b, N)), e sega pure la p e per analoga ragione la (b, a, N). Di più è chiaro che si ha $(a, d, N) \equiv p$.

b) Sia ora $d \equiv d_1 \equiv (b, a, U)$, essendo U un punto che con a, b si trova nelle condizioni volute dall'assioma. Allora prendendo U come punto N e la $c \equiv QR$ come retta d, si vede che c (v. (*a*)) taglia d_1, la quale dunque (ass. applicato ad a, d_1, N) è tagliata da tutte le secanti di a per N (comuni secanti di a, b per N e (b, a, N)), tranne dalla (d_1, a, N). Di più UQ taglia b (ass.), e quindi (v. (*a*) prendendo UQ come retta d) anche p. Dunque c, p ammettono la comune trasversale UQ per U; perciò tutte le rette che uniscono U coi punti di c, tranne una, tagliano p, dunque anche d_1 taglia p, a meno che non sia $d_1 \equiv (p, c, U) \equiv (p, b, U)$ (v. (*a*) applicato alle rette p, c ed alla trasversale b), ciò che è impossibile, perchè altrimenti d_1 taglierebbe b (n. 1, oss.) contro l'ipotesi. È chiaro inoltre che la (a, d_1, N) è ancora la p. Possiamo dunque concludere:

Teor. I. *Le rette per* N *del sistema considerato nel teor. I del n. 1 sono tali, che ogni retta* d *che sia comune trasversale di* a, b *o parallela a* b, *rispetto ad* a, *le taglia tutte ad eccezione della* (d, a, N); *e la* (a, d, N) *è sempre* p. - Le stesse cose potrebbero ripetersi prendendo b in luogo di a.

Cor. *Due rette, che si appoggiano entrambe a due rette che si* *segano, o si tagliano o sono l'una parallela all'altra rispetto ad una qualunque delle due rette a cui si appoggiano* (v. anche n. 1 cor. e teor. III).

Teor. II. *Preso un punto* N *esterno ad una retta* a, *esiste la parallela ad* a *passante per* N *rispetto ad ogni retta* b *che si appoggi ad* a *e ad una qualunque delle rette che uniscono* N *coi punti di* a, *parallela che rimane la stessa rispetto a qualunque retta* b.

Che la parallela ad a rispetto ad ognuna delle rette b in discorso esista, lo dice l'assioma. Fissiamo ora una delle nostre rette b che tagli a in un punto A, e consideriamo la (a, b, N). Che questa parallela rimanga la stessa prendendo invece di b una b_1 che passando per A si appoggi ad una retta c che unisce N con un punto di a (la quale c adunque (ass.) o sega anche b o è la (b, a, N)) lo dice il teor. I del n. 1. Prendiamo ora una retta d non passante per A e che si appoggi ad a e ad una secante c di a per N (sostituendo a b una b_1 (n. 1 teor. I) nel caso che sia $c \equiv (b, a, N)$); allora (n. 2 cor. applicato alle rette a, c) o d taglia b (o b_1) o è parallela a b (o a b_1) rispetto ad a, e perciò il teor. I di questo numero ci dice che la parallela ed a rispetto a d coincide con la parallela ad a rispetto a b (o a b_1).

3. Per la definizione di parallela data al n. 1 risulta che data una retta a ed un punto N fuori di essa, non si può parlare di parallela ad a passante per N se non rispetto a rette che si appoggiano ad a ed a una segante di a per N, per cui ora per il teorema precedente e per il teor. III del n. 1 possiamo dire:

Def. I. *Data una retta* a *ed un punto* N *fuori di essa, esiste una ed una sola retta che essendo tagliata da tutte le rette che si appoggiano ad* a *e ad una qualunque segante di* a *per* N, *non taglia* a, *e questa retta si chiama la* parallela *ad* a *passante per* N, *ed ha la proprietà di essere anche la parallela ad* a *rispetto ad ogni altro dei suoi punti.* Ed ora il teor. III n. 1 si può enunciare:

Teor. I. *Se una retta* p *è parallela ad una retta* a, *viceversa* a *è parallela a* p.

Teor. II. *Date due rette* a, p *parallele fra loro, se una parallela* x *ad* a *taglia una loro comune secante* c, *essa è anche paral-*

lela a p. Preso in x un punto P qualunque (diverso da cx), condotta una retta q che tagli c, questa taglia (def.) anche a e perciò (idem) anche p. Quindi la x (n. 2 cor. applicato alle c, q) o è parallela a p o taglia p in un punto V, la quale ultima ipotesi è impossibile, altrimenti per V passerebbero due parallele ad a.

Teor. III. *La figura formata dalle rette che congiungono i punti di una data retta* a *con un punto* N *ad essa esterno e dalla parallela* p *ad* a *passante per* N *è tale, che ogni retta che unisce due suoi punti qualunque taglia tutte le rette per* N *ora considerate, tranne una, che è la parallela per* N *a quella retta, e non taglia (a meno che non passi per* N*) nessun'altra retta per* N.

Se la retta x taglia due delle nostre rette c, c_1, essa (n. 2 cor.) o taglia a o è parallela ad a rispetto a c. Se taglia a deve tagliare p (n. 3 def.) ed ogni c_2 per N tagliando a, c o taglia x o è parallela ad x (n. 2 cor. applicato alle rette a, c_2). Se x è parallela ad a, viene tagliata da ogni c_2 (n. 3 def.) e la p è la parallela ad x per N (n. 3 teor. II e I). Se poi x si appoggia a p e a c deve tagliare a (n. 3 def.), e siamo così ricondotti al primo caso. Ogni retta poi per N che tagli x in un punto X, se x taglia a, o taglia a o è parallela ad a per N (n. 2 cor. applicato alle rette x, c), cioè è una c o p, e se x è parallela ad a la NX taglia sempre a (n. 3 def.), cioè è una c. Resta così dimostrata anche la seconda parte del teorema.

Def. II. *La figura formata dalle rette che congiungono i punti di una data retta* a *con un punto ad essa esterno* N *e dalla parallela ad* a *per* N *si chiama* FASCIO DI RETTE, FASCIO DI RAGGI, PIANO, *a seconda che si considera come elemento la retta, il raggio, il punto. La* a *si chiama* DIRETTRICE, N *il* CENTRO, *le rette per* N *formanti la figura* GENERATRICI.

Dall'ultima parte della dimostrazione dell'ultimo teorema risulta che ogni punto X di una retta x che congiunge due punti di due generatrici (se i due punti sono sopra una medesima generatrice o sulla direttrice, la x è una retta della figura), appartiene ad una generatrice, di qui il

Teor. IV. *Ogni retta che congiunge due punti di un piano ha tutti i suoi punti nel piano.*

Cor. *Un piano si può generare prendendo uno qualunque dei suoi punti come centro ed una qualunque delle sue rette come direttrice.* Ecc. ecc.

4. Un altro importante argomento che nell'opera del Veronese trovasi svolto con nuove vedute è quello della teoria dell'uguaglianza delle figure, che l'Autore fonda sul seguente assioma (*): « Se in due coppie di raggi (**) qualunque AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ scelte due coppie di punti B, C; B', C' tali che $(AB) \equiv (A'B')$; $(AC) \equiv (A'C')$, il segmento (BC) sia identico a $(B'C')$, le due coppie di raggi sono identiche ».

Senza fermarci qui a discutere sulla necessità di un assioma speciale per la teoria dell'uguaglianza delle figure, e sull'opportunità della scelta del medesimo nel caso che esso sia necessario, ci limiteremo a dimostrare che quello proposto dal Veronese si può sostituire con quest'altro molto più semplice:

Assioma. *Date due coppie qualunque di raggi* a, b; a′, b′ *di vertici* A, A′, *se il segmento che unisce due punti* E, F *di* a, b *è uguale al segmento che unisce i due punti corrispondenti* E′, F′ *di* a′, b′ (*prendendo come origini* A, A′ (*v. sotto*)), *lo stesso avviene per due qualunque segmenti che congiungono* E, E′ *rispettivamente con due punti corrispondenti di* b, b′. (Dati due raggi qualunque a, a' e fissati su essi due punti qualunque A, A' chiameremo *punti corrispondenti* sui due raggi, rispetto alle origini A, A', gli estremi diversi da A, A' di ogni coppia di segmenti uguali con un estremo rispettivamente in A, A' e con gli altri estremi tutt' e due nel verso dei due raggi o nel verso opposto rispetto ad A, A'.

Teor. I. *Date due coppie qualunque di raggi* a, b; a′, b′ *di vertici* A, A′, *se il segmento che unisce due punti* E, F *di* a, b *è uguale al segmento che unisce i due punti corrispondenti* E′, F′ *di* a′, b′, *lo stesso avviene per due segmenti determinati da due altre coppie*

(*) Per comodità del lettore riporto la seguente definizione che il Veronese, affine di evitare l'introduzione del trasporto senza deformazione, che conduce ad una petizione di principio, propone, per un trattato elementare, per le figure uguali: « Due figure si dicono uguali se si può stabilire fra i loro punti una corrispondenza tale, che i segmenti rettilinei dei punti corrispondenti siano ordinatamente uguali » (pag. 234, nota XII). – Per *figura rettilinea* di un sistema o di più sistemi distinti di punti s'intende (pag. 221, n. 9) « quella individuata dai segmenti che hanno per estremi i punti dati, e dai segmenti determinati dai punti dei segmenti suddetti e così via ».

(**) Notiamo che per raggio va intesa l'intera retta considerata in un dato verso.

qualunque di punti corrispondenti (*prendendo sempre per origini* A, A′). Siano (v. fig. 2) (BC), $(B'C')$ questi due altri segmenti. Allora applicando successivamente l'assioma si ha: $(EC) \equiv (E'C')$, $(CB) \equiv (C'B')$.

Mediante un ragionamento analogo a quello che il Veronese adopera per il teor. II della pag. 238, e che per brevità non staremo qui a ripetere, il teor. precedente si estende alle due coppie di raggi opposte al vertice alle date e quindi alle coppie di rette, per cui potremo concludere:

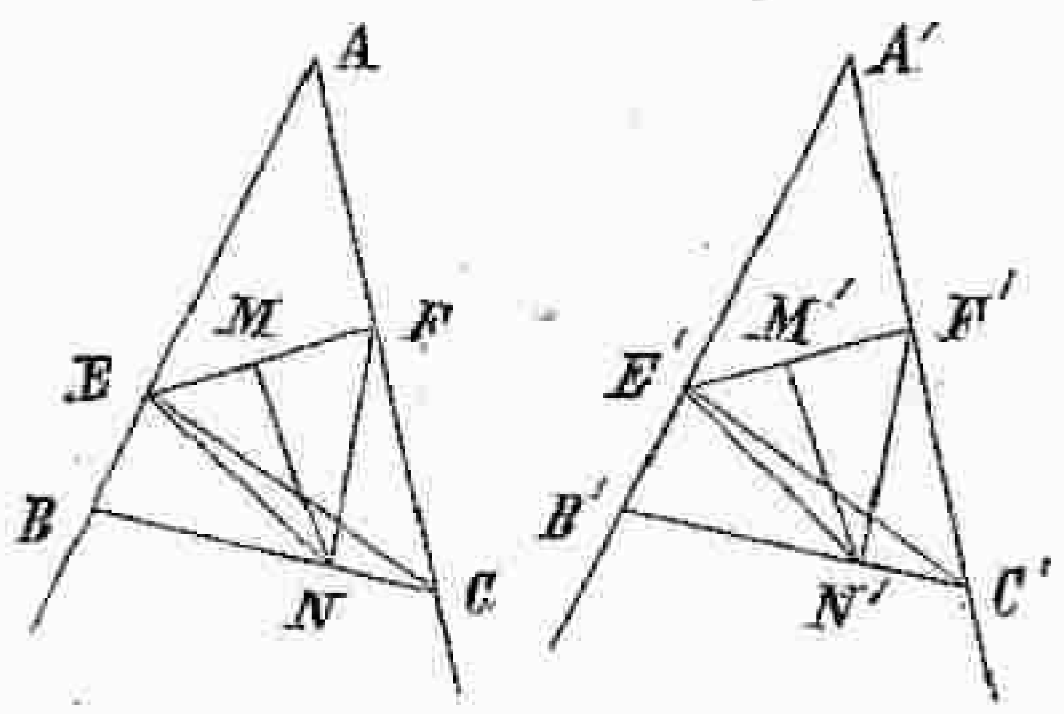


Fig. 2ª.

Teor. II. *Se due triangoli* A E F, A′E′F′ *hanno i lati rispettivamente uguali, i segmenti determinati da due qualunque coppie omologhe di punti delle rette cui i lati appartengono, sono uguali.*

Teor. III. *Date due coppie di rette* a, b; a′, b′ *di vertici* A, A′, *se, scelte due coppie di punti* E, F; E′, F′ *tali che* (A E) ≡ (A′E′), (A F) ≡ (A′F′), *è* (E F) ≡ (E′F′), *le due coppie di rette sono identiche.* Sopra due segmenti corrispondenti $(EF) \equiv (E'F')$, $(BC) \equiv (B'C')$ (fig. 2) si prendano le coppie di punti corrispondenti M, N; M', N' tali che $(EM) \equiv (E'M')$, $(BN) \equiv (B'N')$. Allora si ha (teor. II applicato ai triangoli ABC, $A'B'C'$) $(NE) \equiv (N'E')$, $(NF) \equiv (N'F')$, e perciò (teor. II applicato ai triangoli ENF, $E'N'F'$) $(NM) \equiv (N'M')$. Così continuando si vede che fra i punti delle nostre figure si può stabilire una corrispondenza tale, che i segmenti rettilinei dei punti corrispondenti siano ordinatamente uguali.

Abbiamo così dimostrata la proposizione che il Veronese assume come assioma, basandoci sopra una proposizione che è una delle parti semplici in cui quell'assioma può scindersi.

Venezia, 1893.

Prof. Palatini Francesco.

SOPRA UNA FORMOLA PER LA MISURA DEI VOLUMI (*)

1. Consideriamo un solido il quale sia limitato da due figure in piani paralleli (*basi*), di aree B_0, B_1, alla distanza $h = 1$ (*altezza*) e da una superficie poliedrica o curva, e, tale che l'area d'una sezione qualsiasi fatta in esso da un piano parallelo alle basi ad una distanza x da una delle medesime (dalla base inferiore B_0), sia una funzione razionale intera $f(x)$ del 2° o 3° grado della x (**), e proponiamoci di trovare il volume di questo solido nella ipotesi che siano soddisfatte le due condizioni seguenti:

1° che se $B_0 > B_1$ le aree delle singoli sezioni vadano diminuendo col crescere di x;

2° che il volume di ogni tronco del solido limitato da due piani paralleli alle basi sia compreso fra i volumi dei due prismi o cilindri aventi per basi le sezioni fatte da questi piani e per altezza la loro distanza (***).

2. Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si avrà in questo caso

$$B_0 = f(0) = c, \quad f(1:2) = M = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c, \quad B_1 = a + b + c,$$

dove ad M si darà il nome di *sezione mediana*.

Si divida l'altezza 1 in n parti uguali e per gli $n - 1$ punti di divisione si conducano dei piani paralleli alle basi, a tagliare il

---

(*) La formola a cui si allude è già nota ai lettori del *Periodico* ed è riportata dal Prof. Loria nella sua recensione della *Genetische Stereometrie* von H. Heinze [*Per.*, II, 1887, pp. 27-31], opera da riguardarsi, nella sua parte principale, come un'esposizione delle applicazioni offerte dalla formola stessa alla cubatura di classi svariatissime di solidi. Del resto oltre al libro dell'Heinze dovuto alle cure del Sig. F. Lucke, è stato pubblicato, con fine didattico, da questi un altro libro, inspirato agli stessi principi e di analoga tessitura [Lucke (F.): *Leitfaden der Stereometrie für den Schulunterricht.* Leipzig, Teubner, 1890], non esente da quei difetti che il Prof. Loria giustamente lamentava nell'opera dell'Heinze.

Però anche in Francia, e diversi anni prima che apparissero le opere menzionate, il Signor E. Sergent si era fatto caldo propagatore della stessa formola [Cfr. Sergent (E.): *Traité complet de tous les mesurages, métrages, jaugeages de tous les corps, appliqué aux arts, aux métiers*, ecc. Paris, 1874].

Pare a me che la seguente trattazione inspirata a concetti semplici e rigorosi, e sopratutto assai succinta, possa giovare a diffondere la conoscenza ulteriore della formola in parola, rendendone possibile l'introduzione nell'insegnamento secondario.

(**) V. le note in fine pel caso di $f(x)$ funzione razionale intera del grado m e per altre considerazioni d'indole meno elementare.

(***) Si vedrà in seguito come si potrebbe fare a meno di introdurre queste ipotesi, dando alla trattazione un carattere di maggiore generalità.

solido. Le aree delle singole sezioni, comprese le basi, sono espresse da

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = a \,.\, i^2 . \frac{1}{n^2} + b \,.\, i \,.\, \frac{1}{n} + c \quad (i = 0, 1, 2 \ldots . n),$$

e il solido si potrà considerare costituito da n tronchi limitati dalla base inferiore e dalla prima sezione, da questa e dalla seconda sezione e così di seguito, infine dall'$(n-1)^{\text{esima}}$ sezione e dalla base superiore.

Immaginiamo ora le due serie di prismi o cilindri aventi per comune altezza $\frac{1}{n}$ e per basi la base inferiore e le singole sezioni dalla prima all'$(n-1)^{\text{esima}}$, le successive sezioni dalla prima alla $(n-1)^{\text{esima}}$ e la base superiore e indichiamo con $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$, rispettivamente, i volumi dei prismi o cilindri della prima serie e con $v'_1, v'_2, \ldots v'_n$ quelli dei prismi o cilindri della seconda serie, finalmente con $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ i volumi dei tronchi in cui il solido rimane diviso dai piani seganti.

È chiaro intanto che si avrà:

$$v_i = v'_i \quad (i = 1, 2, \ldots . (n-1)),$$

$$v_0 = a \,.\, 0^2 \,.\, \frac{1}{n^3} + b \,.\, 0 \,.\, \frac{1}{n^2} + c \,.\, \frac{1}{n},$$

$$v'_n = a \,.\, n^2 \,.\, \frac{1}{n^3} + b \,.\, n \,.\, \frac{1}{n^2} + c \,.\, \frac{1}{n},$$

$$v_i = v'_i = a \,.\, i^2 \,.\, \frac{1}{n^3} + b \,.\, i \,.\, \frac{1}{n^2} + c \,.\, \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots (n-1)),$$

e, per le due ipotesi fatte sussisteranno le relazioni:

$f\left(\frac{i}{n}\right) > f\left(\frac{i+1}{n}\right)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots (n-1))$, da cui segue $v_i > v_{i+1}$ e

$$v_i > \varphi_i > v'_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots . (n-1)).$$

Chiamando V il volume del solido, onde $V = \sum \varphi$, potremo quindi scrivere

$$\sum_0^{n-1} v_i > V > \sum_1^n v'_i,$$

e queste diseguaglianze varranno qualunque sia n. Ma

$$\sum_0^{n-1} v_i = a \,.\, \frac{0^2 + 1^2 + \ldots (n-1)^2}{n^3} + b \,.\, \frac{0 + 1 \ldots + (n-1)}{n^2} + c$$

$$\sum_1^n v'_i = a \,.\, \frac{1^2 + 2^2 + \ldots . + n^2}{n^3} + b \,.\, \frac{1 + 2 + \ldots . + n}{n^2} + c$$

e per $n = \infty$ si ha (*)

$$\lim \sum v_i = \lim \sum v'_i = a \cdot \frac{1}{3} + b \cdot \frac{1}{2} + c,$$

dunque, per un noto principio sui limiti, sarà ancora

$$V = a \cdot \frac{1}{3} + b \cdot \frac{1}{2} + c \text{ (**)},$$

e poichè $B_0 + B_1 + 4M = c + a + b + c + a + 2b + 4c = 6\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right)$, avremo finalmente $V = \frac{1}{6}(B_0 + B_1 + 4M)$ e cambiando l'unità lineare 1 in h risulterà la formola importante, oggetto di questa nota:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{6}}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{4M}) \text{. . . . . [1]}$$

3. Del resto nel caso che si tratti di un solido poliedrico S e limitatamente al caso considerato, che è il più importante, che ogni sezione fatta nel solido con un piano parallelo alle basi, alla distanza x dalla base inferiore, sia una funzione di 2° grado della x, senza introdurre speciali ipotesi circa la forma del solido, si può dare della formola [1] una dimostrazione ancor più elementare della precedente, accennata dal Sig. A. DE SAINT-GERMAIN (V. la nota: *Sur une formule générale de la mesure des volumes*. Nou. Ann. de Math., 1893, p. 291) nei seguenti termini:

« Immaginiamo un prisma T, le cui basi siano situate nei piani delle basi B_0, B_1 di S e due piramidi T_1, T_2 aventi, l'una la sua base, l'altra il suo vertice nel piano di B_0 e inversamente nel piano di B_1 ; è facile determinare le basi di T, T_1, T_2 in modo che la somma (algebrica) delle aree delle sezioni fatte nei tre solidi da qualsivoglia piano parallelo al piano di B_0 sia eguale all'area della sezione fatta in S. Il volume di S sarà eguale alla somma dei volumi di T,

---

(*) Per la determinazione dei limiti per $n = \infty$ dei quozienti $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$, $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$ cfr. *Per.*, VII, pp. 27-28; per quella, più generale, di $\lim_{n=\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}}$ ved. le opere ivi citate ed anche BELLACCHI (G.): *Lezioni di Algebra elementare*, Vol II, p. 255, teor. 7°.

(**) Del resto che sia $\lim_{n=\infty} \sum v_i = \lim_{n=\infty} \sum v'_i$ può dedursi anche da considerazioni geometriche osservando che si ha $\sum v_i - \sum v'_i = v_0 - v'_n$, differenza che per $n = \infty$ converge a zero.

T_1, T_2, e siccome la formola [1] è evidente per il prisma e la piramide, essa sarà ugualmente vera per S ».

Si chiamino invero t, t_1, t_2 le basi a determinarsi dei tre solidi, t', t'_1, t'_2 e $f(x) = a x^2 + b x + c$ le aree delle sezioni fatte nei medesimi e in S mediante il piano segante, si ha subito

$$t = t', \quad t_1 : t'_1 = h^2 : x^2, \quad t_2 : t'_2 = h^2 : (h - x)^2,$$

donde

$$t'_1 = \frac{t_1 x^2}{h^2}, \quad t'_2 = \frac{t_2 \, . \, (h - x)^2}{h^2}$$

e

$$t' + t'_1 + t'_2 = t + t_2 - \frac{2 t_2}{h} x + \frac{t_1 + t_2}{h^2} x^2.$$

L'eguaglianza a cui devesi soddisfare è per conseguenza

$$a x^2 + b x + c = \frac{t_1 + t_2}{h^2} x^2 - \frac{2 t_2}{h} x + t + t_2$$

e questa fornisce, per la determinazione delle basi di T, T_1, T_2, le tre equazioni lineari simultanee, indipendenti fra loro:

$$t_1 + t_2 = a h^2, \quad t_2 = -\frac{b h}{2}, \quad t + t_2 = c,$$

dalle quali le basi stesse restano univocamente determinate.

4. Passiamo ora a considerare il caso in cui, stando ferme tutte le premesse relative al caso precedente, la sezione $f(x)$ sia una funzione razionale intera di 3° grado $a x^3 + b x^2 + c x + d$ della x. In questo caso si avrà:

$$v_0 = a \, . \, 0^3 \, . \frac{1}{n^4} + b \, . \, 0^2 \, . \frac{1}{n^3} + c \, . \, 0 \, . \frac{1}{n^2} + d \, . \frac{1}{n}$$

$$v'_n = a \, . \, n^3 \, . \frac{1}{n^4} + b \, . \, n^2 \, . \frac{1}{n^3} + c \, . \, n \, . \frac{1}{n^2} + d \, . \frac{1}{n}$$

$$v_i = v'_i = a \, . \, i^3 . \frac{1}{n^4} + b \, . \, i^2 . \frac{1}{n^3} + c \, . \, i \, . \frac{1}{n^2} + d \, . \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2 \ldots (n-1)),$$

$$\sum_0^{n-1} v_i = a \frac{0^3 + 1^3 + \ldots + (n-1)^3}{n^4} + b \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} + c \frac{0 + 1 + \ldots + (n-1)}{n^2} + d$$

$$\sum_1^n v'_i = a \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4} + b \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} + c \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} + d,$$

ma, com'è noto, si ha in generale

$$\lim_{n=\infty} \frac{0^m + 1^m + \ldots + (n-1)^m}{n^{m+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

onde risulta

$$\lim \sum v_i = \lim \sum v'_i = a \cdot \frac{1}{4} + b \cdot \frac{1}{3} + c \cdot \frac{1}{2} + d = V.$$

Ma $B_0 = d$, $B_1 = a + b + c + d$, $M = a \cdot \frac{1}{8} + b \cdot \frac{1}{4} + c \cdot \frac{1}{2} + d$, sicchè $V = \frac{1}{6}(B_0 + B_1 + 4M)$ come precedentemente. Per questo caso serve adunque alla determinazione del volume del solido d'altezza qualunque h ancora la formula [1].

5. Il procedimento dei precedenti paragrafi, con una modificazione ovvia, conduce poi al seguente enunciato:

Il volume d'un solido limitato da due figure parallele ad un piano fisso P, *una delle quali può ridursi anche ad un punto, e da una superficie laterale poliedrica o curva, tale che ogni sezione fatta nel medesimo da un piano parallelo a* P *sia una funzione del secondo o terzo grado della distanza di questi due piani, è equivalente ad un cono avente per altezza l'altezza del solido e per base la semisomma delle basi, aumentata del doppio della sezione mediana, dietro le ipotesi 1° che le aree delle singole sezioni, se disuguali, vadano diminuendo col crescere della distanza dal piano* P, *2° che il volume del tronco limitato da due piani paralleli a* P *sia compreso fra i volumi dei due prismi o cilindri aventi per basi le sezioni fatte da questi piani e per altezza la loro distanza.*

(Continua).

A. Lugli.

SULLA EQUIVALENZA DEI POLIGONI

È noto ai lettori del *Periodico di Matematica* il tentativo fatto dal Prof. Faifofer (*) per restituire alla teorica della equivalenza la primitiva semplicità, pur mantenendo la definizione « Due figure si dicono *equivalenti* se possono essere tagliate in parti rispettivamente eguali »; e sono anche note le obbiezioni mossegli dall'illustre e compianto De Paolis nello stesso volume del Periodico (pag. 44).

(*) Vol. I., pag. 13.

A sostegno della nuova teorica della equivalenza, introdotta per la prima volta in Italia dal Faifofer, rimase dunque la proposizione « *Se un poligono è diviso in parti in un modo qualunque, non è possibile, trascurando alcuna di esse, disporre le rimanenti in modo da ricoprire interamente il poligono* », che credette di poter dimostrare il Prof. De Zolt (*), e che il De Paolis, trovando, come egli stesso dichiara (**), che la dimostrazione di De Zolt « non andava esente da obbiezioni » adottava, in una forma più generale, come postulato nei suoi Elementi di Geometria.

In una nuova edizione degli Elementi di Euclide (***), il professore Gremigni pretende di evitare il postulato della equivalenza, dimostrando i due teoremi (Prop. *E*, *F*.):

1.° *Se due poligoni sono uguali ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro.*

2.° *Se un poligono è parte di un altro poligono, essi non saranno equivalenti.*

Disgraziatamente le dimostrazioni sommarie, che l'autore dà di queste proposizioni, sono erronee, come osservò il prof. Lazzeri in due articoli inserti nella *Rivista di Matematica* (****), e le due risposte dell'autore (*****) sono ben lontane dal demolire le critiche fattegli. Riguardo al primo teorema, osserverò poi che, oltre al difetto imputatogli dal Lazzeri che cioè si possa andare incontro ad infinite operazioni, la qual cosa avviene realmente, come dimostrerò più innanzi, è anche inesatta l'asserzione « allora si potrà ripetere per ognuna di esse (parti) . . . . ciò che sopra abbiamo visto avverarsi per la intera parte comune γ »; poichè, mentre la parte γ era comune ai due poligoni primitivi α, β, le nuove parti γ', γ'' sono comuni, l'una ad α e a γ, l'altra a β e a γ.

Nella dimostrazione poi del secondo, l'errore è anche più grave, poichè dice: « Allora le parti di β potranno avere le loro corri-

(*) *Principii della eguaglianza dei poligoni* — Milano, 1881.
(**) *Periodico di Matematica.* — Vol. I., pag. 44.
(***) *Gli Elementi di Euclide.* — Libro primo — Firenze, 1893.
(****) Vol. II., pag 189 e Vol. III., pag. 121.
(*****) *A proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche.* — *Riv. di Mat.* Vol. III., pag 64. — *Ancora a proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche* — *Seconda risposta al prof. Lazzeri.* — Firenze, Stab. tip. Fiorentino, 1893.

spondenti, nel poligono α, o internamente a β stesso, o esternamente. Se consideriamo quelle che hanno le loro corrispondenti internamente, alcune di esse saranno sovrapposte, in totalità o in parte; altre no. Rispetto a quelle sovrapposte in parte, sappiamo dal teorema precedente che, facendo astrazione dalle parti comuni, le rimanenti parti sono equivalenti. » Ora sieno μ, ν, ... le parti di β che hanno le loro corrispondenti μ', ν', ... internamente a β stesso; affinchè il ragionamento del Sig. Gremigni potesse camminare, converrebbe ammettere che μ si sovrapponesse proprio a μ', ν a ν', ecc.; cioè ciascuna alla sua corrispondente. E come andrebbe invece se μ si sovrapponesse a ν', o ν a μ'?

Se il Sig. Gremigni, imitando Euclide, del quale si è fatto editore, invece di accennare succintamente al modo, onde credeva che le sue proposizioni si potessero dimostrare, avesse cercato di dimostrarle accuratamente, si sarebbe accorto che la sovrapposizione di parti non corrispondenti costituisce la maggior difficoltà che si oppone alla dimostrazione del suo primo teorema, qualora la parte comune ai due poligoni eguali non sia convessa; difficoltà che persiste anche se, nella definizione di poligoni equivalenti, si toglie la limitazione che il numero delle parti sia finito.

In una sola cosa il Gremigni potrebbe aver ragione, quando cioè scrive (*): « allora quello che si renderà necessario di fare, sarà di estendere il concetto di equivalenza »; ma non insiste su questo concetto, poichè vuole difendere la sua dimostrazione anche per il caso che il numero delle operazioni possa essere infinito, caso che egli poi nega recisamente, contro il vero.

Una nuova soluzione della quistione fu recentemente proposta dal Sig. Schur in una nota, della quale fu pubblicata una traduzione nel *Periodico di Matematica* (vol. VIII pag. 153) col titolo « Sull'area delle figure piane limitate da linee rette ». Egli cerca di far corrispondere univocamente ad ogni poligono un rettangolo equivalente che abbia un lato dato, *partendo* dalle due proposizioni:

1.° *Ad ogni triangolo si può associare un rettangolo equivalente avente un lato dato.*

(*) *Seconda risposta al prof. Lazzeri*, pag. 2.

2.° *Ogni poligono può in un modo determinato venire decomposto in triangoli.*

Per la prima l'autore asserisce che v'è bisogno di poche spiegazioni, ma non mi pare che abbia ragione; poichè un triangolo si può scomporre in infiniti modi in parti, e senza il postulato ammesso da De Paolis, può rimanere il dubbio che, ommettendo alcune delle parti derivanti da una divisione qualunque, si possa colle rimanenti ricostruire il triangolo, e allora, se ad ogni parte facciamo corrispondere un rettangolo equivalente che abbia un lato dato, il triangolo potrebbe equivalere a due somme diverse, ossia a due rettangoli diversi.

Per la seconda proposizione, egli ricorre alla scomposizione usata da Möbius, nella quale i triangoli hanno per basi i lati del poligono e per vertice comune un punto del suo piano, e forse per evitare la regola dei segni, v'introduce la limitazione che il punto debba essere scelto nell'interno del poligono, o sul suo contorno.

Egli dice poi: « In tal modo, per ogni posizione del vertice è associato al poligono un rettangolo determinato che nasce riunendo i rettangoli equivalenti ai triangoli corrispondenti ed aventi per un lato un dato segmento, ed è agevole dimostrare che il rettangolo ottenuto ha un'area indipendente dalla posizione assunta per il vertice ». Ora mi sembra che anche quest'ultima asserzione abbia bisogno di conferma; poichè, se è evidente che la somma di quei triangoli è costante, per la ragione, e per essa sola, che tale somma è sempre il poligono, la qual cosa d'altronde sussisterebbe per ogni altra scomposizione, non credo che sia mai stato dimostrato, dietro la nuova definizione di poligoni equivalenti, che sia costante la somma dei rettangoli equivalenti, che hanno un lato dato; e dubito assai che tal cosa si possa dimostrare in avvenire.

Non conosco la polemica dei Signori M. Rethy di Budapest e H. Dobriner di Francoforte, contenuta nell'ultimo fascicolo dei *Mathematische Annalen* (Bd. XLII, pag. 275-296), sulla proposizione « Se due superficie piane eguali hanno una parte comune, le parti non comuni sono equivalenti »; ma a quanto ne dice il Prof. Lazzeri in una nota alla sua « Risposta al Prof. Gremigni » (*), sembra che

(*) *Rivista di Matematica*. Vol. III, pag. 122.

l'ultima conclusione, cui sarebbe giunto il Sig. Rethy, non sia indipendente dal postulato ammesso dal De Paolis.

Al punto, al quale sono arrivati gli studi sulla nuova teorica della equivalenza dei poligoni, pare dunque che questa non si possa reggere senza il postulato di cui si è fatto parola. Ora, se questo postulato è pure soddisfacente per lo svolgimento formale della teorica, può dirsi altrettanto per la sua ammissibilità?

È senza dubbio arbitrario il porre dei postulati i quali esprimano proprietà di enti che stiamo per introdurre nella scienza; ma è forse permesso ammetterne altri che esprimano proprietà nuove per enti già prima introdotti, senza verificare se le nuove proprietà sieno, o no, in contraddizione con quelle che sono state anteriormente accettate? No certamente.

Quanto non si è fatto e studiato per evitare l'assioma delle parallele, il quale era appunto in queste circostanze! E la teorica delle parallele non si potè dire rigorosa, finchè non furono stabilili tutti i casi possibili, fra i quali fosse libera la scelta.

D'altronde il postulato della equivalenza è negativo, e perciò non si può chiamare in suo soccorso l'esperienza, alla quale non è dato di giudicare in una infinità di casi.

Per esempio non ripugnava il postulato sperimentale, che era posto a fondamento della teorica delle parallele, nella prima edizione italiána degli Elementi del Baltzer; poichè, con esso, non si ammetteva già che la somma degli angoli di qualunque triangolo fosse di due retti, ma solo che esistesse uno di questi triangoli, e si dimostrava che, ove la somma degli angoli fosse eguale a due retti in un solo triangolo, tale dovrebbe essere in tutti.

Nè mi si dirà che il postulato debba ammettersi per la sua evidenza, poichè questa non deriva dalla proprietà dei poligoni di essere equivalenti, quando si possono scomporre in uno stesso numero di parti rispettivamente eguali; anzi vedremo che, a priori, esso potrebbe essere in contraddizione con questa proprietà. La sua evidenza non può derivare se non dal concetto di grandezza intuitivamente attribuito alle aree dei poligoni, quale fu presupposto da Euclide, e dalle proprietà che si ammettono per le grandezze.

Studiando le conseguenze che discendono dall' ammettere il postulato, troviamo che, per esso, di due poligoni dati, uno deve essere necessariamente, o maggiore (prevalente), o equivalente, o minore (suvvalente) dell'altro; e, in forza della teorica delle grandezze equivalenti, se a due poligoni eguali si aggiungono due poligoni non equivalenti, la somma che si ottiene, aggiungendo il maggiore, deve superare quella che si ottiene, aggiungendo il minore. Ne risulta, che *se da due poligoni eguali od equivalenti, si toglie una parte eguale ad un terzo poligono, le parti restanti devono essere equivalenti, cioè tali da potersi scomporre in uno stesso numero finito di parti rispettivamente eguali.*

Cerchiamo di dimostrare direttamente il caso più semplice di questa proposizione; ossia il teorema.

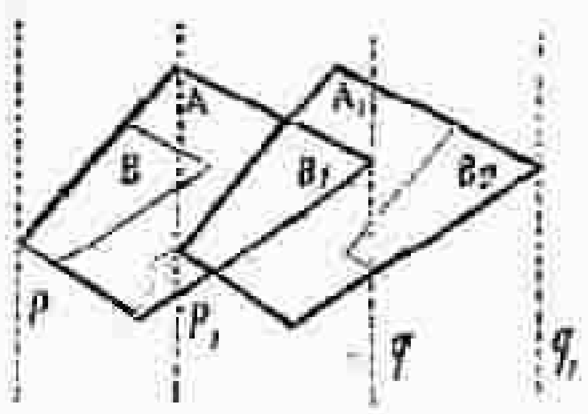


Fig. 1ª.

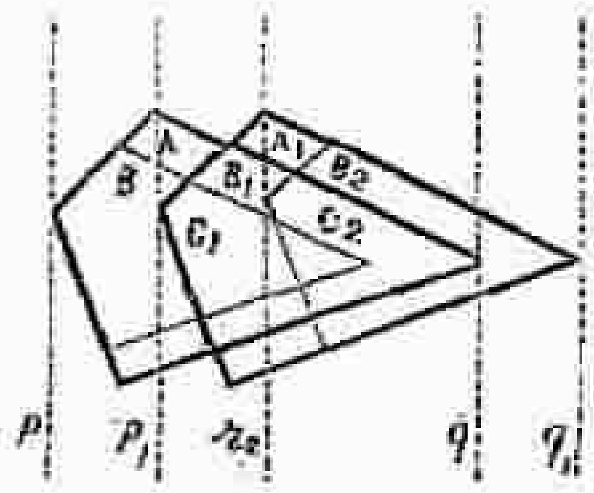


Fig. 2ª.

Se due poligoni congruenti hanno una parte convessa comune, e una soltanto, le loro parti non comuni sono equivalenti.

Ammetteremo dimostrate le due proposizioni:

1.ª *Due poligoni convessi non possono avere più d'una parte comune, la quale è necessariamente convessa.*

2.ª *Se a poligoni equivalenti si aggiungono poligoni equivalenti, le somme sono equivalenti.*

Sieno A, A_1 i due poligoni, B_1 la parte convessa comune (fig. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª).

Consideriamo prima B_1 come annessa alla figura A_1 e costruiamo la B ad essa corrispondente nella congruenza, e annessa alla figura A; similmente, considerata B_1 annessa alla A_1, si trovi la sua corrispondente B_2 nella A_1.

Poichè, nella congruenza, ad A, B, B_1 corrispondono ordinatamente A_1, B_1, B_2, la parte di A esterna ai poligoni B, B_1 sarà congruente alla parte di A_1 esterna a B_1, B_2.

Supponiamo ora (fig. 1ª) che B, B_1 e, per conseguenza, neanche B_1, B_2 non abbiano alcuna parte comune; allora le parti non comuni dei poligoni A, A_1 saranno composte ciascuna di due parti, e le parti dell'una saranno congruenti a quelle dell'altra; cioè la parte di A esterna a B, B_1 alla parte di A_1 esterna a B_1, B_2 e il poligono B al poligono B_2; le accennate parti non comuni saranno dunque equivalenti, come si doveva dimostrare.

Se invece la B ha una parte comune C_1, necessariamente convessa, colla B_1, anche B_2 avrà con questa una parte convessa comune C_2, congruente alla C_1.

Per dimostrare il teorema in questo caso, basterà provare che la parte della B esterna a C_1 è equivalente alla parte di B_2 esterna a C_2;

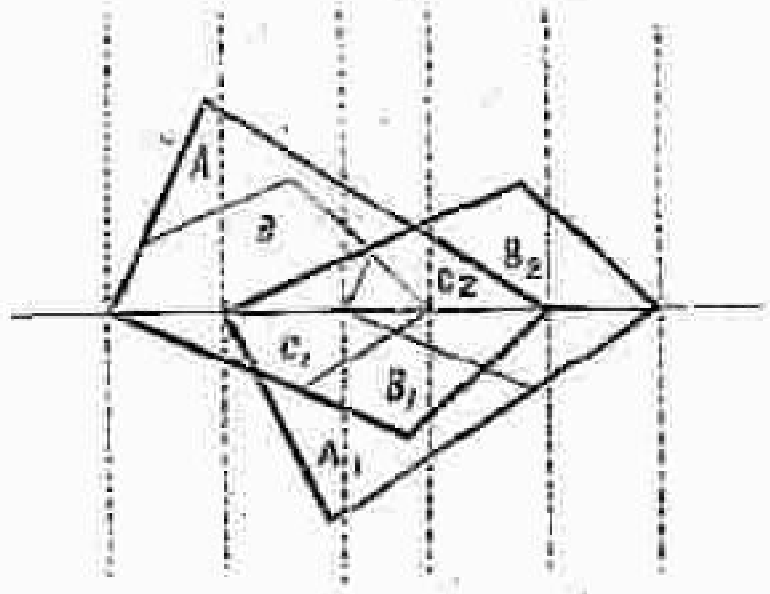


Fig. 3ª.

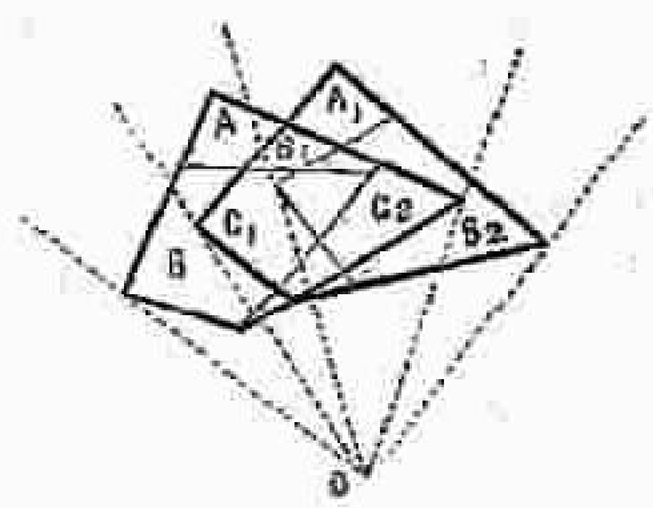


Fig. 4ª.

poichè, se ciò è vero, le parti dei poligoni A, A_1 esterne a B_1 sono composte di due parti equivalenti; cioè la parte di A esterna a B, B_1 è congruente alla parte di A_1 esterna a B_1, B_2, come si è già dimostrato; e la parte di B esterna alla B_1, o ciò che è lo stesso, a C_1, è equivalente alla parte di B_2 esterna alla stessa B_1, ossia a C_2, come si deve provare.

Ora osserviamo che B, C_1 corrispondono, nella congruenza, a B_1, C_2; e perciò la parte di B esterna a C_1 è congruente alla parte di B_1 esterna a C_2; basterà dunque provare che sono equivalenti le parti di B_1, B_2 esterne a C_2; ossia che nei nuovi poligoni B_1, B_2, che si corrispondono nella congruenza primitiva e hanno in comune l'unica parte convessa C_2, le parti non comuni sono equivalenti. Siamo così ricondotti al teorema stesso che si deve dimostrare, essendosi solo cambiati i due poligoni congruenti.

Similmente da questo caso potremo passare all'altro, in cui si devono dimostrare equivalenti le parti non comuni di C_2 e di un nuovo poligono C_3 ad esso congruente, poi quelle di due nuovi poligoni congruenti D_3, D_4; e così di seguito.

L'osservazione precedente ci permette di semplificare la figura; poichè, per essa, possiamo dispensarci dal costruire le figure B, C_1, D_2, ...; anzi, poichè le figure B_1, C_2, D_3, ... risultano dalle precedenti, come parti comuni, le sole figure che si dovranno costruire, dopo A, A_1, saranno B_2, C_3, D_4, ...

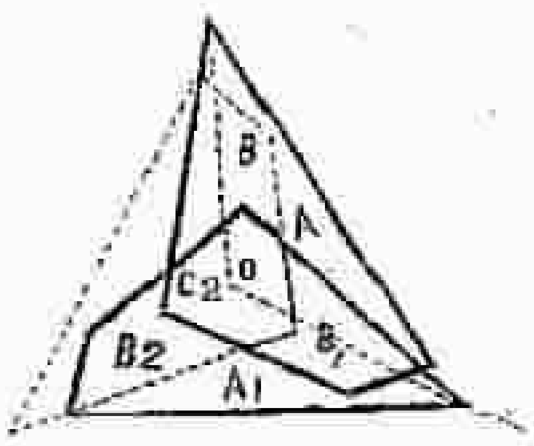


Fig. 5ª.

Possiamo ancora osservare che invece delle figure B_2, C_3, D_4,... possiamo costruire le figure A_2, A_3, A_4, ... (fig. 5ª) congruenti ai poligoni primitivi, in modo che, nella serie di poligoni A, A_1, A_2, A_3, A_4,.... ciascuno corrisponda al successivo nella primitiva congruenza. I poligoni B_1, C_2, D_3, ... saranno allora le parti comuni ai due primi poligoni della serie, ai tre primi, ai quattro primi, ecc.

(*Continua*). G. Biasi.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sulla quistione 145. — La quist. 145 (*) si può risolvere in modo assai più rapido osservando che alla relazione che definisce i numeri a_1, a_2, a_3,.., cioè

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

si può, aggiungendo a_{n-1} ai due membri, dar la forma

$$2a_n + a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2b + a \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Il limite di a_n per n infinito, se esiste, ha dunque il valore

$$\lim_{n=\infty} a_n = \frac{2b+a}{3}.$$

Per dimostrare poi che il detto limite esiste, basta osservare che i numeri a_1, a_3, a_5, ... vanno crescendo, restando inferiori a b, mentre a_2, a_4, a_6, ... decrescono, restando superiori ad a. I limiti di a_n, per n pari e per n dispari, non possono differire tra loro, perchè, scritta la (1) sotto la forma $2a_n - a_{n-2} = a_{n-1}$, si vede che il primo membro tende ad uno dei predetti limiti, ed il se-

(*) *Periodico di Matematica*, 1893, pp 76, 127. — V. anche Cesàro « *Corso di analisi algebrica* » p. 109.

condo membro tende all'altro limite. Finalmente, se si vuole l'espressione di a_n, si scriva l'eguaglianza (2) sotto la forma

$$a_n - \frac{2b+a}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{2b+a}{3}\right).$$

Se ne deduce subito

$$a_n - \frac{2b+a}{3} = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(b - \frac{2b+a}{3}\right) = (-1)^n \frac{b-a}{3 \cdot 2^n}.$$

E. Cesàro.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93 (*)

Capodistria: *i. r. Ginnasio* — 1) Quali numeri hanno la proprietà di diventare divisibili per 11 se vengono di una unità aumentati, e per 25 se di una unità diminuiti? Si determini la somma dei primi 10 numeri aventi questa proprietà.

2) Il perimetro d'un pentagono regolare è $=372{,}9$ dm.. Qual'è il volume d'un prisma retto che ha per base questo pentagono e per altezza la diagonale del medesimo?

3) Trovare l'equazione del cerchio che passa per i punti $(x_1=12,\ y_1=0)$, $(x_2=4,\ y_2=-6)$ e per l'origine delle coordinate?

Gorizia: *i. r. Ginnasio* — *a*) La somma di tre numeri, in progressione geometrica, è uguale a 28; il prodotto di quello medio per la somma dei due estremi è eguale a 160: trovare i tre numeri.

b) Calcolare il raggio della base di un cono retto la cui superficie totale è m². 2,4, e il cui angolo al vertice è $67^0\, 13'\, 36''$.

c) Le coordinate dei vertici di un quadrilatero sono: $A\,(x_1=2,\ y_1=5)$, $B\,(x_2=4,\ y_2=3)$, $C\,(x_3=10,\ y_3=6)$, $D\,(x_4=6,\ y_4=12)$. Calcolarne i lati, gli angoli e l'area.

Rovereto: *i. r. Ginnasio* — I. Nella compera d'una casa vennero pagati fiorini 9000 al momento, e fio. 1800 per cinque anni consecutivi alla fine di ogni anno. Quale ne fu il prezzo calcolando l'interesse composto del 4 $^0/_0$?

II. Un prisma retto ed una piramide retta di eguale altezza hanno per base un triangolo equilatero di lato a. Dovendo la superficie laterale del prisma essere uguale a quella della piramide, si domanda qual'è la comune altezza dei due corpi.

III. Dati tre punti determinare l'altezza della perpendicolare calata dal terzo alla retta che passa pei due primi

$$A(-1,\ -5)\ ,\quad B(2, 5)\ ,\quad C(7, 2)\,.$$

(*) È bene che il lettore sappia come, nei Ginnasi, i candidati siano tenuti a risolvere almeno due problemi sui tre da cui ciascuno dei temi è costituito. Il tempo concesso è, ordinariamente, di 4 ore.

I temi qui riportati si riferiscono, per i Ginnasi, all'anno scolastico 1891-92, per le Scuole reali all'anno 1892-93.

TRENTO: *i. r. Ginnasio* — *a*) Risolvere le equazioni

$$\sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-1}=\frac{11}{2}, \qquad 2x+y+\frac{1}{y}=\frac{65}{4}.$$

b) Il lato di un tronco di cono è lungo 3,26 m. ed è inclinato verso la base di $73^0\,27'\,19''$. Qual' è il volume del cono supplementare se quello del tronco di cono è di m³. 372,486?

c) Per calcolare l'altezza di un oggetto AB, che si trova sopra un pendìo, si traccia dal piede A lungo il pendio una retta AC, che si misura, e da C si determina l'angolo visuale ACB, poi si prolunga la retta AC di un tratto CD, che si misura, e da D si determina parimenti l'angolo visuale ADB. I risultati delle misurazioni sono: $AC=7{,}6$ m., $CD=6$ m., ang. $ACB=49^0\,37'\,21''$, ang. $ADB=34^0\,32'\,34''$. Qual'è l'altezza dell'oggetto AB?

TRENTO: *i. r. Ginnasio* (Sezione tedesca) — 1) Una rendita di 800 fiorini la quale scade per 25 anni alla fine d'ogni anno, deve venir sostituita da un'altra che, soltanto dalla fine del 4° anno in poi, viene riferita a 10 anni, qual' è il valore di questa (al 4 %)?

2) In un tronco di cono retto è nota la differenza dei raggi delle basi, il lato e il volume. Si cercano i raggi e l'angolo d'inclinazione fra il lato e la base

a) generalizzare *b*) per $d=3\,m$, $s=5\,m$, $r=2000\,m^3$.

3) Un cerchio il cui centro cade nell'origine d'un sistema di coordinate ortogonali, passa per il punto $M\,(4{,}3)$, trovare i punti di sezione del medesimo con la retta $y=\frac{3}{2}x+3$ e le tangenti al cerchio in questi punti.

TRIESTE: *Ginnasio comunale* — *a*) Si risolvano le seguenti equazioni:

$$\sqrt{72+x^2+4y^2+4xy}=x+2y+2$$
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=\sqrt{x+y+\sqrt{60+4xy}+3}.$$

b) Un tale possiede un capitale di fiorini 5634, il quale è impiegato al 4 %, e lo aumenta annualmente, al principio di ciascun anno, non soltanto degli interessi, ma ben anche di fio. 840. Quale sarà il suo capitale dopo 8 anni?

c) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa sia eguale alla distanza del punto $M_1\,(x_1=0,\ y_1=0)$ dalla retta $y=x\sqrt{48}+56$, ed un angolo acuto del medesimo sia eguale a $35^0\,20'\,5''$. Si risolva il triangolo.

TRIESTE: *i. r. Ginnasio* — *a*) Una persona che dovrebbe pagare alla fine d'ogni anno, per venti anni consecutivi, una stessa somma, soddisfa al suo debito pagando al principio del ventennio fiorini 5100. Qual'è quella somma, se si computano gli interessi composti annui al 5 %?

b) In un triangolo sono dati: il lato $a=18$, l'angolo ad esso opposto $\alpha=60^0\,40'\,16''$ e la somma degli altri due lati $b+c=30$. Calcolare i raggi del circolo inscritto e del circolo circoscritto.

c) Calcolare l'angolo delle tangenti condotte dal punto $A\,(5{,}6)$ al circolo $x^2+y^2=16$, e l'area del triangolo limitato da quelle tangenti e dalla corda che unisce i punti di contatto.

VIENNA: *i. r. Scuola reale sup. nel I Circ.*.

1. I. $\frac{y+\sqrt{5}}{x}+\frac{2y+3x}{4(y-\sqrt{5})}=0$; II. $\frac{x+3y}{5}+\frac{1}{y-x}=0$.

2. Si determini l'area del triangolo che è limitato dall'asse delle x e dalle due tangenti condotte alle curve $x^2+4x+y^2=9$ ed $y^2=4x$ in uno dei loro punti d'intersezione.

3. Un triangolo col lato a ed i due angoli adiacenti β e γ ruota attorno al lato a; quanto importano volume e superficie del corpo di rotazione? ($a=59{,}9$ cm., $\beta=71^0\,59'\,45''$, $\gamma=60^0\,1'\,25''$).

4. Al primo maggio la declinazione del sole è $15^0\,7'$; a che ora leva il sole a Vienna in questo dì e che altezza raggiunge alle 10 di questo giorno? La lat. geogr. di Vienna è $48^0\,12'\,36''$.

VIENNA: *i. r. Scuola reale sup. nel III Circ.* — 1. Le lunghezze dei due cateti di un triangolo rettangolo sono numeri intieri. Se si diminuisce il cateto maggiore di 14 m. e si aumenta il minore di 8 m., si ottiene un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è eguale a quella dell'originario. Che lati ha questo?

2. Si calcolino i lati ed i due angoli incogniti di quel triangolo, nel quale il rapporto di due lati è $14:13$, l'angolo compreso da questi $112^0\,37'\,11''$ ed il raggio del cerchio circoscritto è $=24{,}375$ cm..

3. Si conosce la somma $S=93{,}75$ cm.^{2} delle due basi di un tronco di piramide retta rettangolare, la somma dei perimetri $s=59{,}5$ cm., il rapporto di due lati omologhi delle due basi $p:q=4:3$, e la lunghezza di uno spigolo laterale $l=4{,}225$ cm.. Calcolarne il volume.

4. Scrivere l'equazione del cerchio che tocca la retta $5y+12x=338$ nel punto che ha l'ascissa $=24$, e passa per il punto $(7,-7)$.

VIENNA: *i. r. Scuola reale sup. nel VII Circondario* — 1. In una progressione aritmetica di numero pari di termini, la somma dei termini di posto dispari è 70, e quella dei termini di posto pari è 85; il prodotto del primo e dell'ultimo termine è 58. Qual'è la progressione e il numero dei suoi termini?

2. A due circoli coi raggi $R=15$ cm. ed $r=5$ cm. e la centrale $c=25$ cm., sono condotte le tangenti comuni interne. Si domanda la superficie ed il volume di quel corpo che nasce dalla rotazione della figura compresa fra le tangenti e gli archi da esse abbracciati, intorno alla centrale.

3. In un luogo che ha la lat. geogr. $48^0\,12'\,54''$ si trova avanti mezzogiorno la vera altezza del centro del sole a $53^0\,17'\,42''$ e l'azimut dello stesso, misurato da sud per est. $37^0\,12'\,18''$. Si deve calcolare la declinazione del sole ed il tempo medio del luogo al momento dell'osservazione, se l'equazione del tempo è -3 m. $27{,}5$ s..

4. Trovare l'equazione del luogo geometrico del centro del cerchio che passa per il punto dato $M\,(x_1=6,\ y_1=8)$ e tocca il circolo $x^2+y^2=36$, e discuterla.

VIENNA: *i. r. Scuola reale sup. nel XV Circ.* — 1. Un tale ha da pagare un debito $c=15000$ f. in $n=12$ rate posticipate, col $4\,\%$ d'interesse. Dopo pagate $a=6$ rate, desidera pagare il resto in $n=12$ rate posticipate. Quanto importa ognuna di queste, se per esse viene calcolato il $4\frac{1}{4}\,\%$ d'interesse?

2. Sotto quale azimut deve partire da Lisbona (lat. N. 38° 42′ 24″, long. Or. 8° 33′ 30″) una nave, che, navigando lungo un circolo massimo, voglia arrivare a Rio Janeiro (lat. S. 22° 53′ 51″, long. Oc. 25° 23′ 15″)?

3. Per il punto $\left(x_1 = -\frac{8}{7},\ y_1 = 0\right)$ si deve condurre una segante alla parabola $y^2 = 4x$, così che l'angolo formato dalle tangenti condotte per i punti d'intersezione sia eguale all'angolo d'inclinazione della segante coll'asse delle ascisse. Si devono dare le equazioni di queste tangenti, e si deve calcolare il loro angolo.

4. Risolvere le equazioni:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10(x-y)^3 = 0,$$
$$2x^2 - 7xy + 2y^2 + \frac{37}{2}(x-y) = 0.$$

Vienna: *i. r. Scuola reale sup. nel XVIII Circondario* — 1. In un triangolo, che ha la base di 12 m. e l'altezza di 8 m., si deve condurre una retta parallela alla base, così che l'area del triangolo separato stia all'area del trapezio come 7 : 9. A che distanza dalla base devesi condurre la parallela e che lunghezza avrà?

2. Si calcoli la distanza fra Parigi e Pietroburgo, date le coordinate geografiche dei due luoghi:

$$\text{Parigi}\left\{\begin{array}{l} l_1 = 20^0 \\ l'_1 = 48^0 50' 11'',2 \end{array}\right. ;\quad \text{Pietroburgo}\left\{\begin{array}{l} l_2 = 47^0 58' 12'' \\ l'_2 = 59^0 56' 29'',7. \end{array}\right.$$

3. In tre progressioni geometriche, i primi termini formano pure una progressione geometrica col quoziente 2; i quozienti delle tre progressioni formano una progressione aritmetica colla differenza 1; la somma dei secondi termini delle tre progressioni è 24, e la somma dei tre primi termini della terza è 84. Quali sono le tre progressioni?

4. Si determini il volume di quel corpo che si ha dalla rotazione della parte comune ai due circoli $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ intorno alla linea dei centri.

Wiener Neustadt: *Scuola reale sup. provinciale* — 1. Gli angoli di un triangolo sono $\alpha = 66^0 55' 16''$, $\beta = 60^0 12' 38''$ e la differenza dei segmenti in cui viene diviso dalla sua altezza il lato opposto al terzo angolo è $d = 12$ cm.. Si calcolino quest'altezza ed i tre lati.

2. Risolvere l'equazione $x^2 - 0{,}76839\,x - 2{,}4635 = 0$ trigonometricamente.

3. Una sfera ha la superficie $S = 24{,}576$ cm².. Si deve trasformarla in un cilindro retto di volume e superficie laterale uguale a quella della sfera. Calcolare l'altezza ed il raggio del cilindro.

4. Si determini la differenza fra la distanza sferica e la distanza rettilinea dei due luoghi: Vienna (lat. 34° 2′ 42″, long. 48° 12′ 35″) e Berlino (lat. 31° 3′ 30″, long. 52° 30′ 47″), posto il raggio della terra $x = 6377{,}5$ kil..

(*Continua*).

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 159, 164*, 165**, 166*, 167* e 168**

159. *Se dagli estremi di un segmento che scorre sopra una tangente di un cerchio (in generale di una conica qualunque) si conducono le coppie di tangenti alla curva, i loro punti d'incontro descrivono una conica, avente un contatto quadripunto col cerchio dato. Al variare della lunghezza del considerato segmento, le coniche corrispondenti formano un fascio, cui appartiene il cerchio dato e la tangente a questo (contata due volte) nel punto opposto al punto di contatto con la tangente data.*

Applicazione. *Dato un triangolo vi sono quattro coppie di tangenti (non necessariamente tutte reali) al cerchio inscritto, ognuna delle quali sega sui tre lati tre segmenti uguali.* (F. Palatini).

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania* a Catania (*).

Sia K una conica a centro O, t una sua tangente, P il relativo punto di contatto, AA' un segmento di t eguale al segmento dato. Da A ed A' oltre la t si potranno condurre a K due tangenti a ed a', una per ciascun punto. Facendo scorrere AA' su t, i punti A ed A' generano due punteggiate (A) ed (A') direttamente eguali, e quindi proiettive fra loro, e perciò le tangenti a ed a' generano due serie (a) ed (a') di tangenti a K rispettivamente proiettive alle punteggiate (A) ed (A'), e quindi proiettive fra di loro. Il luogo del punto M comune a due tangenti corrispondenti a ed a' è perciò una conica L.

Detto Q il punto di K diametralmente opposto a P, a mano a mano che A (e quindi anche A') tende verso il punto all'infinito di t, M tenderà verso Q, che sarà perciò un punto di L. Sia $PB = PB' =$ metà del dato segmento, e si guidino da B e B' le rimanenti tangenti alla K, delle quali B_1, B'_1 sieno i punti di contatto ed I il punto comune; il punto I apparterrà manifestamente ad L. Nel triangolo circoscritto $BB'I$ le rette BB'_1, $B'B_1$, IP concorrono in un punto; e siccome P è il punto medio di BB', la retta $B_1B'_1$ risulterà parallela alla tangente BB'. Ora la retta $B_1B'_1$ indica la direzione coniugata al diametro IO, il quale perciò si confonderà col diametro PQ.

Si tiri QB_1, e si dica C il punto in cui QB_1 taglia t. La polare di B rispetto a K è PB_1, onde la polare del punto all'infinito di PB_1 è la retta BO. Ma il diametro coniugato alla direzione PB_1 è parallelo alla retta QB_1, quindi BO è parallela a QB_1, e per conseguenza $PB = BC$, e C è un punto di L. Similmente si dimostra che se $B'D = PB'$, sarà D un punto di L.

Si consideri il quadrangolo completo $PICB_1$. Un suo punto diagonale è B, un altro è Q, e il terzo si indichi con R. Siccome B è il punto medio di PC, sarà la retta $QR \equiv s$ parallela a $PC \equiv t$.

(*) La parte principale di questa quistione si trova svolta nella *Geo. analitica* del Salmon [Es. 6°, pp. 208, 209 della 4ª ris. dell'ed. ital.], crediamo perciò di esimerci dal pubblicare due dimostrazioni analitiche inviate dai Sigg. *E. de Vito* e *F. Mariantoni*, studenti nella R. Università di Roma. [*N. d. Red.*].

Si assumano Q come centro ed s come asse d'una omologia, in cui P ed I sieno punti corrispondenti. In questa omologia, per quanto ora è stato concluso, alla conica K corrisponderà la conica L (*), la quale passando pel centro Q d'omologia, sarà tangente in Q alla conica K, ed s è la tangente comune.

Ora se due coniche K ed L hanno un contatto bipunto Q, e si conducono per Q una retta QPI a segare K ed L in P ed I rispettivamente, e una retta QB_1C a tagliare le medesime coniche in B_1 e C, la retta PB_1, IC si taglieranno in un punto R, che si troverà nella retta in cui stanno gli altri due punti comuni alle coniche date; e se questa retta è la tangente comune alle due coniche medesime, allora queste avranno nel punto di contatto, un contatto quadripunto (**). E siccome nella retta s giace, oltre R, il punto analogo, comune alle rette PB'_1, ID, realmente la retta che contiene gli altri due punti comuni alle K ed L è la s, e perciò le dette coniche hanno in Q un contatto quadripunto.

Tutte le coniche L, che si ottengono considerando gli infiniti segmenti di t avendo un contatto quadripunto in Q, formano un fascio (ed anche una schiera). Per ottenere quella conica del fascio, che passa per un punto M, basterà condurre da M le tangenti alla conica data, e queste taglieranno dalla t un segmento, la cui conica corrispondente è la cercata.

La conica data appartiene al fascio, ed è la conica corrispondente ai segmenti nulli di t. La tangente in Q contata due volte, rappresenta una conica degenere del fascio, e corrisponde ai segmenti infiniti di t.

Se la conica data è una parabola, i ragionamenti precedenti non subiscono che leggiere modificazioni, dovendosi sostituire al diametro PQ, il diametro della parabola uscente da P. Le coniche L in questo caso risultano tutte parabole, che hanno un contatto quadripunto con la parabola data nel suo punto all'infinito.

Applicazione. — Si consideri ora un triangolo circoscritto a un dato cerchio. A tutti i segmenti d'un lato corrispondono, come si è dimostrato, le coniche d'un fascio F; a tutti i segmenti d'un altro lato le coniche d'un secondo fascio F'. Se fra le coniche di questi due fasci si stabilisce una corrispondenza univoca, in modo che siano corrispondenti quelle coniche dei due fasci che corrispondono a segmenti eguali dei due lati considerati, i due fasci saranno proiettivi, e il luogo dei punti comuni a due coniche corrispondenti sarà una quartica piana. E siccome il cerchio dato è comune ai due fasci, e corrisponde a se medesimo, quella quartica si spezza in due coniche, cioè nel cerchio dato ed in una conica γ. In modo analogo si genera una conica γ', considerando i fasci corrispondenti a uno dei lati sopra indicati e al rimanente lato del triangolo. Le coniche γ e γ' hanno, in generale, quattro punti comuni, ed è chiaro che uno qualunque di tali punti è tale che per esso guidando le tangenti al cerchio iscritto, queste taglieranno dai lati del triangolo segmenti eguali tra loro.

S. Catania.

(*) Nella indicata omologia ai punti P, B_1, B'_1, Q di K corrispondono I, C, D, Q di L, e alla tangente s di K nel punto Q, la stessa tangente s di L nel punto medesimo Q. Così L è determinata da quattro punti e dalla tangente in uno di essi.

(**) Si vegga, p. es. N. S. Dino — *Geom. proiett.*, pag. 217.

164'. *Nella serie* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ *si ha per* $n \geqq 2$

$$x_n = h x_{n-1} + l.$$

Dato il valore a_r *di* x_r *esprimere* x_n *per mezzo di* h, l, n, a_r.

(A. Tagiuri).

Risposta dal Sig. *R. Scozzari* licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Consideriamo le successive relazioni

$x_2 = h x_1 + l, \quad x_3 = h x_2 + l, \quad x_4 = h x_3 + l, \ldots\ldots x_r = h x_{r-1} + l,$
dico che da esse si ricava

$$x_r = h^{r-1} x_1 + l \,.\, \frac{h^{r-1} - 1}{h - 1}\,. \qquad [1]$$

Si ha intanto $x_3 = h(h x_1 + l) + l = h^2 x_1 + l \dfrac{h^2 - 1}{h - 1}$: supponiamo ora vera la [1] nel caso in cui r ha un valore determinato r e dimostriamo che è pur vera quando si cambia r in $r + 1$. Segue infatti

$$x_{r+1} = h x_r + l = h^r x_1 + h l \frac{h^{r-1} - 1}{h - 1} + l = h^r x_1 + l \,.\, \frac{h^r - 1}{h - 1},$$

e poichè la formola stessa è stata verificata pel caso di $r = 3$, essa è vera sempre.

Avremo per ciò pei due indici $r + s > r$ e $r - s < r$

$$x_{r+s} = h^{r+s-1} x_1 + l \,.\, \frac{h^{r+s-1} - 1}{h - 1}, \quad x_{r-s} = h^{r-s-1} x_1 + l \,.\, \frac{h^{r-s-1} - 1}{h - 1}$$

e sostituendo quivi il valore di x_1 tratto dalla [1], in cui si ponga $x_r = a_r$:

$$x_{r+s} = h^s a_r + l \,.\, \frac{h^s - 1}{h - 1}, \qquad x_{r-s} = h^{-s} a_r + l \,.\, \frac{h^{-s} - 1}{h - 1}\,.$$

Facendo in queste formole $r + s = n$ ed $r - s = n$, rispettivamente, donde $s = n - r$ e $s = r - n$, le medesime possono raccogliersi nella formola unica

$$x_n = h^{n-r} a_r + l \,.\, \frac{h^{n-r} - 1}{h - 1},$$

che è l'espressione cercata.

165''. *Dimostrare che il prodotto di tutti i quozienti completi della frazione continua generata dalla frazione ordinaria irriducibile* $\dfrac{P}{Q}$ *è uguale a* P.

(A. Tagiuri).

Dimostrazioni analoghe dai Sigg. Prof. *V. Sferra*; *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli; *M. Piattelli*, alunno del R. Liceo di Bari e *R. Scozzari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti (*).

I quozienti completi siano:

$$a_1 + \frac{V_1}{Q}, \quad a_2 + \frac{V_2}{V_1}, \ldots\ldots a_{n-1} + \frac{V_{n-1}}{V_{n-2}}, \quad a_n + \frac{1}{V_{n-1}}, \quad V_{n-1}\,.$$

(*) Un'altra dimostrazione venne inviata dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Il loro prodotto sarà:

$$\frac{(a_1 Q + V_1)(a_2 V_1 + V_2) \ldots\ldots (a_{n-1} V_{n-2} + V_{n-1})(a_n V_{n-1} + 1) V_{n-1}}{Q . V_1 \ldots\ldots V_{n-2} V_{n-1}};$$

ma

$$a_1 Q + V_1 = P, \quad a_2 V_1 + V_2 = Q, \ldots\ldots$$
$$a_{n-1} V_{n-2} + V_{n-1} = V_{n-3}, \quad a_n V_{n-1} + 1 = V_{n-2},$$

per cui, sostituendo e riducendo, risulta che il prodotto stesso è $= P$, c. d. d..

166*. *Descrivere un cerchio che passi per due punti dati e sia diviso diametralmente da un cerchio dato.* (P. Morino).

Soluzione del Sig. *G. Pucciano*, alunno del R. Liceo di Cosenza.

Siano A e B i punti dati ed O il cerchio dato. Si descriva l'asse del segmento AB il quale tagli il cerchio O in F e D, quindi pei tre punti D, F, A si conduca un cerchio il cui centro sia G. Su GA come diametro si descriva un nuovo cerchio e sia H uno dei punti di sua intersezione con DF; il cerchio di centro H e raggio HA sarà quello cercato.

Infatti poichè l'angolo GHA è retto, perchè inscritto in un mezzo cerchio, la corda AHL del primo cerchio ausiliario sarà divisa in H per metà dalla corda DF e si avrà $\overline{AH}^2 = DH . HF$ e se per H si traccia pur anche la corda MN del cerchio O perpendicolare ad OH, quindi dimezzata da H, si avrà pure $\overline{MH}^2 = \overline{HN}^2 = DH . HF$, perciò $AH = BH = MH = HN$, ossia il cerchio di centro H e raggio HA passa per B e per i punti M ed N allineati col centro e perciò resta diviso diametralmente dal cerchio dato.

Dalla reciproca posizione del cerchio di diametro AG e della retta DF dipende il numero delle soluzioni del problema le quali saranno due, una o nessuna secondochè DF sega, è tangente, od è esterna al cerchio.

Soluzione del Sig. *M. Piattelli*, alunno del R. Liceo di Bari.

Siano A, B i punti dati, O il cerchio dato. Si tiri la retta AB, e dal punto medio del segmento AB s'innalzi la perpendicolare MX. Si tracci poi un cerchio, con centro in un punto di MX, che passi per A e B e tagli quello dato in R, S; si tiri RS fino ad incontrare la retta AB in I e quindi con diametro IZO un secondo cerchio che tagli MX in N, N'; unendo I con N od N', e chiamando H, K i punti in cui IN od IN' incontra il cerchio O, sarà HK il diametro del cerchio cercato.

Infatti considerando le secanti BA, SR del cerchio O', si ha: $IA . IB = IS . IR$ e considerando le seganti SR, HK del cerchio O, si ha: $IS . IR = IH . IK$, quindi $IA . IB = IH . IK$, cosicchè i quattro punti A, B, K, H appartengono ad un medesimo cerchio il quale ha per centro evidentemente il punto N od N' in cui MX incontra HK e per diametro HK.

Le soluzioni sono due, una o nessuna a seconda che il cerchio Z taglia, tocca ed è esterno ad MX (*).

(*) Come il lettore potrà riconoscere facilmente, questa soluzione poco differisce dalla precedente, ma ha il vantaggio di dar lume su quella che segue la quale è assai istruttiva pei giovani scolari.

Il Sig. *V. Columbo*, studente a Napoli, ad una soluzione analoga alla precedente, aggiunge la trattazione del caso in cui la perpendicolare condotta pel punto medio L di AB passa per O, e quindi il punto I va all'infinito. Indicando con R il raggio di O e designando con O' il centro del cerchio cercato, inoltre ponendo $AL = LB = a$, $LO = b$, $LO' = x$, $O'O = y$, per risolvere il problema egli giunge facilmente al sistema d'equazioni

$$x^2 + y^2 = R^2 - a^2 , \qquad x \pm y = b ,$$

dopo di che osserva che x ed y possono considerarsi come i cateti d'un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è nota ed $= \sqrt{R^2 - a^2}$ e la somma o differenza di questi cateti è il segmento b. Costruisce un tale triangolo e mostra che questo nuovo problema può ammettere due, una o nessuna soluzione e quindi altrettante la quistione proposta anche in questo caso.

Risposta della Sig.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Siano A, B i punti dati e C il centro della circonferenza nota. Si sa che le corde comuni alla circonferenza C ed alle circonferenze tracciate per A e B incontrano AB in un punto fisso D. Sia O il centro della circonferenza cercata; un primo luogo del punto O è l'asse di AB, un secondo luogo è la circonferenza descritta su DC come diametro.

Osservando poi che D è punto d'egual potenza rispetto alle circonferenze O e C, si ha $\overline{DO}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{DC}^2 - R^2$, indicando con R il raggio della circonferenza C. Ma $\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{CO}^2$, si dovrà quindi avere $\overline{CO}^2 + \overline{OA}^2 = R^2$, ciò che mostra come il punto O appartenga ancora alla circonferenza il cui centro è il punto medio M di CA e il cui raggio è dato da $\overline{MO}^2 = \frac{R^2}{2} - \overline{CM}^2$. Un altro luogo infine per O è la circonferenza descritta con centro nel punto medio N di CB e con un raggio NO tale che sia $\overline{NO}^2 = \frac{R^2}{2} - \overline{CN}^2$.

Questi valori trovati per MO ed NO mostrano che il problema non sempre è possibile. Una prima condizione di possibilità è che i punti A, B siano contenuti nella circonferenza di centro C e di raggio $R\sqrt{2}$. Ma questa condizione non è sufficiente: la distanza dei punti A, B non può essere qualunque; occorre altresì, perchè le circonferenze MO, NO si taglino, che sia

$$|MO - NO| < \frac{AB}{2} < MO + NO.$$

167*. *Dimostrare che il limite della somma delle successive ed infinite parti auree della parte aurea di un segmento è uguale al segmento stesso aumentato della sua parte aurea.* (G. Pucciano).

Dimostrazione dei Sigg. *G. Tirella*, licenziato dal R. Liceo di Modica e *V. Columbo*, studente a Napoli.

Siano a il segmento dato, a_1 la parte aurea di a, a_2 la parte aurea di a_1 e così di seguito. Si avrà:

$$a_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \; a_2 = a_1\frac{\sqrt{5}-1}{2} = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, \ldots a_n = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n, \ldots$$

cosicchè, le quantità a_1, a_2, ... a_n .... sono in progressione geometrica di ragione $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Questa ragione è poi minore dell'unità poichè $\sqrt{5} < 3$ e quindi $\sqrt{5} - 1 < 2$, per modo che la progressione è decrescente. Il limite della somma dei suoi termini, uguale ad $a_1 : (1 - q)$, sarà perciò

$$a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} : \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = a \, . \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = a \, . \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{4} =$$

$$a \, . \frac{\sqrt{5}+1}{2} = a \, . \frac{\sqrt{5}-1}{2} + a = a_1 + a \qquad \text{(c. d. d.).}$$

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Ceretti* a Rieti (*).

Dalla proprietà nota che la parte aurea della parte aurea di un segmento è uguale alla parte minore del segmento diviso in media ed estrema ragione, risulta la seguente costruzione per trovare le successive parti auree di un segmento AB e delle parti auree che se ne deducono quali sono considerate nell'enunciato.

Si divida AB in media ed estrema ragione in O_1, con $AO_1 > O_1B$ e si prenda a partire da A un segmento $AO_2 = O_1B$: sarà AO_2 la parte aurea di AO_1. Si prenda su AB un segmento $AO_3 = O_1O_2$: sarà AO_3 la parte aurea di AO_2, e si prosegua nello stesso modo.

Il limite della somma della parte aurea di AB e delle successive ed infinite parti auree di questa parte aurea, sarà così il valore della somma

$$[1] \qquad \begin{aligned} &AO_1 + AO_2 + AO_3 + AO_4 + \dots + AO_n + \dots = \\ &AO_1 + BO_1 + O_1O_2 + O_2O_3 + \dots + O_{n-2}O_{n-1} + \dots, \end{aligned}$$

e per rispondere alla quistione basterà mostrare che il punto O_n s'avvicina ad A in modo da distarne meno d'un segmento piccolo a piacere. A questo fine si osservi che, essendo $AO_1 > O_1B$, O_2 cadrà fra A e il centro A_1 di AB, così pure essendo $AO_3 > O_2O_3$, O_4 cadrà fra A e il centro di AO_2, quindi a *fortiori* fra A_1 e il centro A_2 di AA_1. In modo analogo si prova che O_6 cade fra A e il centro A_3 di AA_2 e in generale O_{2n} fra A e il centro A_n di AA_{n-1}. Per ciò che riguarda i punti O con indice dispari, si può osservare che O_3 si trova nell'interno del segmento AO_2, quindi cade fra A ed A_1; O_5 si trova nell'interno del segmento AO_4, quindi cade fra A ed A_2; in generale O_{2n+1}, che si trova internamente ad AO_{2n}, cadrà fra A e A_n. Ora siccome i punti A_1, A_2, A_3, ..., come può dimostrarsi geometricamente, finiscono, per n abbastanza grande, a distare da A meno d'un segmento piccolo a piacere, altrettanto avverrà pei punti O, cosicchè la somma [1] diventa al limite uguale ad $AB + O_1A$ ossia al segmento dato aumentato della sua parte aurea.

(*) Si dà posto a questa dimostrazione, quantunque non sia di uno scolaro, perchè la sola geometrica pervenuta e per l'interesse che presenta in un argomento in cui gli esempi non sono frequenti. (*N. d. R.*).

168**. *Dimostrare che l'espressione*

$$\left\{\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}\right\}:\left\{1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right\}$$

è un numero intero se n *è pari.* (V. Correnti).

Dimostrazioni completamente analoghe dalla Sig.ª *F. Prime* a Bruxelles e dai Sigg. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli; *E. de Vito* e *F. Mariantoni*, studenti della R. Università di Roma; *R. Scozzari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti e *G. Tirella*, licenziato dal R. Liceo di Modica.

È noto che si ha:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \quad \text{e} \quad k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1},$$

cosicchè

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=$$
$$n\left\{1+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right\}=n\,2^{n-1}.$$

L'espressione data si riduce quindi a $\frac{n\,2^{n-1}}{2^n}=\frac{n}{2}$, che è un intero se n è pari.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

184**. Se a, b, c; a_0, b_0, c_0 sono due terne di numeri reali tali che $a_0 c + a c_0 - 2 b b_0 = 0$, e se inoltre è $b_0^2 - a_0 c_0 < 0$, sarà $b^2 - ac > 0$. Se è, invece, $b_0^2 - a_0 c_0 > 0$, sarà $b^2 - ac \lesseqgtr 0$.

A. Del Re.

185**. Dedurre dalla relazione

$$AB + BC + CA = 0,$$

dove A, B, C sono punti di una retta, l'altra

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) + (\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}) = 1,$$

dove $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ sono quattro elementi qualunque di una forma fondamentale di 1ª specie (**).

A. Del Re.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

(**) Va inteso che, in questa questione, non devesi far uso della relazione

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0.$$

186**. Di una conica sono noti la posizione degli assi, due rette reciproche ortogonali ed un punto (una tangente). Si domanda la costruzione della conica.

A. Del Re.

187**. Di una conica è noto un punto con la relativa tangente, sono note due rette reciproche ortogonali e la posizione di un asse; si domanda di costruire la conica. Discutere inoltre il problema.

A. Del Re.

188**. Date due rette ortogonali OX, OY, per un punto P di una circonferenza descritta col raggio OP si tira una trasversale parallela ad una retta fissa ed un'altra ad essa perpendicolare seganti le OX, OY, nei punti M, M', N, N'; la somma dei quadrati delle corde MM', NN' è costante.

G. Bellacchi.

189. Stando ferme le condizioni relative alla quistione precedente se si descrive un'iperbole equilatera avente per assintoti le rette OX, OY, dimostrare che la somma dei quadrati delle corde che le rette MM', NN' determinano in essa è costante, indipendente dall'asse trasverso e dalla loro direzione.

Dedurne poi il teorema di Mannheim: *Un'iperbole equilatera intercetta corde uguali sui lati di un angolo retto circoscritto alla ellisse omofocale.*

G. Bellacchi.

190. Date tre tangenti a, b, c alla parabola ed il punto M_c di contatto sull'una c, determinare analiticamente, il fuoco e la grandezza del parametro.

Applicazione. Cercare il luogo geometrico dei fuochi delle parabole tangenti a due rette fisse e ad una circonferenza iscritta nell'angolo di queste rette.

G. Bellacchi.

191. Se m è divisibile per 1, 2, 3, ... n, il minimo multiplo comune ai numeri m, $m+1$, ... $(m+n)$ è dato da

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,.....\,(m+n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.....\,n}.$$

U. Scarpis.

192**. Il luogo dei punti di Lemoine dei triangoli inscritti in un cerchio ed aventi un lato comune AB è un'ellisse, interna al cerchio e tangente ad esso nei punti A e B, il centro della quale è equidistante da A e B.

Chiamando ω l'angolo opposto ad AB nel triangolo variabile, r il raggio del cerchio e posto $\tan\psi = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\omega$, dimostrare che i semi-assi di quest'ellisse sono $2r\,\mathrm{sen}\,\psi$, $2r\,\mathrm{sen}^2\psi$. Costruire l'angolo ψ supposto noto ω. Ricavare il teorema duale.

F. MARIANTONI.

193**. Risolvere il sistema d'equazioni

$$x + y = a + b, \quad x^2(y^2 - x^2) = a^2(b^2 - a^2)$$

A. LUGLI.

194*. Un cono circolare ha il suo vertice in una sfera di raggio r e il suo asse passante pel centro. Indicando con α il semi-angolo al vertice del cono, dimostrare che il volume della parte di sfera esterna al cono è dato da $\frac{4\pi}{3} r^3 \cos^4\alpha$.

A. LUGLI.

195*. Un cilindro circolare di raggio ρ taglia una sfera di raggio r $(r > \rho)$ il cui centro cade nell'asse del cilindro, dimostrare che il volume della parte di sfera esterna al cilindro è dato da $\frac{4\pi}{3}(r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}$.

A. LUGLI.

196*. Dimostrare che

$$\sqrt[4]{23{,}5 + 10{,}5 . \sqrt{5}} + \sqrt[4]{23{,}5 - 10{,}5 . \sqrt{5}} = 3.$$

A. LUGLI.

197*. Eliminare x dal sistema d'equazioni

$$a x - b\sqrt{1 - x^2} = 2c(2x^2 - 1)$$
$$a\sqrt{1 - x^2} + b x = 4 c x \sqrt{1 - x^2}$$

S. CATANIA.

198*. Costruire il triangolo equilatero d'area massima i cui lati passano per tre punti dati non situati in linea retta.

G. CANDIDO.

199**. Determinare l'ennagono regolare d'area massima di cui ciascun lato passa per uno degli n punti dati sopra una circonferenza.

G. CANDIDO.

200*. Dato un triangolo equilatero ABC di centro O e d'altezza h ed un punto O' del suo piano, tale che il segmento OO' sia uguale a k, esprimere in funzione di h e k l'area del triangolo DEF

che ha per vertici i piedi delle perpendicolari condotte da O' ai tre lati e dimostrare che il triangolo DEF è i $\frac{3}{16}$ del triangolo ABC pei punti della circonferenza inscritta in questo triangolo (*).

G. TIRELLA.

201*. AB e CD sono una corda e un diametro perpendicolare d'una circonferenza data; le rette congiungenti i punti C, D alle estremità E, F d'un diametro qualunque della circonferenza descritta su AB come diametro si tagliano in un punto M.

1° Qual'è il luogo del punto M?

2° Dimostrare che le rette MD, MA, MC, MB formano un fascio isogonale.

V.va F. PRIME.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. ARZELÀ e G. INGRAMI. — *Aritmetica razionale*. Bologna, Zanichelli, 1894. L. 3.

In questo libro al concetto di unità e di numero tengon dietro i sistemi di numerazione, fondati sul postulato: *possiamo immaginare due conteggi in modo che ad ogni unità contata nell'uno corrispondano contate nell'altro alcune unità.* E dalla operazione semplice del contare hanno origine inoltre la somma, il prodotto, le potenze e i multipli; a proposito dei quali gli AA., con intento logico e con procedimento affatto nuovo, espongono completamente la teorica del m. c. m., dopo averne stabilita, non molto rigorosamente, l'esistenza.

Dalla operazione inversa, *il retrocontare*, nascono la differenza, il quoto e i divisori. Il libro contiene, oltre le solite nozioni intorno ai numeri primi assoluti e relativi e ai numeri frazionari, la teoria delle proporzioni, svolta geometricamente, ed una appendice di 600 esercizi, bene ordinati ed opportunamente scelti.

Gli egregi AA. sono riusciti a dare alla loro opera una fisonomia tutta propria, cosicchè, sia pei postulati, che per le dimostrazioni di molti teoremi e per la disposizione della materia, essa ha un raro sapore di originalità. Spesso, per maggior rigore ed efficacia della dimostrazione, fanno uso del metodo di induzione, e si può deplorare che non l'abbiano applicato anche alla dimostrazione della formola $(a+b)^m = ka + b^m$.

(*) Questa proposizione, nella sua parte principale, non è che un caso particolare della quistione *b*, trattata a pag. 50 e 80 del vol. V, 1890, di questo *Periodico*. (*N. d. Red.*)

Scopo degli AA. era di *non favorire l'inerzia intellettuale e nemmeno storcere la mente a fallaci raziocinii, nè affaticarla sotto il peso di soverchio rigore scientifico*, e lo scopo fu raggiunto.

Qualche neo, a volere essere meticolosi, si può riscontrare qua e là, oltre a quelli accennati; p. e.: la regola per la ricerca dei divisori d'un numero non è sufficientemente spiegata; là dove dicesi che *esiste sempre il quoziente di due frazioni ed è quel numero frazionario* ecc., dovevasi omettere l'appellativo *frazionario:* superflua la dimostrazione del lemma precedente la teoria delle proporzioni; molti gli errori di stampa.

Riguardo poi alla adattabilità del libro alla scuola, osserverò che è uno dei migliori; poichè la materia è esposta in modo che chi ha pochi e buoni scolari può dare al suo insegnamento notevole ampiezza e razionale svolgimento, e chi ne ha molti e, per giunta, non buoni, può omettere molte cose e fare un insegnamento assai modesto, perchè il testo si presta bene a numerose amputazioni che non danneggiano il logico succedersi delle varie teoriche.

Roma, gennaio 1894.

ALFREDO MASSA.

VARIETÀ

L'Intermédiaire des Mathématiciens.

Con questo titolo è apparso coll'anno un nuovo periodico di matematica diretto dai Sigg. C.-A. LAISANT ed É. LEMOINE, stampato a Parigi dal Gauthier-Villars.

Il fine che la pubblicazione si propone di raggiungere è nettamente indicato dai seguenti periodi stralciati dalla prefazione dei Redattori.

« Notre but essentiel est de fournir aux personnes qui cultivent habituellement les Mathématiques, ou qui s'y intéressent, des renseignements sur des sujets se rapportant à leurs études, des solutions à des questions posées, ou des indications bibliographiques.

Tout le monde sait combien est devenu grand aujourd'hui le nombre des personnes qui s'occupent de Mathématiques, soit par profession, soit par goût. Tout le monde sait aussi combien la Science mathématique s'est subdivisée en branches multiples et s'est enrichie de résultats.

De cette extrême diversité, est résultée l'obligation, pour la plupart de ceux qui l'étudient, de se spécialiser; conséquemment on ignore souvent ce qui se passe et ce qui se fait dans une branche voisine de celle dont on s'occupe particulièrement; aussi une question, de la solution de laquelle on aurait besoin, peut être très difficile pour celui qui désire cette solution, ou bien exigerait de sa part de longues recherches et une grande perte de temps, alors qu'une autre personne la considère, et avec raison à son point de vue, comme tout à fait simple.

Mettre en rapport les deux personnes dont il s'agit, c'est donc rendre service à la Science et contribuer à ses progrès en économisant des efforts inutiles.

C'est ce rôle d'*Intermédiaire* que nous voulons prendre. Dans ce but, nous donnerons accès à toutes les questions qui nous seront posées, se rapportant aux Sciences mathématiques, depuis les plus élémentaires jusqu'aux plus élevées. Il arrivera souvent que ces questions consisteront en de simples demandes de renseignements bibliographiques, ou auront trait à de simples résultats de calculs faciles mais longs. »

« La seconde Partie de notre Recueil sera consacrée aux réponses. Tantôt ces réponses seront des solutions plus ou moins développées, ne s'éloignant *jamais* de la question correspondante; tantôt elles se réduiront à des renseignements tout à fait sommaires. Mais, dans aucun cas, nous ne sortirons de ce cadre; et nous ne publierons ni articles, ni mémoires, ni même de simples notes sur des sujets étrangers aux questions. Ce serait, en effet, un double emploi avec l'un ou l'autre des excellents journaux mathématiques qui existent en très grand nombre..... »

Ai vantaggi che l'*Intermediario* offrirà senza dubbio agli studiosi, accennati nei periodi riportati, ci pare sia da aggiungere che il medesimo potrà fornire ai giovani che seguono i corsi di matematica nelle Università utili indicazioni sui limiti dello sviluppo raggiunto da tale o tal altro argomento ad eventualmente dei soggetti per le loro tesi di laurea.

Siamo persuasi che scolari e docenti ci saranno grati del presente avviso.

Problemi curiosi e paradossi matematici (*).

« Les matières de Géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre plus divertissantes. »

(PASCAL).

1. Una cordicella ha 30 m. di lunghezza; ogni giorno, con un colpo di forbici, se ne taglia un metro. In quanti giorni si sarà finito?

2. Una lumaca, strisciando lungo un palo di 12 m., fa 3 m. il giorno, e scende 2 m. la notte. Dopo quanti giorni e notti avrà essa raggiunto la sommità del palo?

3. Vinti dai Romani, quaranta ebrei e lo storico Giuseppe si rifugiarono in una caverna, decisi ad uccidersi piuttosto che arrendersi. Essi si disposero in una sola fila, si contarono tre per tre, ed uccisero ogni volta il terzo. Si domanda qual posto scelse Giuseppe per sfuggire al massacro.

4. Il 27 maggio 1876, l'età di Luigi era i $\frac{55}{71}$ dell'età del fratello Giovanni.

(*) La maggior parte dei problemi e dei paradossi riportati è tolta dalla 2ª ed. dell'opera: *Mathématiques et Mathématiciens*, Pensées et Curiosités recueillies par A. REBIÈRE. Paris, 1893 — un libro assai dilettevole in argomento di tanta serietà e la cui lettura è da consigliarsi a coloro che per gusto o per professione si occupano delle matematiche.

Nelle note in fine a questa raccolta verrà indicato quali quistioni sono tolte da questa o da altra opera e si daranno inoltre le risposte alle medesime quasi nella loro totalità. [*N. d. Red.*].

Il 26 luglio successivo, essa non era più che i $\frac{7}{9}$. Trovare la data della nascita di ciascuno di essi.

5. Una pecora, un agnello e due conigli mangierebbero l'erba di un recinto, la prima in 30 giorni, il secondo in 45 giorni, e i due ultimi in 90 giorni, se quest'erba non crescesse; ma l'erba si rinnova in 60 giorni. In quanti giorni l'erba del recinto sarà esaurita?

6. 18 buoi hanno mangiato, in 5 giorni, l'erba contenuta in 55 are di terreno, più l'erba che vi è cresciuta durante questi 5 giorni. 15 buoi hanno mangiato, in 8 giorni, l'erba contenuta in 70 are di terreno, più l'erba che vi è cresciuta in questi 8 giorni. Quanti buoi occorreranno per mangiare in 20 giorni l'erba contenuta in 385 are di prato, più l'erba che vi crescerebbe nel corso di questi 20 giorni? (NEWTON).

7. Un arabo lascia, ai suoi tre figli, 17 cammelli. Il primo deve averne la metà, il secondo un terzo, e l'ultimo un nono. Come distribuire i 17 cammelli?

8. Sulla cima di una riviera si trovano un lupo, una capra ed un cavolo; non vi è che un battello tanto piccolo, che non vi possono stare che il battelliere soltanto ed uno di loro. Si tratta di passarli tutti tre, in modo che il lupo non mangi la capra, nè la capra il cavolo, nell'assenza del battelliere (*).

9. Un tale ha un vaso di 12 litri, pieno di vino: esso vuol farne un regalo di 6 litri, ossia della metà; ma non ha, per misurare i 6 litri, che due vasi, uno di 8 litri, l'altro di 5. Come fare per mettere i 6 litri nel vaso di 8?

10. Due orologi, A e B, suonano l'ora contemporaneamente: A avanza di 3 secondi rispetto a B. I colpi dell'orologio A si succedono a 5 secondi d'intervallo, quelli di B a 4 secondi; inoltre, quando l'intervallo che separa due colpi non supera un secondo, l'orecchio non percepisce che un suono. Si sono intesi, in totale, 14 colpi; che ora è?

11. Una mercantessa di ciliegie ha perduto i pesi della sua bilancia; arrivata al mercato, essa trova una pietra di 40 libbre, la divide in quattro pezzi, e vende al dettaglio la merce. Quali sono i pesi dei quattro pezzi della pietra, che servono alle pesate fra 1 e 40 libbre?

12. Trovare m numeri interi consecutivi, ciascuno dei quali non sia primo.

13. I numeri 49, $4^{\underline{48}}9$, $44^{\underline{48}}89$, $444^{\underline{48}}889$, ecc., ottenuti inserendo 48 in mezzo al precedente, sono quadrati perfetti.

14. Trovare un numero intero x, tale che la somma dei primi x numeri interi, consti di tre cifre uguali.

15. Impiantare un'addizione servendosi di tutte le nove prime cifre, senza ripeterle e senza impiegare lo zero, in modo che il totale sia 100.

16. (Da una vecchia aritmetica cinese). Viene indicato che tre barili, contenenti ciascuno la stessa quantità di riso, furono in gran parte vuotati dai ladri. Non si sapeva quanto riso si trovasse in ciascuno, però meno di 1000 Ho (piccola misura cinese); d'altra parte risultò che, dopo il furto, nel primo barile

(**) Questo problema di Bachet ha forse dato luogo alla locuzione: « Salvare capra e cavolo », a meno che non sia stato inspirato da essa.

rimase 1 Ho di riso, nel secondo 11 Ho e nel terzo ancora 1 Ho. Dopo che i ladri furono presi, confessò A che col riso del primo barile colmò parecchie volte una pala di legno, vuotandola in un sacco, B che, nella fretta, s' impadronì d'un zoccolo di legno e con questo più volte tolse riso dal secondo barile, finalmente C che, afferrata una scodella, levò dal terzo barile ripetutamente il riso contenuto in esso. Questi tre strumenti di cui si servirono i ladri restarono sul luogo e risultò che la pala conteneva 11 Ho, il zoccolo 17 Ho e la scodella 12 Ho. Quanto riso si trovava in ciascun barile?

17. Di quanti gradini si compone una scala, se, montandola di due in due, ne resta uno; di tre in tre, ne restano due; di quattro in quattro, ne restano tre; di cinque in cinque, ne restano quattro; di sei in sei, ne restano cinque; e di sette in sette, non ne resta alcuno?

18. n^2 uomini sono posti in fila; si fa uscire di fila il primo, l'$(n+1)^{\text{esimo}}$, il $(2n+1)^{\text{esimo}}$,... il $[(n-1)n+1]^{\text{esimo}}$; poi si fa serrare la fila, e si ricomincia così finchè non rimangano che $n-1$ uomini. Quali sono gli $n-1$ uomini rimasti? (*Problema detto di Caligola*).

19. In seguito agli art. 744 e 815 del Codice civile, il diritto del figlio naturale è la metà della quota ereditaria che gli sarebbe spettata se fosse nato legittimo. Dividere in conseguenza la successione d'una persona che lascia l figli legittimi ed n naturali.

20. Ecco un grazioso giuoco col quale s' indovina una carta *pensata*.

Si prendano a caso 21 carte e si distribuiscano in 3 pacchetti di 7 carte, collocandone prima tre accanto l'una all'altra, poi le tre carte seguenti successivamente sulle tre prime e così di seguito. Si domanda ad una persona di pensare una delle carte che vede raggruppare in tal modo, e, in quale pacchetto si trovi la carta pensata. Si mettono allora i tre pacchetti l'uno sull'altro, avendo cura di porre in mezzo quello contenente la carta pensata. Si dispongono di nuovo le tre carte in 3 pacchetti di 7 carte operando come antecedentemente, si domanda ancora in quale pacchetto si trova la carta pensata, si colloca questo pacchetto fra gli altri due e si ricomincia per la terza volta l' operazione. Finalmente la carta pensata è l'undicesima!

21. Un barile contiene cinquanta litri di vino puro; ne vengono tolti due litri che si sostituiscono con dell'acqua; dal miscuglio ne sono levati ancora due litri, rimpiazzati con acqua; e similmente viene operato una terza volta. Si domanda la composizione in vino ed acqua del miscuglio finale.

22. Un levriero raggiunge un lepre che aveva 77 salti di vantaggio. Si sa che 12 salti del levriero equivalgono a 17 del lepre e che nel tempo in cui il levriero farebbe tanti salti quanti ne fa il lepre quest'ultimo ne avrebbe fatti 216 di più. Quanti salti aveva fatto il lepre prima d'essere raggiunto?

(*Continua*).

Finita la redazione il dì 20 gennaio 1894.

DI ALCUNE APPLICAZIONI GEOMETRICHE

NELLO STUDIO ELEMENTARE DELLA MECCANICA.

Nota del Dott. RICCARDO MALAGOLI.

1. — L'insegnamento elementare della meccanica offre argomento a molte ricerche tendenti a volte a mettere maggior rigore nel metodo, a volte ad analizzare delle questioni che sembrano inaccessibili senza l'aiuto del calcolo superiore.

Ecco una di quest'ultima specie :

« Componendo un sistema di forze parallele ed ugualmente dirette « prese in un ordine determinato, si sa facilmente trovarne il centro O. « Prendendo le stesse forze in un ordine diverso come può dimo- « strarsi che il centro è ancora O? »

Non conoscendo alcuna dimostrazione elementare di questo principio mi sembra utile far conoscere una via per giungere a questo risultato ; tanto più che la stessa dimostrazione offre occasione ad alcune interpretazioni geometriche relative al quadrilatero piano o gobbo che mi sono parse di qualche interesse per gli studiosi di geometria pura.

2. — Sono noti nella geometria del triangolo i seguenti teoremi, il primo dei quali è dovuto a Ceva :

I. — Se dai vertici A, B, C, di un triangolo partono tre rette « che determinano sui lati opposti i punti A', B', C' rispettivamente e « si pone : $AB' = b_1$, $B'C = b$; $CA' = a_1$, $A'B = a_2$; $BC' = c_1$, « $C'A = c_2$ e si verifica la relazione :

« $$a_1\, b_1\, c_1 = a_2\, b_2\, c_2\,,$$

« le rette AA', BB', CC' hann . comune un punto O e viceversa ».

« II. — Il punto O divide queste rette in parti tali che posto: « $OA = \alpha_1$, $OA' = \alpha_2$; $OB = \beta_1$, $OB' = \beta_2$; $OC = \gamma_1$, $OC' = \gamma_2$, « si verificano le relazioni :

« $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{b_1}{b_2} + \frac{c_2}{c_1}\,;\quad \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{c_1}{c_2} + \frac{a_2}{a_1}\,;\quad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_2}{b_1} \text{ ».}$$

Si hanno così quattro relazioni fra i rapporti dei segmenti determinati su uno stesso lato od una medesima trasversale.

Se quindi in un triangolo si fissa un punto su un lato e sulla congiungente di questo punto col vertice opposto si stabilisce un punto O, verranno ad essere noti due rapporti come $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ e allora dalle equazioni precedenti verranno determinati i rapporti dei segmenti in cui il punto O proiettato dai restanti vertici decompone i lati opposti, nonchè quelli dei segmenti determinati da O sui raggi proiettanti.

Eseguendo si ottiene infatti:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_2 \alpha_1}{(a_1 + a_2)\alpha_2}; \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_1 + a_2)\alpha_2}{a_1 \alpha_1};$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}{a_1 \alpha_1}; \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_1 \alpha_1 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2}{a_2 \alpha_1}.$$

3. — Ciò posto sieno A, B, C tre punti e p, q, r tre numeri positivi qualunque che attribuisco rispettivamente ai punti. Dividasi AC in B' in parti inversamente proporzionali a p ed r, CB in A' in parti inversamente proporzionali ad r e q, infine BA in C' in parti inversamente proporzionali a q ed r. Chiamando a, b, c i lati CB, AC, BA del triangolo ABC, si ha:

$$B'C = \frac{bp}{p+r} = b_2, \quad B'A = \frac{br}{p+r} = b_1; \quad A'B = \frac{ar}{q+r} = a_2,$$

$$A'C = \frac{aq}{q+r} = a_1; \quad C'A = \frac{cq}{p+q} = c_2, \quad C'B = \frac{cp}{p+q} = c_1.$$

Ora è facile notare che:

$$B'A \,.\, A'C \,.\, C'B = B'C \,.\, A'B \,.\, C'A,$$

cosicchè (teor. I) le rette AA', BB', CC' hanno un punto O comune.

Si ha poi (teor. II):

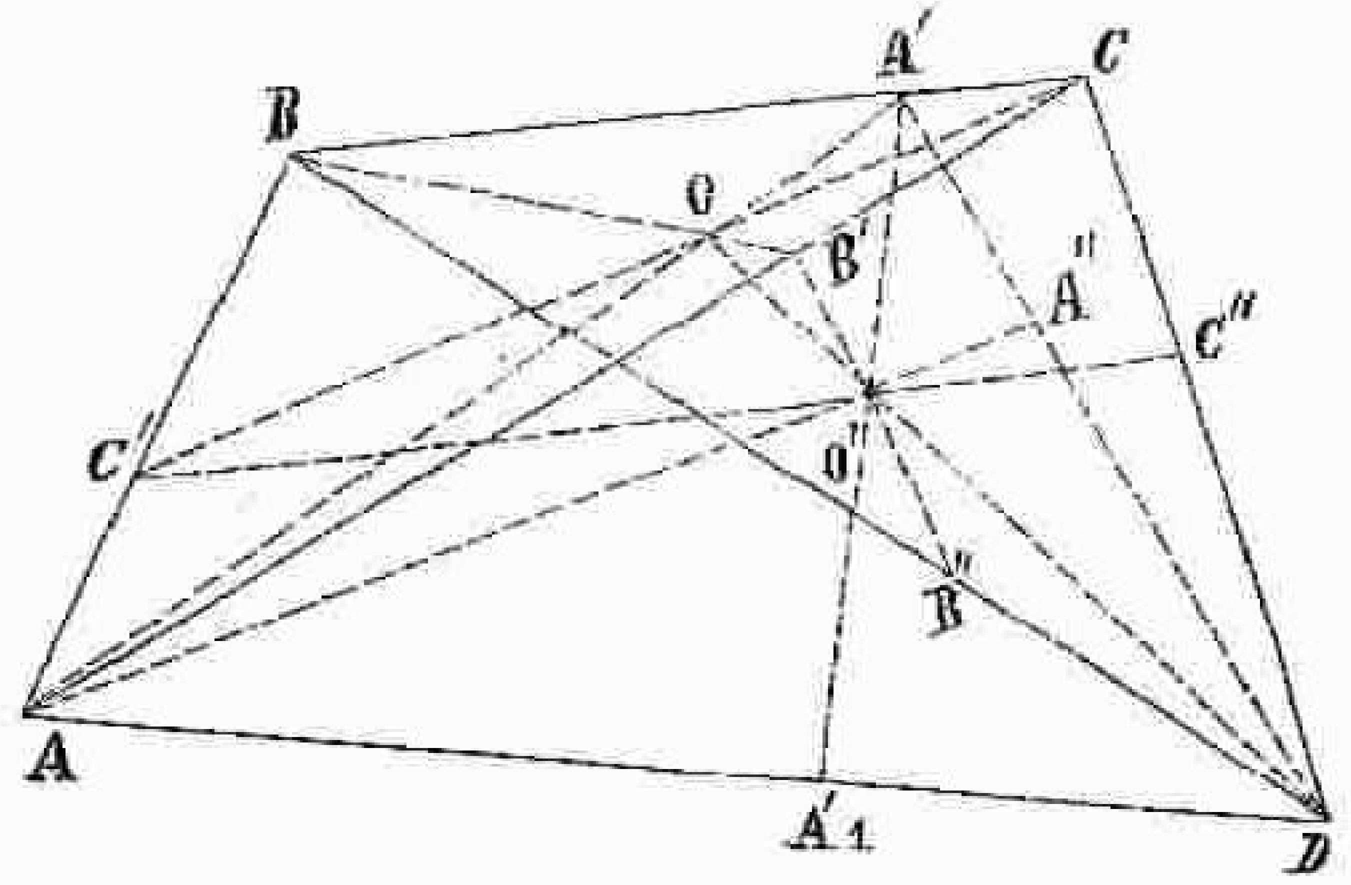
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{q+r}{p},$$

e analogamente:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{p+r}{q}, \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{p+q}{r}.$$

Da tuttociò risulta che se p, q, r sono le intensità di tre forze parallele ugualmente dirette applicate rispettivamente nei punti A, B, C, in qualunque ordine si compia la composizione si giunge sempre ad uno stesso punto O, mentre l'intensità $p + q + r$ della risultante non muta.

4. — Supponiamo ora che un'altra forza di intensità s parallela e di egual direzione delle forze date, sia applicata ad un punto D, rigidamente collegato con A, B, C. Si unisca O con D, e si divida OD in parti: $O O' = d_2$, $O'D = d_1$ che stieno fra loro come s a $p + q + r$. Voglio dimostrare che O' è il centro delle quattro forze qualunque sia l'ordine col quale si procede nella composizione.



Risulta intanto dal n.° precedente che mantenendo ultima componente la forza s, si può variare a piacere l'ordine delle altre e la risultante passa sempre per O'.

Consideriamo poi il triangolo $A A'D$ nel quale è dato il punto O sopra AA', e O' sopra OD. Proiettando O' dai vertici A e A' nei punti A'', A'_1 dei lati opposti, e ponendo:

$$A'_1 A = \alpha'_2, \quad A'_1 D = \alpha'_1, \quad A'' A' = \alpha''_1, \quad A'' D = \alpha''_2,$$
$$O'A' = e_1, \quad O'A'_1 = e_2, \quad O'A = f_1, \quad O'A'' = f_2,$$

dalle formole del n° 2, quando si faccia $\frac{d_1}{d_2} = k$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = k_1$, si ricava per il caso attuale:

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} = \frac{\alpha_2 d_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) d_2} = k \frac{1}{1 + k_1},$$

$$\frac{\alpha_1''}{\alpha_2''} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) d_2}{\alpha_1 d_1} = \frac{1}{k} (1 + k_1),$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\alpha_1 d_1 + \alpha_1 d_2 + \alpha_2 d_2}{\alpha_2 d_1} = k_1 + \frac{1}{k} (1 + k_1),$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha_1 d_2 + \alpha_2 d_1 + \alpha_2 d_2}{\alpha_1 d_1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k k_1},$$

e osservando che si è trovato:

$$\frac{d_1}{d_2} = k = \frac{p+q+r}{s}; \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = k_1 = \frac{q+r}{p},$$

con facili calcoli risulta:

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} = \frac{p}{s}; \quad \frac{\alpha_1''}{\alpha_2''} = \frac{s}{q+r}; \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{p+s}{q+r}; \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{q+r+s}{p}.$$

Con questi risultati, una semplice ispezione alla figura ci assicura che comunque si compongano le forze p, $q+r$, s, si arriva sempre alla stessa risultante applicata in O'.

Se invece si considerasse il triangolo DBB' si concluderebbe che è affatto arbitrario l'ordine con cui si compongono le forze q, $p+r$, s, e la risultante passa sempre per O'. Proiettando allora C' da O' in C'', risulterebbe analogamente:

$$\frac{C''C}{C''D} = \frac{s}{r}; \qquad \frac{O'C'}{O'C''} = \frac{r+s}{p+q}.$$

Considerando infine il triangolo DCC', ed applicando ad esso le stesse considerazioni degli altri due, si conclude che la risultante delle forze $p+q$, r, s, passa ancora per O' qualunque sia l'ordine con cui esse si sommano. Inoltre se sia B'' la proiezione di B' da O' su BD, sarà:

$$\frac{B''B}{B''D} = \frac{s}{q}; \qquad \frac{O'B''}{O'B'} = \frac{p+r}{q+s}.$$

(Continua).

SULLA EQUIVALENZA DEI POLIGONI

(*Continuazione e fine: V. pag. 19*).

Per poter ora stabilire a quali conclusioni ci porti il procedimento da noi indicato, è necessario distinguere i vari modi, onde i due poligoni dati possono essere congruenti.

Come è noto, basterà considerare i quattro casi seguenti:

1.° Le rette che uniscono i punti corrispondenti sono parallele, e le due figure sono direttamente congruenti; una figura può allora essere portata a coincidere coll'altra mediante una traslazione (fig. 1ª, 2ª).

2.° Le due figure sono inversamente congruenti; possono allora essere simmetriche rispetto a un asse, nel quale caso le parti non comuni sono, non solo equivalenti, ma ancora congruenti. Nel caso contrario, alle due figure si può annettere una retta unita; una delle figure può allora, scorrendo lungo quella retta, diventare simmetrica all'altra (fig. 3ª).

3°. Una delle due figure si può portare a coincidenza coll'altra mediante una rotazione intorno a un centro esterno alle figure medesime (fig. 4ª).

4°. La coincidenza stessa si può ottenere con una rotazione intorno a un centro interno alle due figure (fig. 5ª).

Nei primi tre casi, le dimostrazioni non differiscono essenzialmente.

Si considerino le rette che passano per i vari punti delle figure e, nel primo caso sono perpendicolari a quelle che uniscono i punti corrispondenti; nel secondo sono perpendicolari alla retta unita, e passano, nel terzo, per il centro di rotazione. Esisteranno evidentemente per ciascun poligono due rette estreme, tali cioè che tutta la figura sia contenuta nella striscia (o in uno degli angoli) da esse formati; diremo che la striscia (o angolo) *delimita* la figura contenuta, od anche che questa è *delimitata* dalle due rette estreme.

Sieno $p\,q$, $p_1\,q_1$ le striscie (od angoli) che delimitano A, A_1; la parte comune B_1 sarà allora delimitata da $p_1\,q$, o da $p\,q_1$; supponiamo da $p_1\,q$ (fig. 2ª, 3ª, 4ª), e denotiamo con σ la grandezza della striscia (od angolo) $p_1\,q$.

La grandezza della traslazione (o rotazione) necessaria per portare un poligono a coincidere coll'altro, o ad essere simmetrico all'altro, sarà quella delle striscie (od angoli) eguali $p\,p_1$, $q\,q_1$, e l'indicheremo con τ.

Si costruisca la figura B_2, e sia r_2 la retta che la delimita insieme colla q_1.

Se è $\sigma \leqq \tau$, ossia $r_2\,q_1 = p_1\,q \leqq q\,q_1$ (fig. 1ª), i poligoni B_1, B_2 non possono avere alcuna parte comune, e per questo caso il teorema è stato già dimostrato.

Se invece è $\sigma > \tau$ (fig. 2ª, 3ª, 4ª), esisterà la parte comune C_2, la quale sarà delimitata da $r_2\,q = r_2\,q_1 - q\,q_1 = \sigma - \tau$.

Per i poligoni B_1, B_2 rimane dunque ancora la traslazione (o rotazione) di grandezza τ_1 mentre la parte comune è delimitata da una striscia (od angolo) minore, cioè di grandezza $\sigma - \tau$.

Continuando il procedimento, se i poligoni C_2, C_3 avranno una parte comune D_3, questa sarà delimitata da una striscia (od angolo) di grandezza $\sigma - 2\tau$, e in generale la parte comune ai poligoni G_k, G_{k+1} sarà delimitata da una striscia (od angolo) $\sigma - k\tau$, mentre la traslazione (o rotazione) si manterrà di grandezza costante τ.

Ora, per conseguenza del noto assioma di Archimede, esiste un numero (intero e positivo) n tale, da avere:

$$n\tau < \sigma \leqq (n+1)\tau;$$

e perciò, dopo $n - 1$ operazioni si ha ancora

$$\sigma - (n-1)\tau > \tau;$$

ma dopo n operazioni, si trova

$$\sigma - n\tau \leqq \tau;$$

e allora poichè la striscia (od angolo) che delimita la parte comune non è maggiore della traslazione (o rotazione), colla quale una figura può divenire coincidente o simmetrica coll'altra, si potrà applicare la dimostrazione fatta nell'ipotesi che sia $\sigma \geqq \tau$.

Nel quarto caso, quando cioè una figura può coincidere coll'altra mediante una rotazione intorno a un centro interno alle due figure, considereremo ancora le rette che congiungono i punti delle figure col centro di rotazione; allora se r, r_1 sono le rette che passano per due punti corrispondenti, la grandezza della rotazione sarà rappresentata dall'angolo $r\,r_1$.

Supponiamo l'angolo $r\,r_1$ commensurabile con quattro retti, e il suo rapporto a quattro retti espresso dalla frazione irreducibile $\frac{m}{n}$.

Costruiamo allora i poligoni A_2, A_3, ... A_{n-1} congruenti ai dati A, A_1 e tali che, nella serie

$$A, A_1, A_2, \ldots . A_{n-1},$$

ciascun poligono, l'ultimo escluso, corrisponda al seguente nella primitiva congruenza. È allora ovvio il provare che A_{n-1} può essere portato a coincidere con A, mediante una rotazione di $\frac{m}{n}$ di quattro retti, ossia che l'ultimo poligono corrisponde al primo. L'intera figura costituita dagli n poligoni è allora involutoria, d'ordine n, e corrisponde a sè stessa nella congruenza; corrisponderà dunque a sè stessa anche la parte comune a tutti gli n poligoni. Ne segue che le parti non comuni ai poligoni congruenti K_{n-2}, K_{n-1}, il primo dei quali è la parte comune ai poligoni $A, A_1, A_2 \ldots A_{n-2}$, si corrisponderanno l'una all'altra, ossia saranno congruenti, e si potrà applicare la dimostrazione già fatta.

Se invece l'angolo rr_1 è incommensurabile con quattro retti, il procedimento non potrà terminare, e la serie $A, A_1, A_2 \ldots$ sarà infinita. In questo caso si può osservare che la parte comune ai poligoni di questa serie ha per limite il circolo, il cui centro è il centro di rotazione e il cui raggio è la distanza di questo centro dai punti più vicini del contorno dei poligoni. Siccome poi il circolo accennato corrisponde a sè stesso nella congruenza, le parti non comuni ai poligoni delle successive coppie

$$A, A_1; \quad B_1, B_2; \quad C_2, C_3; \ldots$$

avranno per limiti due figure (nulle) corrispondenti l'una all'altra nella congruenza medesima.

Nell'ultimo caso non siamo riusciti a dimostrare che le parti non comuni dei poligoni A, A_1 si possano scomporre in un egual numero (finito) di parti rispettivamente congruenti; ma solo la loro equivalenza, ove questa s'intenda definita nel modo usato per i poliedri, per le figure piane limitate da linee curve, ecc., per quelle grandezze in somma che si sogliono chiamare *di terzo genere*.

Di più i limiti delle parti che si devono considerare in numero infinito non sono poligoni; e a questo proposito importa notare che le dimostrazioni non cambiano se A, A_1 sono due figure congruenti limitate da linee curve ed anche composte di parti staccate, purchè la parte comune sia una sola e convessa.

Ove le due figure constino di parti staccate, bisogna osservare che se le parti che si compenetrano non sono corrispondenti, le figure B_1, B_2 non hanno alcuna parte comune; nel caso contrario si dovranno considerare le due parti che si compenetrano, senza tener conto delle altre da esse staccate.

Ora si affaccia la domanda: E non sarà possibile, usando un altro metodo, dimostrare il teorema, senza mutare la definizione di poligoni equivalenti?

Ove si rifletta che, nella dimostrazione datane, le parti si sono sempre considerate nel modo che si presentava come il più favorevole, e che la dimostrazione stessa si adatta a tutti i casi che precedono l'ultimo, sembra che, seguendo un altro metodo, la dimostrazione desiderata sia ancor meno probabile; ma non è forse dato stabilirne la impossibilità, come non si è ancora provato impossibile il dimostrare l'equivalenza di due piramidi di base equivalente e di eguale altezza.

Tuttavia, fino a che il teorema non sia completamente dimostrato, è legittimo il dubbio che la definizione « Due grandezze si dicono *equivalenti* se si possono scomporre in uno stesso numero (finito) di parti rispettivamente eguali » non sia applicabile alla intera classe dei poligoni, o almeno non sia in accordo col postulato ammesso da De Paolis.

E se un simile dubbio ripugna al nostro convincimento, che sieno vere le proposizioni contenute nella definizione e nel postulato, insieme col teorema che abbiamo tentato di dimostrare, è d'uopo persuadersi che la base di quel convincimento sta nel concetto di grandezza presupposto da Euclide, senza il quale una rigorosa teorica della equivalenza non è forse possibile, e alla cui determinazione dovrebbero rivolgersi le cure degli studiosi.

Sassari, 20 novembre 1898.

G. Biasi.

SOPRA UNA FORMOLA PER LA MISURA DEI VOLUMI

(*Continuazione, V. pag. 15*).

6. Applicazioni. — 1.° *Tronco di piramide a basi parallele* di basi B_0, B_1 e d'altezza h.

Determiniamo prima l'area d'una sezione B_x parallela alle basi, ad una distanza x dalla base inferiore. Indicando con h_1 l'altezza della piramide staccata, si ha:

$$B_0 : B_1 = (h + h_1)^2 : h_1^2, \qquad B_0 : B_x = (h + h_1)^2 : (h + h_1 - x)^2,$$

donde ricavasi

$$\sqrt{B_0} - \sqrt{B_1} : \sqrt{B_0} = h : h + h_1, \quad \sqrt{B_0} - \sqrt{B_x} : \sqrt{B_0} = x : h + h_1.$$

Eguagliando i valori di $h + h_1$, che si ricavano da queste proporzioni, risulta:

$$[2] \quad \frac{h}{\sqrt{B_0} - \sqrt{B_1}} = \frac{x}{\sqrt{B_0} - \sqrt{B_x}} \text{ da cui } \sqrt{B_x} = \sqrt{B_0} - \frac{\sqrt{B_0} - \sqrt{B_1}}{h} x$$

e finalmente

$$[3] \quad B_x = B_0 - \frac{2\sqrt{B_0}(\sqrt{B_0} - \sqrt{B_1})}{h} x + \frac{(\sqrt{B_0} - \sqrt{B_1})^2}{h^2} x^2,$$

cosicchè l'area di una sezione qualsiasi del tronco parallela alle basi è una funzione di 2° grado della distanza x del piano segante dalle basi. Osserviamo inoltre che nell'ipotesi di $B_0 > B_1$ il primo membro della [2] è positivo quindi dev'essere tale anche il secondo e che per x crescente $\sqrt{B_0} - \sqrt{B_x}$ deve essere pure crescente, ciò che importa che B_x diminuisca. La prima ipotesi del n.° 1 è quindi soddisfatta. In quanto alla seconda risulta evidente che è soddisfatta considerando i due prismi aventi gli spigoli laterali paralleli ad uno spigolo del tronco e per basi due sezioni consecutive, ad es. B_0 e B_1. Alla determinazione del volume del solido si potrà in conseguenza applicare la formola [1] e siccome, per $x = h : 2$, si ha dalla [3] per l'area M della sezione mediana

$$M = \frac{(\sqrt{B_0} + \sqrt{B_1})^2}{4},$$

il volume del tronco di piramide a basi parallele sarà dato da

$$V = \frac{h}{6}(B_0 + B_1 + 4M) = \frac{h}{6}[B_0 + B_1 + (\sqrt{B_0} + \sqrt{B_1})^2] =$$
$$\frac{h}{3}(B_0 + B_1 + \sqrt{B_0 B_1}).$$

2.° *Obelisco.* Consideriamo il solido poliedrico limitato da due basi parallelogrammiche, coi lati paralleli, aventi la distanza h e da facce laterali trapezie. Si chiamino a e b i lati della base inferiore ed a', b' quelli della base superiore e suppongasi a' parallelo ad a

e b' parallelo a b, inoltre $a > a'$ e $b > b'$: risulta subito, in seguito a queste ipotesi, che $B_0 = ab > B_1 = a'b'$.

Praticando nel solido una sezione con un piano parallelo a B_0 alla distanza x da B_0, la sezione, avendo i lati paralleli ad a e b, sarà, come le basi, un parallelogrammo, e, denominati con α e β i lati di questa sezione, si avrà $a > \alpha > a'$ e $b > \beta > b'$, cosicchè $ab > \alpha\beta > a'b'$ ed inoltre α sarà da ricavarsi dalla proporzione seguente

$$\alpha - a' : a - a' = h - x : h,$$

che dà

$$\alpha = a - \frac{a - a'}{h} x; \quad \text{similmente} \quad \beta = b - \frac{b - b'}{h} x.$$

Si ha così

$$B_x = \alpha\beta = ab - \frac{2ab - ab' - a'b}{h} x + \frac{(a - a')(b - b')}{h^2} x^2.$$

L' area della sezione è dunque di 2° grado in x. Osservando poi che ogni tronco del solido considerato delimitato da due sezioni parallele è compreso fra i due prismi aventi per basi queste sezioni, per altezza la loro distanza e gli spigoli laterali paralleli ad uno spigolo laterale qualsiasi dell'obelisco, consegue che la formola [1] è applicabile ad un tal solido. Ora per $x = h : 2$, si ha

$$M = ab - \frac{2ab - ab' - a'b}{2} + \frac{(a - a')(b - b')}{4} = \frac{(a + a')(b + b')}{4},$$

onde il volume dell'obelisco sarà dato da

$$V = \frac{h}{6}(B_0 + B_1 + 4M) = \frac{h}{6}(ab + a'b' + (a + a')(b + b')) =$$
$$\frac{h}{6}((2a + a')b + (2a' + a)b') \quad (^*).$$

Nel caso particolare in cui uno degli spigoli della base superiore, p. es. b', si riduca ad un punto, l'obelisco diventa un *cuneo*, il cui volume sarà quindi espresso da

$$V = \frac{1}{6}(2a + a')bh.$$

(*Continua*). A. Lugli.

(*) Per la dimostrazione data al n.° 5, la formola [1] è applicabile all'obelisco anche quando non sussistono le due ipotesi del n.° 1, ossia quando le grandezze rispettive degli spigoli a ed a' e b e b' sono qualunque, per modo che il risultato ottenuto può riguardarsi come generale.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione, V. pag. 27*).

Bielitz: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Le radici reali dell'equazione $x^4 - 2\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 2\frac{1}{6}x + 1 = 0$ sono i semiassi di una ellisse. Qual'è l'equazione della tangente all'estremità dell'ordinata del fuoco nel primo quadrante, e che angolo forma essa con questa ordinata?

2. L'angolo diedro di due sezioni che passano per l'asse di un cilindro obliquo uguaglia $\alpha = 60^0\,15'$, gli angoli d'inclinazione colla base verso le faccie opposte delle due sezioni sono $\beta = 70^0\,48'$ e $\gamma = 108^0\,33'$. In quale rapporto stanno le aree delle due sezioni?

3. I due assi paralleli di due dischi di trasmissione (Riemenscheiben) coi raggi $R = 50$ cm. ed $r = 30$ cm. hanno la distanza $c = 2$ m. Che lunghezza avrà una coreggia avvolta intorno ad essi?

4. Lo spigolo alla base di una piramide regolare a base quadratica è a, l'angolo al vertice formato da due spigoli laterali è 2α. Qual'è la superficie di un cono equilatero equivalente in volume alla piramide?

B. Leipa: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Una macchina a vapore costa 8900 f., le spese di manutenzione annuale ascendono a 800 f., ed ogni 10 anni la macchina deve sostituirsi con una nuova. Quale capitale dovrà mettersi a disposizione per comperare e conservare in perpetuo una tal macchina, calcolando il 4 $^0/_0$ d'interesse composto?

2. Dalla torre Rodolfo presso Hallstadt, che si trova ad una altezza $h = 386$ m. sopra il livello del lago di Hallstadt, la cima dello Sarstein appare sotto un angolo di elevazione $\alpha = 11^0\,37'\,26''$, e la sua immagine riflessa nel lago appare sotto un angolo di depressione $\beta = 19^0\,16'\,25''$. Di quanto si eleva la cima dello Sarstein sopra il lago di Hallstadt?

3. Con una lamina di ottone grossa $d = 1{,}5$ mm. e del peso specifico $s = 8$ devesi fare una sfera cava che s'immerga per metà nell'acqua. Quali devono essere i raggi interno ed esterno?

4. Determinare le tangenti condotte al circolo $x^2 + y^2 = 64$ parallelamente alla retta $2y - 3x - 4 = 0$.

Brünn: *Scuola reale sup. ted. provinciale.* — 1. Un tale cambia zecchini, napoleoni d'oro e pezzi da 20 marchi, in tutto 20 monete, in f. austriaci, e riceve 183,10 f.. Quante monete d'ogni specie cambia, se al corso attuale viene calcolato lo zecchino a f. 5,70, il napoleone d'oro a f. 9,60 ed il pezzo da 20 marchi a f. 11,90?

2. Un tale ha il diritto d'incassare una rendita annuale di 800 f. alla fine di ogni anno per 20 anni. Quale rendita annuale riceverà egli in cambio al principio di ogni anno per 10 anni, calcolando il $3\frac{1}{2}$ $^0/_0$ d'interesse?

3. Una sfera vuota fatta d'un materiale del peso specifico 7,5 e che pesa complessivamente 50 Kg. si immerge precisamente a metà nell'acqua. Quale spessore avrà il guscio?

4. Il punto più a Nord della Monarchia aust. ung. giace a settentrione di Hilgersdorf in Boemia ad una latitudine di 51° 3′, il punto più a Sud è la punta meridionale della Dalmazia a 42° 9′ di latitudine. Per ambedue i luoghi devesi determinare la durata del giorno più lungo (21 Giugno) e del giorno più breve (21 Dicembre), e l'ora in cui leva e tramonta il sole in questi due giorni.

Brünn: *i. r. Scuola reale sup.*

1. $$\left| 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}} \right| \qquad (x+y)=9\,, \quad xy=3.$$

2. Per coprire le spese del primo impianto d'una Scuola si calcola che basti un prestito da ammortizzarsi in $n=20$ anni con un versamento annuale di $a=2736$ f. al $3\frac{1}{2}$ %. A quanto furono preventivate quelle spese?

3. Dal punto $M(8,0)$ vengono guidate tangenti al cerchio $x^2+y^2=4x$. Determinare le equazioni di queste rette e poi calcolare il volume del corpo generato dalla rotazione della figura compresa fra le tangenti e dall'arco esterno del cerchio, intorno all'asse delle x.

4. La superficie della Monarchia austro-ung., che importa 676656 Km²., deve essere eguale all'area di un triangolo sferico equilatero sulla sfera terrestre; determinare lati ed angoli di questo triangolo.

Budweis: *i. r. Scuola reale sup. ted.* — 1. Degli angoli d'un triangolo acutangolo l'uno (espresso in gradi) è divisibile per 11, l'altro per 13 ed il terzo per 19. Che angoli ha il triangolo?

2. A ha l'età di 49 anni e vuole assicurare dopo la sua morte ai suoi eredi un capitale di 4800 f.. Che premio deve pagare per una sola volta ad una società di assicurazioni a questo scopo, se viene accordato il 4 % d'interesse?

3. L'altezza di un cono retto è di 8 cm. e l'angolo al vertice $2\alpha=28^0\,48'\,48''$; si cerchi il volume di quel settore sferico che ha per complemento quel cono.

4. Preso un punto qualunque in un triangolo equilatero e condotte da esso delle perpendicolari ai lati si trovi la loro somma.

Czernowitz: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Risolvere le equazioni:

$$13xy=2197 \quad \text{e} \quad 5x+y-4=1.$$

2. Della base di un prisma triangolare retto sono dati due lati, l'uno di 18 cm. e l'altro di 15 cm. e l'angolo da essi compreso di 75° 36′ 30″. I tre spigoli laterali del prisma sono uguali e precisamente ognuno è uguale all'altezza sul terzo lato della base. Determinare la superficie ed il volume del prisma.

3. Un numero è scritto con tre cifre che stanno in progressione aritmetica. Dividendo il numero per la somma delle sue cifre si ha 26 per quoziente; aggiungendo al numero 396 si ottiene il numero scritto in ordine inverso. Qual'è il numero?

4. Che angoli corrispondono all'equazione $\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$?

5. Una retta $3y = 5x + 5$ ed una parabola $y^2 = 20x$ si tagliano. Determinare il segmento della parabola.

ELBOGEN: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Che valori positivi intieri delle incognite soddisfano alle equazioni:

$$11x - 3y - 2z = 157, \quad 5x - 11y + 8z = 87.$$

2. Per quanto tempo si può usufruire uno stabile dato in pegno per un debito di 20000 f., dando esso annualmente la rendita netta di 1500 f., e calcolando gl'interessi al 5 %? (Si deve supporre che della rendita si possa disporre solo alla fine di ogni anno).

3. Qual'è l'angolo al centro di un segmento sferico, se la sua superficie totale è uguale a quella di un circolo massimo della sfera?

4. Che angolo comprendono le due tangenti guidate del punto $x_1 = -7$, $y_1 = 0$ all'ellisse $9x^2 + 25y^2 = 225$?

(*Continua*).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Un'applicazione del metodo di risoluzione d'Eulero dell'equazione di 4° grado. — 1. Il metodo d'Eulero per la risoluzione delle equazioni algebriche di 4° grado, che consiste, com'è noto, nell'identificare due equazioni dello stesso grado, si può applicare alle equazioni algebriche di cui è possibile la determinazione delle radici.

Così essendo data l'equazione quadratica

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \ldots\ldots \quad [1]$$

pongasi $x = u + v$. Quadrando si ha $x^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u(u + 2v) + v^2$; da cui, osservando che $2v = 2(x - u)$, si ricava

$$x^2 = 2ux - u^2 + v^2, \quad \text{ed anche} \quad ax^2 - 2aux + a(u^2 - v^2) = 0. \quad [2]$$

Identificando la [2] colla [1], si ha $u = -\dfrac{b}{2a}$, $u^2 - v^2 = \dfrac{c}{a}$, da cui si deduce

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{ed} \quad x = u + v = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Lo stesso metodo può servire a trovare direttamente le radici dell'equazione biquadratica

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \ldots\ldots \quad [3]$$

indipendentemente cioè dalla conoscenza delle radici dell'equazione quadratica.

Da $x = u + v$, quadrando, si ha $x^2 = u^2 + v^2 + 2uv$ ossia $x^2 - (u^2 + v^2) = 2uv$ e quadrando di nuovo $x^4 - 2x^2(u^2 + v^2) + (u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2 = 0$, da cui moltiplicando per a:

$$a x^4 - 2a(u^2 + v^2)x^2 + a(u^2 + v^2)^2 - 4au^2v^2 = 0. \qquad [4]$$

Identificando l'equazione [4] con la [3], si ottiene

$$u^2 + v^2 = -\frac{b}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [5]$$

$$4u^2v^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{donde} \quad 2uv = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad [6]$$

La [5] e la [6] danno $(u + v)^2 = x^2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e quindi

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

3. Così pure all'equazione di 3° grado

$$x^3 + px + q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [7]$$

si può applicare il metodo in discorso. Pongasi $x = u + v$ e si faccia il cubo $x^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3$; da cui

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [8]$$

Identificando la [7] colla [8], si ottiene

$$uv = -\frac{p}{3}, \quad \text{quindi} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad u^3 + v^3 = -q,$$

cosicchè u^3 e v^3 sono radici d'un'equazione di 2° grado per risolvere la quale si può applicare, come si è visto, il metodo d' Eulero. L'espressione di x è deducibile in tal modo dall'equazione data applicando criterî uniformi di risoluzione.

4. Il metodo d' Eulero può anche servire a determinare, in casi particolari, le radici di equazioni algebriche di grado superiore al 4°.

Ad es. sia data l'equazione

$$x^6 + px^3 + qx^2 + \frac{p^2}{4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [9]$$

e proponiamoci di trovarne le radici.

Pongasi, come al solito, $x = u + v$, da cui $x^3 - (u^3 + v^3) = 3uvx$. Quadrando si ha

$$x^6 - 2(u^3 + v^3)x^3 - 9u^2v^2x^2 + (u^3 + v^3)^2 = 0 \qquad [10]$$

e identificando la [10] con la [9]:

$$u^3 + v^3 = -\frac{p}{2} \qquad u^2v^2 = -\frac{q}{9} \qquad (u^3 + v^3)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Di queste tre ultime relazioni la prima e terza non sono distinte per cui se ne considererà una sola, p. es. la prima. Allora osservando che $uv = \pm \frac{1}{3}\sqrt{-q}$, u e v sono da determinare mediante le relazioni

$$u^3 + v^3 = -\frac{p}{2} \quad \text{e} \quad u^3 v^3 = \pm \frac{1}{27}\sqrt{-q^3}\,,$$

ossia sono radici dell'equazione di 2° grado

$$z^2 + \frac{p}{2}z \pm \frac{1}{27}\sqrt{-q^3} = 0\,.$$

Si ricava così con facilità

$$x = \left[-\frac{p}{4} + \sqrt{\frac{p^2}{16} \mp \frac{1}{27}\sqrt{-q^3}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{p}{4} - \sqrt{\frac{p^2}{16} \mp \frac{1}{27}\sqrt{-q^3}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

V. Correnti.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 31*, 126, 139*, 169*, 170**, 172*, 173**, 174** e 175**

31*. *Il volume d'una sfera supera d'un decimetro cubo quello del tetraedro regolare in essa inscritto; calcolare la lunghezza del raggio a meno d'un millimetro.* (D. Besso).

Soluzione del Sig. *L. Perrotti*, studente a Roma.

Il volume del tetraedro regolare in funzione del raggio R della sfera ad esso circoscritta, com'è noto, è $\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$, quindi per determinare R si ha l'equazione

$$\frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 = 1, \quad \text{da cui si ricava} \quad R = \text{dm}\,\frac{3}{\sqrt[3]{36\pi - 8\sqrt{3}}}\,.$$

Per calcolare R a meno d'un millimetro conviene valutare l'ultima espressione a meno di $\frac{1}{100}$. Calcolando $\sqrt[3]{36\pi - 8\sqrt{3}}$ a meno di $\frac{1}{100}$ si commette nel quoziente $\frac{3}{\sqrt[3]{36\pi - 8\sqrt{3}}}$, oltre all'errore proprio, un'errore $< \frac{1}{100} : 3 = \frac{1}{300} < \frac{5}{1000}$, giacchè il divisore è evidentemente maggiore di $3 + \frac{1}{100}$ (*), cosicchè basterà calcolare il quoziente medesimo a meno di $\frac{5}{1000}$.

(*) L'errore d'un quoziente in cui il dividendo è minore del divisore ed il dividendo è un numero esatto, è minore d'una frazione avente per numeratore l'errore del divisore, e per denominatore il divisore diminuito del suo errore.

Ora per avere $\sqrt[3]{36\pi - 8\sqrt{3}}$ a meno di $\frac{1}{10^2}$ è sufficiente calcolare il radicando a meno di $\frac{1}{10^6}$, onde conviene prendere sia π che $\sqrt{3}$ a meno di $\frac{1}{10^8}$, ambedue per eccesso o per difetto, ossia $\pi = 3{,}14159265$ e $\sqrt{3} = 1{,}73205080$. Con ciò si ha $36\pi - 8\sqrt{3} = 99{,}24092900$, la cui radice cubica è $= 4{,}63$. Se finalmente si osserva che $3 : 4{,}63 = 0{,}65$ a meno di $\frac{1}{2.10^2}$, il raggio cercato della sfera a meno d'un millimetro risulta uguale a m. 0,065.

126. *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2t^2.$$ (E. Fauquembergue).

Risoluzione del Sig. Prof. *C. Soschino* a Reggio Calabria.

Per risolvere in numeri interi l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

simmetrica rispetto ad x ed y, basterà risolverla in numeri interi e positivi. A tal fine osserviamo il quadretto seguente:

x	y	z	t
pari	pari	pari	pari
dispari	dispari	pari	dispari
pari	dispari	dispari	pari
dispari	pari	dispari	pari

il quale ci indica come debbono comportarsi i sistemi di soluzioni della (1) rispetto al divisore 2. Da esso si deduce che potremo riguardare risoluta la (1) quando si riesca:

1.° A determinare i valori pari di y e di t che la soddisfano e a dedurre da essi i corrispondenti valori di x e z entrambi pari o entrambi dispari. Scambiando ogni valore pari di y col corrispondente valore dispari di x avremmo i sistemi di soluzioni nei quali x e t sono pari e z ed y dispari.

2.° A determinare i valori dispari di y e di t che soddisfano la (1) e a dedurre da essi i corrispondenti valori, pari di z e dispari di x.

A dimostrare la possibilità di fare quanto è proposto nei due precedenti paragrafi, indicando con t_s ed y_s due valori di t ed y che soddisfano la (1), poniamo

$$t_s + y_s = 2a \qquad t_s - y_s = \pm 2b \qquad \text{con } a \geqq b \geqq 0.$$

Ricaveremo

$$t_s = a + b \quad y_s = a - b, \quad \text{oppure} \quad t_s = a - b \quad y_s = a + b.$$

Sostituendo nella (1) questi valori a t ed a y, potremo scriverla sotto la forma

$$x^2 - z^2 = a^2 + b^2 \pm 6ab = L \gtrless 0 \qquad (\text{non è mai } L = 0)$$

dove $L = \pm 4K$ quando $a \equiv b$ (mod. 2), cioè quando t ed y risultano pari;

ed $L = \pm 4K + 1$ quando a e b sono uno pari e l'altro dispari, cioè quando t ed y risultano dispari.

Determinati così i valori di t e di y in funzione di due numeri interi qualesivoglia a e b, per determinare i corrispondenti valori z_s ed x_s di z e di x si distinguano i due seguenti casi:

1.° Caso. Se $L = \pm 4K$, poniamo

$$x_s + z_s = 2c \qquad x_s - z_s = \pm 2d \qquad \text{con } c \geqq d > 0 \text{ e } cd = K.$$

Avremo

$$x_s = c + d \quad z_s = c - d \text{ per } K > 0, \quad x_s = c - d \quad z_s = c + d \text{ per } K < 0.$$

Se x_s e z_s sono dispari, insieme al sistema $x = x_s$, $y = y_s$, $z = z_s$, $t = t_s$, dovremo considerare l'altro $x = y_s$, $y = x_s$, $z = z_s$, $t = t_s$.

2.° Caso. Se $L = \pm 4K + 1$, poniamo

$$x_s + z_s = c \qquad x_s - z_s = \pm d \quad \text{con} \quad c \geqq d > 0 \quad \text{e} \quad cd = L.$$

Avremo

$$x_s = \frac{c+d}{2} \quad z_s = \frac{c-d}{2} \text{ per } K > 0, \quad x_s = \frac{c-d}{2} \quad z_s = \frac{c+d}{2} \text{ per } K < 0.$$

Evidentemente, per $K > 0$ sarà $c \equiv d$ (mod. 4), e quindi risulteranno x dispari e z pari; per $K < 0$ c e d divisi per 4 danno resti disuguali e quindi ancora risulteranno x dispari e z pari.

139'. *Inscrivere in un cerchio dato un quadrangolo, dati due lati contigui e tale che due suoi lati opposti siano inversamente proporzionali agli altri due.*

Dimostrare poi che conducendo da un punto fuori del cerchio le sei perpendicolari ai quattro lati e alle due diagonali di sifatto quadrangolo, la somma dei due rettangoli delle perpendicolari condotte a due lati opposti ed ai rimanenti è equivalente al doppio rettangolo delle perpendicolari tirate alle diagonali. (S. Gatti).

Soluzione del Sig. *M. Piattelli*, alunno del R. Liceo di Bari.

I. Sia O il cerchio dato e siano AB, BC i lati dati. Tirisi AC e per B la bisettrice dell'$\angle ABC$, che incontra AC in G. Diviso l'arco ABC per metà in F e condotte FGD, AD, BC, il quadrangolo $ABCD$ sarà quello richiesto.

Infatti poichè arco $AF = FC$, sarà $\angle ADG = GDC$ e perciò si avrà $AD : AG = DC : CG$, d'altra parte perchè $\angle ABG = GBC$ segue $AB : AG = BC : CG$ onde $AB : AD = BC : CD$.

II. Rammentando poi che se M è un punto del piano del quadrangolo $ABCD$, si ha:

$$\Delta ABM \,.\, \Delta CDM + \Delta BCM \,.\, \Delta ADM = \Delta ACM \,.\, \Delta BDM \quad (^*),$$

(*) Baltzer. *Trig.* § 7,13. — Il Sig. *Piattelli* dà veramente la dimostrazione di questa identità, che non riportiamo 1° per esigenza di spazio, 2° perchè a un dipresso il procedimento da lui seguito si riduce a verificare che se a, b, c, d sono quattro rette del piano uscenti dallo stesso punto e con (a, b, c, d) s'indica il loro rapporto anarmonico nell'ordine in cui sono scritte, sussiste la nota identità:

$$(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = 1. \qquad [\textit{N. d. Red}].$$

abbassando da M le perpendicolari MN, MP, MQ, MR, MS, MT sui lati AB, BC, CD, DA e sulle diagonali AC, BD, rispettivamente, segue

$$AB.MN.CD.MQ + BC.MP.AD.MR = AC.MS.BD.MT.$$

Ora pel teorema di Tolomeo, applicato al quadrangolo $ABCD$, si ha $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ e per I) è $AB.CD = BC.AD$ onde $AC.BD = 2.BC.AD$, cosicchè, sopprimendo nell'ultima eguaglianza i fattori comuni, risulta infine

$$MN.MQ + MP.MR = 2MS.MT \qquad \text{c. d. d..}$$

169*. *Se in un triangolo rettangolo il semicerchio descritto sul cateto maggiore con diametro uguale al cateto minore, tangenzialmente a questo cateto, è tangente all'ipotenusa, i lati del triangolo stanno fra loro come* 5 : 4 : 3.

(M. Piattelli).

Dimostrazione del Sig. *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo.

Sia ABC un triangolo rettangolo in A, $AC > AB$, e ADE il semicerchio di centro O descritto sul cateto AC con diametro $AE = AB$, tangenzialmente ad AB; sia ADE tangente all' ipotenusa BC in D. Dico che $BC : AC : AB = 5 : 4 : 3$.

Si conducano OD, OB, AD, DE: poichè BO e DE sono entrambe perpendicolari ad AD, sono parallele, e quindi $EC : DC = OE : BD$; ma $BD = AB$, $AB = 2OE$, da cui $DC = 2EC$. Dalla similitudine dei triangoli AFB, ODB si ricava $BF : AF = BD : OD$, e perciò $BF = 2AF$; ora $BF : AF = AF : OF$, quindi $FO = \frac{1}{4}BF$, epperò $FO = \frac{1}{5}BO$; essendo poi $DE : FO = AD : AF$, si ha $DE = 2OF = \frac{2}{5}BO$, ma $BO : DE = BC : DC$, quindi $DC = \frac{2}{5}BC = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}AB$, ed $EC = \frac{1}{3}AB$. Cosicchè segue:

$$BC = AB + \frac{2}{3}AB = \frac{5}{3}AB;\ AC = AB + \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}AB;\ AB = \frac{3}{3}AB;$$

e finalmente $BC : AC : AB = 5 : 4 : 3$; c. d. d..

Dimostrazione del Sig. *B. Armano* alunno del R. Liceo di Alessandria.

Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Se il semicerchio DEB, descritto com'è detto nel teorema, tocca AC in E, poichè si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad \text{e} \quad \overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 + 2AE.EC,$$
$$\overline{AB}^2 = AB.AD + AB.DB,\quad \overline{AE}^2 = AB.AD,\quad EC = BC = DB$$

con sostituzioni opportune nella prima eguaglianza, si ricava $2AE.EC = AB.EC$ e quindi $2AE = AB$, da cui $\overline{AB}^2 = 4\overline{AE}^2 = 4AB.AD$ e $AB = 4AD$, $AE = AB : 2 = 2AD$. Segue $BC = EC = AB - AD = 3AD$, $AC = AE + EC = 2AD + 3AD = 5AD$. Si ha dunque $AC : AB : BC = 5 : 4 : 3$.

Dimostrazione del Sig. *G. Tirella*, licenziato dal R. Liceo di Modica.

Indicando con a l'ipotenusa e b, c $(b < c)$ i cateti di un triangolo che soddisfa alle condizioni dell'enunciato, la superficie del triangolo, circoscritto al semicerchio di raggio $\frac{b}{2}$, sarà $(a+b)\frac{b}{4}$, ma d'altra parte questa superficie è anche espressa da $\frac{bc}{2}$, cosicchè $(a+b)\frac{b}{4}=\frac{bc}{2}$, donde $a+b=2c$. Associando a quest'eguaglianza, l'altra $a^2=b^2+c^2$ ed eliminando dalle medesime prima a, poi b, si ottiene successivamente $3c=4b$, $4a=5c$, ossia $\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$, $\frac{c}{4}=\frac{a}{5}$, donde $\frac{a}{5}=\frac{c}{4}=\frac{b}{3}$ (*).

170.** *Trovare tre numeri continuamente proporzionali, dei quali la somma sia* 20 *e la somma dei quadrati* 140.

(Dall'*Arithmetica universalis* di NEWTON).

Soluzioni completamente analoghe dai Sigg. *V. Columbo*, studente a Napoli; *V. Correnti*, studente a Palermo; *E. de Vito* e *L. Perrotti*, studenti a Roma; *M. Piattelli*, alunno del R. Liceo di Bari.

Siano x, y, z i numeri richiesti. Si avranno le tre equazioni

$$x+y+z=20; \qquad x^2+y^2+z^2=140; \qquad xz=y^2.$$

Elevando al quadrato i due membri della prima e sottraendo la seconda, membro a membro, si ricava $xy+xz+yz=130$, e, per la terza di esse:

$$xy+y^2+yz=130 \qquad \text{o} \qquad y(x+y+z)=130;$$

ma $x+y+z=20$, onde

$$x=\frac{130}{20}=\frac{13}{2}, \qquad x+z=20-y=\frac{27}{2}, \qquad xz=y^2=\frac{169}{4}.$$

I valori di x e z saranno quindi le radici dell'equazione quadratica

$$X^2-\frac{27}{2}X+\frac{169}{4}=0,$$

ossia $x=\frac{27\pm\sqrt{53}}{4}$ $\quad z=\frac{27\mp\sqrt{53}}{4}$.

Soluzione del Sig. *F. Mariantoni*, già studente a Roma.

Indichiamo con a la somma dei tre numeri cercati, che rappresenteremo con x, y, $a-(x+y)$, e con b^2 quella dei loro quadrati. Per trovare x ed y avremo da risolvere il sistema delle due equazioni

$$x:y=y:a-(x+y); \qquad x^2+y^2+[a-(x+y)]^2=b^2.$$

(*) Altre dimostrazioni pervennero dai Sigg. *V. Columbo*; *E. de Vito*; *L. Perrotti*; *U. Gerra* e *G. Mazza*, alunni del R. Istituto tecnico di Piacenza; *R. Scozzari* e dalla Sig.[a] *F. Prime* a Bruxelles.

Sviluppando, da queste si deducono le altre

$x^2+y^2+xy-ax=0;\qquad x^2+y^2+xy-ax-ay=(b^2-a^2):2.$

Sottraendo membro a membro si ricava:

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

Questo valore sostituito nella prima delle precedenti equazioni porta alla quadratica

$$x^2-\frac{a^2+b^2}{2a}x+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=0,$$

dalla quale si ha

$$x=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}.$$

Per la possibilità del problema debbono aver luogo le condizioni

$$3b^2 \gtrless a^2 \gtrless \frac{b^2}{3} \quad \text{o} \quad a^2=3b^2 \quad \text{o} \quad b^2=3a^2,$$

sicchè i due numeri a e b non sono fra loro indipendenti. Nel caso particolare di $a=20$, $b^2=140$ le condizioni di possibilità sono soddisfatte e dai valori di y ed x trovati si deducono i valori numerici $y=\frac{13}{2}$, $x=\frac{27\pm\sqrt{53}}{4}$. Il terzo numero sarà poi $z=20-(x+y)=\frac{27\mp\sqrt{53}}{4}$ (*).

172*. *Dato un triangolo* ABC, *siano* B′ *e* C′ *i punti in cui le perpendicolari innalzate sul lato* BC, *nei vertici* B, C, *incontrano i lati* AC, AB. *Dimostrare che la retta* B′C′ *è perpendicolare alla retta che unisce il centro del cerchio circoscritto col punto medio dell'altezza relativa al vertice* A.

(V.ᵛᵃ F. PRIME).

Dimostrazione del Sig. *Armano Biagio*, studente nel R. Liceo di Alessandria.

Sia O il centro del cerchio circoscritto e D, E i punti medi dei lati AB, AC. Si conducano OD, OE, DE e per O la perpendicolare a $B'C'$ che incontra DE in F. È facile vedere che $\angle FDO=\angle B'BC'$, $\angle DOF=\angle BC'B'$; $\angle OEF=\angle B'CC'$, $\angle FOE=\angle C'B'C$, perchè aventi due a due i lati perpendicolari, perciò i due triangoli DOF, $BC'B'$ come pure EOF, $CB'C'$ sono simili e si hanno le proporzioni $FO:B'C'=FD:B'B$ e $FO:C'B'=FE:C'C$, da cui segue $FD:FE=B'B:C'C$. Ma poichè anche i triangoli ABB', $AC'C$ sono simili, si ha $B'B:CC'=B'A:CA=BA':CA'$, onde $FD:FE=A'B:A'C$. Chiamando ora F' il punto in cui DE incontra l'altezza AA' punto che, in seguito alla costruzione fatta, risulta il centro di AA', si ha ancora $F'D:F'E=A'B:A'C$, cosicchè $FD:FE=F'D:F'E$ ciò

(*) Un'altra soluzione venne inviata dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

che conduce a concludere che F' coincide con F. La retta passante per O e pel punto medio di AA' è dunque perpendicolare a $B'C'$.

Osservazione. La dimostrazione precedente suppone che F cada nell'interno di DE, ma con leggere modificazioni essa è adattabile anche al caso in cui ciò non avvenga.

173.** *In un triangolo isoscele di base costante 1° il luogo geometrico dei centri delle circonferenze ex-inscritte è un'iperbole equilatera, 2° il luogo geometrico incontro della mediana di uno dei lati eguali con l'altezza dell' altro è un'ellisse; che ha per asse maggiore la base del triangolo.*

(G. Bellacchi).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Ceretti* a Rieti.

Il triangolo dato sia ABC e sia $AB = 2b$ la base costante ed $AC = BC = a$ il lato uguale variabile. Come sistema di assi coordinati x ed y prendasi la base AB e l' altezza CO. Risulta intanto evidente la simmetria dei luoghi rispetto ai due assi coordinati.

1.° Prolungato AC in L e condotta FC bisettrice dell' $\angle LCB$, retta che è parallela ad AB, su FC si troverà il centro della circonferenza ex-inscritta relativa al lato CB. Sia P questo centro, la sua ordinata y sarà $= CO$ e condotta la perpendicolare PR a BC, sarà PR il raggio della circonferenza medesima. Ma, com'è noto, $PR = \dfrac{2\Delta}{a+2b-a} = \dfrac{\Delta}{b}$ e $\Delta = b\,.\,CO$, onde $PR = CO = y$. Ora dai triangoli simili CPR, BCO si ha $CP : PR = BC : CO$ ossia $x : y = a : y$, donde ricavasi $a = x$. Ma dal triangolo $\Delta\, CBO$ si ha ancora $\overline{BC}^2 - \overline{CO}^2 = \overline{OB}^2$ ossia $x^2 - y^2 = b^2$, cosicchè il luogo cercato è un' iperbole equilatera di asse reale AB.

2.° Si conduca l' altezza AH, relativa a CB, e la mediana BM, relativa ad AC, che si tagliano nel punto variabile P e da P la PQ perpendicolare ad AB, cosicchè $OQ = x$, $PQ = y$. Dai triangoli simili BPQ, BNO si ha $PQ : QB = NO : OB$, ossia, ponendo mente che $NO = \dfrac{CO}{3} = \dfrac{h}{3}$, $y : b - x = \dfrac{h}{3} : b$ e dai triangoli simili APQ, CBO si ha $PQ : QA = BO : CO$, cioè $y : b + x = b : h$. Moltiplicando termine a termine questa proporzione colla precedente, segue $y^2 : b^2 - x^2 = \dfrac{1}{3} : 1$, ossia

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1\,,$$

il luogo cercato è dunque un'ellisse avente AB per asse maggiore e $\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$ per asse minore (*).

(*) Un'altra dimostrazione analitica pervenne dal Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli.

Dimostrazione della Sig.ª V.ª *F. Prime* a Bruxelles.

1.° Sia ABC $(AB = AC)$ il triangolo considerato, AD l' altezza relativa a BC, E il punto in cui la bisettrice di B incontra AD ed F il punto in cui BE incontra la perpendicolare CF a CE. Si sa che F è il centro del cerchio ex-inscritto nell' angolo B del triangolo ABC; e, siccome le rette CF, BF formano angoli complementari con BC, il luogo di F è l' iperbole equilatera di cui BC è l'asse trasverso e D il centro.

2.° Sia ABC $(AB = AC)$ il triangolo isoscele, AD l'altezza relativa a BC, G il punto in cui la mediana BE incontra l' altezza CF ed H, I i punti in cui queste rette tagliano AD.

Si ha $DH \, . \, DI = \frac{1}{3} AD \, . \, DI = \frac{1}{3} \overline{BD}^2$ e risulta da ciò che il luogo di G è l'ellisse di cui BC è l'asse maggiore, D il centro e il cui asse minore vale $\frac{BC \, . \sqrt{3}}{3}$.

Osservazione. Cerchiamo ancora il luogo geometrico dei punti d'intersezione delle bisettrici e delle altezze dagli angoli alla base.

Sia M il punto in cui la bisettrice interna di B incontra l'altezza condotta da C e P il punto in cui quest' altezza incontra la perpendicolare BP alla base. Si ha $\angle PMB = PCB + MBC = BPA + MBA = PBM$, da cui $PM = PB$. Il luogo di M è dunque la bolla della strofoide retta avente BC per asse, C per polo e B per punto doppio.

Se M' è il punto in cui la bisettrice esterna, tirata da B, incontra CM, il luogo di M' completa la strofoide incominciata da M.

Infine i punti analoghi ai punti M, M' sulla bisettrice dell'angolo C generano una seconda strofoide retta avente B per polo e C per punto doppio.

Ecco poi alcuni altri luoghi che si trovano facilmente:

1.° Il luogo dei punti d' intersezione delle altezze abbassate sui lati eguali con la parallela alla base condotta pel vertice si compone di due parabole.

2.° Le mediane corrispondenti ai lati eguali incontrano la parallela alla base condotta pel vertice in punti il cui luogo è composto di due perpendicolari alla base.

3.° Le tangenti al cerchio circoscritto si tagliano in punti il cui luogo è un sistema di due parabole aventi per direttrice comune l'altezza del triangolo e per fuochi le estremità della base di questo triangolo.

174.** *Ad un dato triangolo rettangolo circoscrivere una parabola 1° con l'asse normale all'ipotenusa, 2° con il vertice coincidente con quello dell'angolo retto.* (G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. Prof. *V. Carpaneto* ad Acqui.

1.° Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Se l' asse della parabola, il quale deve passare pel centro dell' ipotenusa, si prende come asse delle x e la tangente nel vertice come asse delle y, l'equazione della parabola è $y^2 = px$. Sostituendo le coordinate x_b, y_b ed x_a, y_a dei vertici B ed A e sottraendo membro a membro si ottiene $y_b^2 - y_a^2 = p(x_b - x_a)$, ossia $(y_b + y_a)(y_b - y_a) = p(x_b - x_a)$. Se con m ed n si indicano i segmenti dell'ipotenusa e con h l'altezza corrispondente si ha dunque $mn = ph$ ed a cagione della nota relazione $mn = h^2$ ne segue $p = h$. Se ne deduce che la perpendicolare condotta per A alla congiungente A col punto medio dell'ipotenusa sega l'asse della parabola nel vertice di questa. La parabola è quindi costruita.

2.° Si assuma un sistema d'assi ortogonali con l'origine in A e sia asse delle x l'asse stesso della parabola, il cui angolo col cateto AB si indichi con θ; siano parti positive degli assi quelle che comprendono il vertice C; si indichino inoltre con b e c i cateti AC ed AB rispettivamente. Le coordinate x_c, y_c del punto C si possono esprimere in funzione di b e θ e si ha $x_c = b \operatorname{sen}\theta$, $y_c = b\cos\theta$ e quelle del punto B in funzione di c e θ e si ottiene $x_b = c\cos\theta$, $y_b = -c\operatorname{sen}\theta$. Sostituendo nell'equazione della parabola $y^2 = px$ si avrà il sistema di equazioni atte a determinare p e θ

$$b^2\cos^2\theta = pb\operatorname{sen}\theta\,, \qquad c^2\operatorname{sen}^2\theta = pc\cos\theta\,.$$

Dividendo membro a membro si ottiene

$$b\cos^2\theta : c\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}\theta : \cos\theta \qquad \text{ossia} \qquad \operatorname{tg}^3\theta = \frac{b}{c}\,;$$

questo risultato suggerisce per l'asse della parabola la seguente costruzione: si descrivano due parabole, una delle quali abbia per asse la retta AB con parametro uguale a b e l'altra abbia per asse la retta AC con parametro uguale a c; la congiungente il punto A col secondo punto d'intersezione reale delle due parabole è l'asse. L'equazione della 1ª è infatti (essendo assi delle coordinate due rette coincidenti coi cateti) $y^2 = bx$ e quella della 2ª $y = \frac{1}{c}x^2$ e moltiplicando membro a membro si ha $y^3 = \frac{b}{c}x^3$ ossia $\frac{y^3}{x^3} = \operatorname{tg}^3\theta = \frac{b}{c}$.
Ad una qualunque delle due parabole ausiliarie si può sostituire un circolo di equazione $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{4}$, che facilmente si traccia.

Nota la posizione dell'asse, si costruirà graficamente il parametro nel modo solito e quindi la parabola.

175**. *Per i vertici* A, B *della base di un triangolo isoscele si può sempre descrivere una parabola, il cui fuoco giaccia nell'ortocentro* H; *quali devono essere gli angoli* A = B *del triangolo isoscele affinchè la parabola passi pure per* C? (G. Bellacchi).

Risposta della Sig.ª V.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Sia D il punto in cui la perpendicolare AD a CA è incontrata da CH ed E il piede di CH su AB. Esisterà una parabola rispondente alle condizioni dell'enunciato se $ED = 4\,CH$. Ma $CH = AB \,.\cot C = -AB\,.\cot 2A$ e $DE = \frac{1}{2}AB\,.\tan EAD = \frac{1}{2}AB\,.\cot A$. Si dovrà dunque avere

$$\frac{1}{2}\cot A = -4\,.\cot 2A \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2\,.\tan A} = \frac{-4 + 4\tan^2 A}{2\tan A}\,.$$

da cui

$$\tan A = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ossia} \qquad A = 48^0\, 11'\, 22'',86.$$

Per costruire geometricamente l'angolo A, osserviamo che $\cos A = \frac{2}{3}$, si prenderà dunque un triangolo isoscele di base $AB = 4$ e di lati $AC = CB = 3$.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

202**. Dimostrare le seguenti soluzioni dei problemi:

« Date in un piano due rette u, u' ed un punto U', tracciare, con la sola riga, la retta che unisce U' al punto uu', senza far uso di quest'ultimo punto ».

Si tirino le rette arbitrarie l, l', p delle quali le prime due passino per U', e si ponga $p(u, l) \equiv N, L$; $ul \equiv M$; $u'l' \equiv M'$. Preso poi un punto arbitrario S di MM', si ponga $SN \,.\, u' \equiv N'$, $SL \,.\, l' \equiv L'$. La retta $N'L'$ taglierà p in un punto U'' della richiesta retta; sicchè questa sarà la $U'U''$.

« Dati in un piano due punti U, U' ed una retta u', trovare con la sola riga, il punto comune ad u' ed alla retta UU', senza far uso di quest'ultima retta ».

Si segnino i punti arbitrarii L, L', P dei quali i primi due giacciano sopra u', e si ponga $P(U, L) \equiv n, l$; $UL \equiv m$; $U'L' \equiv m'$. Presa poi una retta arbitraria s di mm' si ponga $sn \,.\, U' \equiv n'$, $sl \,.\, L' \equiv l'$. Il punto $n'l'$ sarà proiettato da P con una retta u'' del punto richiesto; sicchè questo sarà $u'u''$.

Far rilevare che le due precedenti soluzioni, mentre non richiedono maggiore numero di costruzioni di quelle già conosciute, possono ciascuna servire a risolvere tanto il problema a sinistra che quello a dritta.

A. Del Re.

203**. Applicare entrambe le costruzioni indicate nell'esercizio precedente a risolvere con la sola riga il problema:

« Date, in un piano, due rette parallele ed un punto, tracciare pel punto la parallela alle due rette »;

e poi mostrare come la costruzione a dritta, opportunamente applicata, diventa una soluzione nota del problema:

« Nel piano di un parallelogramma tracciare, con la sola riga, una parallela ad una data retta ».

A. Del Re.

(*) La questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

204*. I tre punti simmetrici di un punto M di un circolo, rispetto a tre rette passanti per il centro di questo, sono vertici di un triangolo che rimane costante nella forma e nella grandezza, al variare di M sul circolo.

G. Biasi.

205*. I tre punti simmetrici di un punto M, preso sul circolo circoscritto a un triangolo ABC, rispetto ai lati di questo, sono in una retta, e tutte le rette che si possono ottenere in tal modo, al variare di M sul circolo, passano per uno stesso punto, l'ortocentro del triangolo.

G. Biasi.

206*. Dati i tre punti simmetrici del centro del circolo circoscritto ad un triangolo, rispetto ai lati di questo, si costruisca il triangolo, studiando le relazioni fra il triangolo domandato e quello che ha per vertici i punti dati.

G. Biasi.

207*. *a*) Essendo date, nel piano, due direzioni AX, A_1X_1 uscenti dai punti A, A_1, e un punto P esterno ad esse, trovare nelle direzioni medesime i punti B, B_1 in linea retta con P e tali che sia $AB = A_1B_1$.

b) Applicare questo problema alla risoluzione dei seguenti:

1° Diminuire i lati di un rettangolo di uno stesso segmento, in modo da ottenere un nuovo rettangolo equivalente ad una parte del primo, determinata da una retta parallela a un lato.

2° Costruire un arco di circolo tale che la somma della sua tangente e della sua cotangente sia eguale a 4 (o ad un altro numero dato). [*Esami di licenza degli Istituti tecnici*, 1890-91].

3° Costruire due archi, essendo date la loro somma e la somma delle loro tangenti. [*Esami di licenza degli Istituti tecnici*, 1892-93].

G. Biasi.

208*. Dati più numeri a_1, a_2, ... a_n non tutti multipli di un numero m, dimostrare, indipendentemente dalla teoria dei numeri primi, che il minor numero b pel quale i prodotti a_1b, a_2b, ... a_nb sono divisibili per m, è un divisore di m.

G. Ceccaroni.

209**. Risolvere l'equazione

$$x^5 - 5ax^2 - 5bx - \frac{a^4 + b^3}{ab} = 0.$$

F. Giudice.

210*. Considerando un segmento sferico a due basi come somma o differenza di due segmenti aventi per base comune un cerchio massimo della sfera – i cui volumi sono dunque da esprimersi con $\frac{\pi h_1}{3}(2R^2 + r_1^2)$ e $\frac{\pi h_2}{3}(2R^2 + r_2^2)$ – trovare la nota formola pel volume del segmento sferico a due basi qualunque.

A. LUGLI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

GINO LORIA. — *Le Scienze esatte nell' antica Grecia.* Libro I. I geometri greci precursori di Euclide (pp. 168 in 4°, con 2 tav.). — Dalle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Vol X, Serie II.

Fra i motivi ai quali si deve questo poderoso lavoro, vi ha il « desiderio di mostrare col fatto come l'Italia non rimanga spettatrice passiva dinanzi ai progressi che va facendo la storia delle matematiche », come l'A. avverte nella prefazione; fra i motivi che ispirarono quest'articolo, tacendo di quella qualsiasi utilità che può presentare per gl'insegnanti matematiche nelle nostre Scuole secondarie, vi è quello che l'Italia sappia un po' meglio ciò che si fa dagli italiani e non accada lo sconcio che mentre certi lavori come questo, nati fra noi, e che soltanto per la genialità loro dovrebbero trovare numerosi lettori, riscuotono plauso e diffusione al di là dei confini, restino qui negletti e pressochè sconosciuti (*). Anzi questo motivo principalissimo, mi valga di scusa, se, poco addentro negli studi storici delle matematiche, mi sono messo al cimento di dare qualche notizia del nuovo contributo che il prof. Loria ha portato alla storia delle Scienze esatte, sul merito del quale, con intenzione, mi astengo da qualunque apprezzamento.

Intanto a tratteggiare il metodo di sviluppo e discussione seguito in questa memoria vale il seguente periodo del preambolo: « Alcuni rimprovereranno all'autore la tinta di dubbio comune a tutta l'opera presente; essa è l'espressione del convincimento che allo storico debba essere compagno costante un oculato scetticismo se non un cieco pirronismo, per ascrivere fra i veri solo i fatti che è impossibile porre in discussione; essa toglie forse all'esposizione un po' di storica maestà; ma fu da noi prescelta, tanto perchè corrisponde alle nostre opinioni, quanto perchè essa fa più schiettamente apparire la distinzione fra i problemi definitivamente risolti ed i problemi la cui soluzione attuale, non essendo di quelle in cui il desiderio si acquieta, più urgentemente reclamano le cure degli studiosi.... ».

(*) V. l'analisi di questo stesso lavoro, dovuta al chiaro storico francese P. Tannery, nel *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Vol. XVIII, Janvier 1894.

Questo I° libro, come indica l'A., si riferisce al periodo avente per origine l'istante in cui nel mondo greco appare la prima personalità scientifica spiccata e si chiude con lo sfacelò dell'impero di Alessandro il Macedone: esso comprende all'incirca tre secoli. Epoca in certa misura di preparazione alla ricerca scientifica anzichè di vera scienza.

Il lavoro consta di sei capitoli, ossia: I. Sguardo generale sulla geometria greca pre-euclidea, II. Talete e la Scuola ionica, III. Pitagora e la Scuola italica, IV. Eleati, atomisti, sofisti, V. Pitagorei e Pitagoristi, VI. da Socrate ad Euclide — e di due appendici; la prima contenente un cenno delle ricerche geometriche compiute nell'antichità da gli Egiziani ed i Babilonesi, la seconda un'analisi della restituzione del Viviani dei *Luoghi solidi* di Aristeo Seniore.

I principali personaggi di cui sono enumerate, per quanto è possibile, e discusse le produzioni matematiche, oltre ai Capi scuola, sono: Anassimandro e Anassimene. Zenone d'Elea, Oinopide, Anassagora, Democrito, Ippia. Ippocrate da Chio. Antifonte e Brisone, Archita da Taranto. Platone. Leodamante e Leone, Teeteto ed Ermotimo. Aristotele. Eudosso da Cnido. Menecmo ed Aristeo. Dinostrato.

La parte in qualche modo teorica del lavoro comprende: la genesi delle tre proporzioni aritmetica, geometrica ed armonica — l'illustrazione dei problemi dell'applicazione semplice, in eccesso e in difetto delle aree, dovuti ai Pitagorici (*) — la dimostrazione che, al dire di Eudemo, usavano fare i Pitagorici del teorema: la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti — la genesi e la proprietà caratteristica della quadratrice di Ippia, non che l'applicazione di questa curva alla quadratura del circolo dovuta a Dinostrato — un ampio sviluppo delle quadrature di diverse lunule eseguite da Ippocrate da Chio e la tentata applicazione alla quadratura del circolo — i metodi di Archita e di Platone, come vengono riferiti da Eudemo il primo e da Eutocio il secondo, per l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, problema dal quale si può far dipendere la duplicazione del cubo, inoltre un tentativo di restituzione del metodo seguito da Eudosso per la soluzione dello stesso problema e le due soluzioni di questo dovute a Menecmo, riportate da Eutocio, soluzioni che starebbero a dimostrare la scoperta per parte di Menecmo medesimo delle tre sezioni coniche, finalmente i tentativi fatti per costituire gli *Elementi* prima di Euclide.

Del resto per chi voglia farsi un concetto abbastanza completo del contenuto di questa memoria storica del prof. Loria, nelle sue linee generali, non saprei far meglio che riportare per intero, salvo le note, l'ultimo paragrafo della medesima, che è il seguente:

« Menecmo, Dinostrato ed Aristeo formano la retroguardia della schiera dei geometri greci precursori di Euclide. Intorno alle loro persone e alle loro opere, non meno che intorno a quanto concerne coloro che li precedettero, si avvolge un fitto velo, il quale fa sì che di tutta la geometria greca pre-euclidea siano

(*) Problemi che in sostanza conducono alla risoluzione geometrica dell'equaz. $x^2+px+q^2=0$, in tutti i casi in cui ha radici reali.

mal sicuri i contorni e sbiadite le tinte. Tuttavia un esame attento di quanto racchiudono le pagine precedenti consente di formarsi un concetto generale abbastanza preciso del periodo ora studiato, sufficiente almeno a misurare e valutare le cognizioni geometriche che si avevano prima di Euclide, a sradicare in conseguenza il pregiudizio che gli *Elementi* del grande insegnante alessandrino siano opera completamente originale.

Infatti, tale esame rivela l'esistenza di un uomo e di una scuola — Talete e la Scuola jonica — donde proviene il bagliore antelucano che annunzia l'alba della matematica greca. A Talete si deve il trasporto in Europa dei germi delle scienze esatte ed i primi tentativi di coltivarle; e se ai suoi seguaci non siamo debitori di qualche importante scoperta matematica gli è che la di lui tendenza alle ricerche fisiche si accentua siffattamente ne' suoi discepoli e continuatori da far porre da essi in non cale le investigazioni di matematica pura.

Ma, scomparsa la setta dei fisici Jonii, appare un altro uomo e vengono gettate le basi di un'altra scuola — Pitagora e la Scuola italica — nella quale sembra ragionevole collocare le scaturigini del maestoso fiume delle investigazioni geometriche. Ivi con lo sviluppo della dottrina dei rapporti e delle proporzioni, lo studio dei problemi di applicazione delle aree e l'introduzione delle quantità irrazionali, vengono approntati gli strumenti che magistralmente usarono Euclide ed Apollonio e ai quali deve sempre chiedere aiuto chiunque voglia seguire le luminose loro traccie. Lo sfacelo della comunità pitagorica non spegne l'entusiasmo per la matematica negli ammiratori e seguaci del filosofo di Samo: tanto vero che noi troviamo in Ippocrate da Chio e Archita da Taranto, tardi discepoli di Pitagora, due strenui combattenti per la ricerca del vero geometrico. Nè le altre sette filosofiche, che da poi pullularono in Grecia, stettero indifferenti al progresso delle scienze esatte: lo dimostra quanto sappiamo intorno a Zenone e Democrito, ad Anassagora ed Ippia, a Platone e Aristotele, e alla falange di studiosi che da questi vennero istruiti o diretti.

Grazie al concorso di tanti ed elevati ingegni, vengono gettate così solide basi dell'edificio geometrico, che parecchi credono giunto l'istante di organizzare in un corpo di dottrina i risultati delle investigazioni compiute; vengono inoltre studiati a fondo i tre importanti problemi della quadratura del circolo, della duplicazione del cubo, e della trisezione dell'angolo, e ciò porge l'occasione per aggiungere alla linea retta e alla circonferenza altre linee più complicate, piane e a doppia curvatura; sono poi determinate le proprietà e fatte delle notevoli applicazioni di quelle celebri curve che Keplero doveva più tardi ravvisare come le trajettorie degli astri; e il concetto d'*infinito* fa timidamente il suo ingresso nella matematica, ove era destinato ad occupare ben presto una posizione di eccezionale importanza.

Nello stesso tempo anche i metodi di ricerca e di esposizione delle verità geometriche vengono fatti oggetto di studio; si arriva così al *metodo di riduzione* dovuto ad Ippocrate, al *metodo analitico* formulato da Platone, al *metodo di esaustione* così brillantemente applicato da Eudosso. D'altra parte, con l'introduzione del diorisma, Leone segnala un importante complemento che esige la soluzione di ogni problema, mentre, colla determinazione delle condizioni d'invertibilità di un teorema, Menecmo porge un mezzo potente per fare scaturire delle proposizioni da altre. Di più la logica, che da tanti intimi legami è congiunta alla matematica, subisce potenti impulsi dalla dialettica, dalla sofistica e dall'insegnamento di Socrate, e riceve in conseguenza tali perfezionamenti che Aristotele crede giunto il momento di esporne i canoni in un'opera destinata a rimanere classica per lungo volgere di secoli.

Se si aggiunge che l'insegnamento dei sofisti spargeva per la Grecia tutta le nozioni scientifiche; che da tempo era stata vinta l'innata avversione dei Greci verso la scrittura, con la quale sembrava loro un tempo che la parola irrigidisse; che le opere scritte, le quali si cominciarono a raccogliere ad Atene sotto l'arcontato di Euclide, furono da poi serbate con religiosa cura e notevolmente accresciute per merito specialmente di Euripide ed Aristotele talchè offrivano probabilmente, prima della caduta dell'indipendenza greca, un ricco materiale a chiunque aspirasse a dedicarsi alla scienza; che finalmente il commercio librario era venuto tanto in voga durante la guerra del Peloponneso che era sorto un numeroso ceto di amanuensi e librai, provveditori discreti del mercato librario d'Atene: si vedrà che tutto sembrava cospirare a che sorgesse un periodo di singolare floridezza per la scienza in genere e per la geometria in ispecie. Questo periodo non si fece attendere; esso cade nell'epoca greco-alessandrina, e, per l'analogia che offre col tempo in cui le lettere latine raggiunsero la loro massima perfezione, vien da noi riguardato come *il periodo aureo della geometria greca.* Lo studio delle opere che ad esso appartengono è appunto l'oggetto del Libro seguente ».

A quest'ultimo ne seguirà poi uno sugli astronomi e geodeti greci in quanto contribuirono al progresso della matematica pura. Il IV libro sarà destinato all'epoca di decadenza, il V ed ultimo riguarderà l'aritmetica dei Greci da Pitagora a Diofanto.

A. Lugli.

JOSEPH GILLET — *Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second dégré.*

In questo articolo, che ha vista la luce nel vol. XII del *Mathesis*, l'egregio Autore si propone di cercare e studiare la distribuzione dei piani che segano una superficie del 2° ordine secondo iperboli equilatere. A questi piani egli dà il nome di *iperciclici*, per analogia, sebbene non molto giustificata, del nome di *ciclici* che ordinariamente si dà a quei piani che tagliano detta superficie secondo circonferenze di cerchio.

L'Autore comincia dall'osservare che le sole quadriche le quali possono formare oggetto della sua ricerca sono, come è visibile a priori: gli iperboloidi (ad una o a due falde), i coni (inclusi in questi i cilindri iperbolici) ed i paraboloidi iperbolici; forse non sarebbe stato inutile far menzione della coppia di piani, in qualità di quadrica doppiamente degenerata, nel qual caso il problema si riduce ad una quistione di geometria elementare.

La ricerca è fatta a base di considerazioni analitiche. Si scrivono le equazioni delle diverse quadriche ridotte alla forma canonica, si scrive l'equazione di un piano per l'origine, e, trovata l'equazione quadratica cui soddisfanno i quadrati dei semiassi della sezione, si scrive la condizione perchè la loro somma sia zero, condizione che è appunto quella cui devono soddisfare i coefficienti dell'equazione del piano perchè sia iperciclico.

L'Autore rivolge la sua attenzione dapprima all'iperboloide ad una falda (§ I), poi al paraboloide iperbolico (§ III) e poi al cilindro iperbolico (§ IV), mostrando nel § II come, tutto quanto disse nel § I, meno quel che riguarda le generatrici, può essere applicato all'iperboloide a due falde. Man mano il lettore si accorge che vi è trattato anche il caso del cono.

Oltre all'equazione di condizione suddetta, che è il punto di partenza della ricerca dell'Autore nei diversi casi, vi si trovano fatte varie ed accurate discussioni, tutte tendenti a mettere in chiara luce la distribuzione dei piani iperciclici rispetto alla superficie.

Il § I, p. e., che è il più interessante, contiene fra l'altro:

1° il calcolo degli assi della sezione mediante un piano diametrale iperciclico;

2° il *cono inviluppo* dei piani diametrali iperciclici, che è di 2° grado (ellittico o iperbolico, secondochè, essendo $a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 - c^{-2}z^2 = 1$ l'equazione dell'iperboloide, sia $a^2 > b^2 > c^2$, o $a^2 > c^2 > b^2$) ed omofocale al cono assintotico, il quale, a sua volta, è omociclico al supplementare di detto cono inviluppo;

3° lo studio della sezione del cono inviluppo con l'iperboloide che l'Autore dimostra essere una linea di curvatura di questa quando è verificata la condizione $a^2 > c^2 > b^2$;

4° il luogo dei centri delle sezioni ipercicliche che è un cono di 2° grado (cono dei centri) omociclico all'iperboloide e (quindi) al cono assintotico;

5° la proprietà che l'intersezione del cono dei centri con l'iperboloide è una conica (sferica) della sfera di Monge, la quale conica è una linea di curvatura media nulla dell'iperboloide;

6° la ricerca analitica di queste linee di curvatura media nulla; e poi l'altra, abbastanza elegante, che i piani tangenti del cono dei centri sono piani diametrali dell'iperboloide, che producono sezioni delle quali uno degli assi vale quanto il raggio della sfera di Monge.

Parecchie altre proprietà, che, naturalmente, in un articolo come questo, noi passiamo sotto silenzio, vi si trovano date, e tutte hanno l'aria di essere dedotte con sufficiente semplicità. Noi crediamo perciò che lo studio della nota del signor Gillet sarà un utile esercizio pei giovani che hanno famigliarità con la teoria delle quadriche; e che i giovani stessi non farebbero cosa infruttuosa alla loro coltura, ove si provassero a trattare sinteticamente la questione, mostrando dapprima come lo studio della distribuzione dei piani iperciclici si riduca, in sostanza, al seguente problema di Geometria piana:

« Date due coniche φ_1, φ_2 di cui una almeno φ_1 sia reale, ma dotate entrambe di sistema polare reale, studiare in relazione ad esse, l'inviluppo delle rette che uniscono un punto arbitrario M di φ_1 ai punti M_1, M_2 in cui φ_1 è tagliata dalla polare di M rispetto a φ_2 (*) ».

A. Del Re.

VARIETÀ

Problemi curiosi e paradossi matematici.

(Continuazione, V. pag. 41).

23. Se a è differente da b, $x-a$ è parimenti differente da $x-b$, ed $(x-a)^2$ differente da $(x-b)^2$. L'equazione $(x-a)^2=(x-b)^2$ sembra dunque impossibile. Nondimeno, effettuando i quadrati, si ha

$$x^2-2ax+a^2=x^2-2bx+b^2, \quad \text{da cui} \quad x=\frac{1}{2}(a+b).$$

24. Abbiasi l'equazione

$$\frac{3x-b}{3x-5b}=\frac{3a-4b}{3a-8b}.$$

Le frazioni dei due membri sono evidentemente diverse dall'unità. Tuttavia, sottraendole termine a termine, si trova che esse sono uguali ciascuna a

$$\frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b}$$

ossia a 1.

25. Abbiasi il sistema d'equazioni

$$\frac{x-a+c}{y-a+b}=\frac{b}{c}, \qquad \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}.$$

Sottraendo le frazioni termine a termine, si trova

$$\frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{b}{c}, \qquad \frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{a+b}{a+c}.$$

Si hanno dunque due quantità $\frac{b}{c}$ ed $\frac{a+b}{a+c}$ eguali ad una terza senz'essere eguali fra di loro.

26. Abbiasi l'equazione

$$\frac{x+1}{a+b+1}=\frac{x-1}{a+b-1}.$$

Se da ogni antecedente si sottrae il conseguente, e se da ogni conseguente si sottrae l'antecedente, si ottiene

$$\frac{x-a-b}{a+b+1}=\frac{x-a-b}{a+b-1} \quad \text{o} \quad \frac{x+1}{a+b-x}=\frac{x-1}{a+b-x}.$$

(*) Volendo si può osservare che la questione dei piani iperciclici di una superficie del 2° ordine, rientra nel seguente problema d'indole assai più generale:

« Date due quadriche Σ, Σ' trovare i piani che segano Σ, Σ' secondo coniche armoniche ».

Si hanno perciò due frazioni eguali aventi lo stesso numeratore e dei denominatori differenti, o lo stesso denominatore e dei numeratori differenti.

27. L'identità $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$ può scriversi $a(a-a) = (a+a)(a-a)$ da cui dividendo per $a-a$ si ha $a = a + a$ ossia $a = 2a$, e, in particolare, $1 = 2$. Aggiungendo 1, si ha in seguito $1 + 1 = 2 + 1$ ossia $2 = 3$ e poi $3 = 4$, e così di seguito. Dunque *tutti i numeri sono eguali* (*).

28. *Tutti i numeri sono eguali fra loro.* Siano a e b due numeri qualunque aventi per differenza c, cosicchè $a - b = c$.

Moltiplichiamo i due membri di quest' eguaglianza per $a - b$. Si ha successivamente

$$a^2 - ab - ab + b^2 = ac - bc\,, \qquad a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc\,,$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Dividendo i due membri per $a - b - c$, si ha $a = b$. Dunque i due numeri a e b sono eguali fra loro (**).

29. Dati due vertici d'un quadrato, determinare gli altri due mediante il solo compasso.

30. Dividere un cerchio in numero dato di parti uguali aventi uguale perimetro ed uguale superficie (***).

31. Dividere un triangolo, mediante una corda, in due parti che abbiano in pari tempo lo stesso perimetro e la stessa superficie.

32. Trovare i raggi d'un cilindro e d'un cono della stessa altezza nota, sapendo che sono equivalenti in volume e superficie.

33. Dato un triangolo isoscele costruire un secondo triangolo isoscele della stessa superficie e dello stesso perimetro del primo.

34. Trovare un triangolo rettangolo i cui lati siano espressi da numeri interi e la cui area e il cui perimetro siano espressi dallo stesso numero.

35. Un tale lascia alla sua morte un prato quadrato di cui devesi dare un quarto ai poveri, quindi dividere il resto fra i quattro figli del defunto in quattro parti della stessa superficie e della stessa forma (congruenti).

36. Scomporre un quadrato in parti tali che riunendole convenientemente si formino: 1° otto quadrati uguali, 2° cinque quadrati uguali, 3° tre quadrati uguali (****).

37. Un orologio, che ha tre lancette concentriche e della stessa lunghezza, segna due ore: a quale ora la lancetta dei secondi sarà bisettrice dell' angolo formato dalle altre due? Le punte delle tre lancette possono formare un triangolo equilatero?

(*Continua*).

(*) I paradossi algebrici dei numeri 23 a 27 sono tolti da *Mathesis* (t. XIII, pp. 224-25) a cui sono stati comunicati dal Sig. Prof. E. Gelin.

(**) Laisant et Perrin: Algèbre, p. 312.

(***) Avendo in vista una costruzione geometrica elementare conviene che il numero dato sia di una delle forme 2^m, $2^m.3$, $2^m.5$, $2^m.3.5$.

(****) Questo problema è suscettibile di generalizzazione per modo che i quadrati da ottenersi siano n.

Finita la redazione il dì 20 marzo 1894.

SUI POLINOMII

Una delle teorie svolte meno rigorosamente nei libri usuali d'algebra elementare è certamente quella risguardante la divisibilità dei polinomii, tanto che p. es. non accade di rado di veder fatti sforzi per sostituire lunghe e non semplici dimostrazioni del teorema relativo al resto della divisione d'un polinomio intero in x per $x - a$ a quella nota semplicissima, ch' io ebbi già occasione di giustificare (*). Due polinomii equivalenti debbono essere identici per cui delle osservazioni che si son fatte ed ancora si fanno contro l'accennata dimostrazione si può dire non solo che « *ne nous semblent pas fondées* » (**), ma devesi affermare senz'altro che sono ingiuste. Nella possibilità di riconoscere l'identità di due polinomii, dietro la conoscenza della loro uguaglianza in certi casi, risiede il primo noto mezzo fecondo di generalizzazione, che s'incontri nell'algebra elementare: per esso, p. es., tante uguaglianze, che si dimostrano pei valori interi delle lettere nelle teorie delle combinazioni, delle probabilità, ecc., sono subito accettabili come equivalenze, cioè vere per valori qualsiansi delle lettere. Ciò resterà stabilito in modo indiscutibile dalle proposizioni che qui daremo (5-9).

Nella teoria della divisibilità dei polinomii, quando la forma dei coefficienti non abbia importanza, la qual cosa verificasi il più delle volte, si fa astrazione dei fattori numerici cosicchè si considerano come non essenzialmente distinti un polinomio ed il prodotto del medesimo per un numero qualsiasi; ciò si può fare utilmente nei corsi superiori (***); ma porta incertezza e confusione in chi non ha ancora abbastanza pratica del calcolo elementare. Il processo di ricerca del *M. C. D.* e del *M. M. C.* noi lo presenteremo scevro di ogni ambiguità, evitando le frazioni anche nei coefficienti e togliendo anche per essi ogni specie d'indeterminazione. Avvertiamo che per

(*) *Periodico di Matematica:* Roma, luglio-agosto e settembre-ottobre 1890, pag. 157.
(**) Catalan: *Cours d'analyse*, Bruxelles, 1879, pag. 186.
(***) V. un bel capitolo sulla divisibilità delle funzioni nel *Corso d'analisi algebrica*, di A. Capelli e G. Garbieri. Padova 1886, pag. 441.

campo di numeri interi, se si vuole, si può prendere un qualsiasi campo di numeri pei quali sussista una teoria analoga a quella che l'aritmetica elementare insegna pei numeri interi 1, 2, 3 . . . (*).

1. Diremo *monomio intero* il prodotto di un numero intero positivo o negativo, detto *coefficiente*, per lettere elevate ad esponenti interi e positivi. Diremo *polinomio intero* ogni somma di monomii interi.

Dicendo solo monomio intenderemo il prodotto d'un coefficiente reale per lettere elevate ad esponenti reali; e dicendo solo polinomio intenderemo una somma di monomii.

Supporremo sempre che i polinomii non contengano termini simili, potendosene fare la riduzione se ve ne fossero.

Diremo che due espressioni sono uguali, a parte il segno, quando l'una o sia identica all'altra o sia prodotto della medesima per — 1.

2. Diremo *lettere* i simboli non numerici, che adopreremo per indicare numeri qualsiansi. Quando, a nostro arbitrio, prestabiliremo un ordine per le lettere, lo diremo *ordine alfabetico* e diremo che una lettera precede un'altra nell'*alfabeto* per significare che la precede nell'ordine prestabilito. Quando adopereremo lettere di alfabeti usuali, senza far dichiarazioni speciali, attribuiremo alla parola alfabeto il significato usuale.

Diremo che un monomio è *alfabeticamente superiore* ad un altro per esprimere che, dividendolo pel medesimo, si ottiene per quoziente un monomio, che contiene con esponente positivo quella delle sue lettere, la quale precede le rimanenti nell'alfabeto: diremo pure che il secondo monomio è *alfabeticamente inferiore* al primo.

Teorema. *Un monomio, che sia alfabeticamente superiore ad un altro, è anche superiore agli inferiori al medesimo. Se un monomio è alfabeticamente superiore ad un altro, il prodotto del primo per un monomio è superiore al prodotto del secondo per lo stesso monomio.*

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \quad \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \quad \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \quad \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

(*) V. p. es. P. G. Lejeune Dirichlet: *Lezioni sulla teoria dei numeri*, tradotte da Aureliano Faifofer, Venezia, 1881, pag. 424.

siano numeri reali e che dei monomii

$$\lambda a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots \quad \lambda_1 a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \dots \quad \lambda_2 a^{\alpha_2} b^{\beta_2} c^{\gamma_2} \dots$$

il primo sia superiore al secondo ed il secondo sia superiore al terzo; dico che il primo è superiore al terzo. Infatti, essendo il primo superiore al secondo e

$$\lambda a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots : \lambda_1 a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \dots = \frac{\lambda}{\lambda} a^{\alpha - \alpha_1} b^{\beta - \beta_1} c^{\gamma - \gamma_1} \dots$$

è positiva la prima non nulla delle differenze

$$\alpha - \alpha_1 \qquad \beta - \beta_1 \qquad \gamma - \gamma_1 \qquad \dots$$

Essendo il secondo monomio superiore al terzo è positiva la prima non nulla delle differenze

$$\alpha_1 - \alpha_2 \qquad \beta_1 - \beta_2 \qquad \gamma_1 - \gamma_2 \qquad \dots$$

La prima non nulla delle somme

$$(\alpha - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (\beta - \beta_1) + (\beta_1 - \beta_2) \quad (\gamma - \gamma_1) + (\gamma_1 - \gamma_2) \dots$$

è dunque positiva, essendo somma o di zero con un numero positivo o di due numeri positivi; ma esse somme non sono altro che le differenze

$$\alpha - \alpha_2 \qquad \beta - \beta_2 \qquad \gamma - \gamma_2 \qquad \dots$$

La prima non nulla di queste differenze è dunque positiva, cioè il primo monomio è superiore al terzo.

Moltiplicando primo e secondo monomio per il monomio qualsiasi

$$\lambda_3 a^{\alpha_3} b^{\beta_3} c^{\gamma_3} \dots$$

si ottengono i prodotti

$$\lambda \lambda_3 a^{\alpha + \alpha_3} b^{\beta + \beta_3} c^{\gamma + \gamma_3} \dots \quad \lambda_1 \lambda_3 a^{\alpha_1 + \alpha_3} b^{\beta_1 + \beta_3} c^{\gamma_1 + \gamma_3} \dots$$

Dico che il primo prodotto è superiore al secondo. Infatti, ciò è quanto dire che è positiva la prima non nulla delle differenze

$$(\alpha + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_3) \quad (\beta + \beta_3) - (\beta_1 + \beta_3) \quad (\gamma + \gamma_3) - (\gamma_1 + \gamma_3) \quad \dots$$

la qual cosa si riconosce subito vera perchè queste non sono altro che le differenze

$$\alpha - \alpha_1 \qquad \beta - \beta_1 \qquad \gamma - \gamma_1 \qquad \dots$$

ed abbiamo già detto che la prima non nulla di queste differenze è positiva.

3. Diremo che *un polinomio è ordinato alfabeticamente* per esprimere che ogni suo termine è alfabeticamente superiore a quelli che lo seguono.

Teorema. *Un polinomio può ordinarsi, ed in un sol modo, alfabeticamente.*

Dimostrazione. Tra due termini qualunque, non simili, ve ne è sempre uno superiore alfabeticamente all'altro. Per ciò si troverà facilmente (1) un termine, che è superiore a tutti gli altri, procedendo in questo modo: si confrontino due termini e si ritenga quello superiore; si confronti esso con uno dei termini rimanenti del polinomio ed ancora ritengasi il superiore; si continui così fino ad aver considerati tutti i termini: il superiore degli ultimi due confrontati è superiore a tutti gli altri (2) per cui esso è da mettersi primo per ordinare il polinomio alfabeticamente. In modo analogo si trova che tra i termini rimanenti ve ne è uno ed uno solo superiore agli altri alfabeticamente: esso è da mettersi secondo. Continuando in questa maniera si riconosce appunto che il polinomio può ordinarsi, ed in un sol modo, alfabeticamente.

4. Diremo *termine supremo* d'un polinomio quello che è alfabeticamente superiore a tutti gli altri: e diremo *termine infimo* quello che è inferiore a tutti.

In un polinomio ordinato alfabeticamente, il primo e l'ultimo termine sono quindi i termini supremo e infimo.

Teorema. *In un prodotto di due polinomi il termine supremo è prodotto dei termini supremi e l'infimo è prodotto dei termini infimi dei due polinomi.*

Dimostrazione. Siano m_1, n_1 i termini supremi dei due polinomi ed m_k, n_k altri due termini qualunque dei medesimi. Essendo n_1 superiore ad n_k, $m_1 n_1$ è superiore ad $m_1 n_k$ (2); adunque il prodotto dei termini supremi dei due polinomi è superiore al prodotto del termine supremo d'uno per un termine dell'altro, che non sia il supremo: essendo m_1 superiore ad m_k, $m_1 n_k$ è superiore ad $m_k n_k$; adunque il prodotto dei termini supremi dei due polinomi è anche superiore al prodotto di altri due termini qualunque perchè, essendo $m_1 n_1$ superiore ad $m_1 n_k$ ed $m_1 n_k$ superiore ad $m_k n_k$, $m_1 n_1$ è superiore ad $m_h\, n_k$ (2): il prodotto dei termini supremi è quindi termine supremo del prodotto. Si riconosce parimenti che il prodotto dei termini infimi è termine infimo del prodotto.

5. Teorema. *Se i coefficienti* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sono numeri reali dati ed* a_0 *è positivo, il polinomio*

$$P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n$$

è positivo per tutti i valori reali di x *non minori di* 1 *e maggiori del numero positivo, che s'ottiene dividendo per* a_0 *la somma dei coefficienti negativi ed estraendo dal valore assoluto del quoziente la radice di grado eguale al numero dei termini, che precedono il primo negativo.*

Dimostrazione. Sia s la somma dei valori assoluti dei coefficienti negativi e sia r il numero dei termini precedenti il primo negativo, cioè siano positivi $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ e sia negativo a_r. Per $x \overline{\gtrless} 1$, è

$$P(x) \overline{\gtrless}\, a_0\, x^n - s\, x^{n-r} \overline{\gtrless}\, a_0\, x^r - s$$

ma è

$$a_0\, x^r - s > 0$$

se è

$$x > \sqrt[r]{\frac{s}{a_0}}\,.$$

Sicuramente quindi, quando sia

$$x \overline{\gtrless} 1 \qquad\qquad x > \sqrt[r]{\frac{s}{a_0}}$$

è

$$P(x) > 0\,.$$

6. Dall'ultimo numero segue immediatamente che: Essendo dato un polinomio a coefficienti reali

$$P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n$$

ed un numero positivo H, si può fissare un numero positivo p in modo che $P(x)$ sia del segno di a_0 ed abbia valore assoluto maggiore di H per tutti i valori reali di x maggiori di p. Infatti: se a_0 è positivo, si può fissare p in modo (5) che, per $x > p$, sia

$$P(x) - H > 0 \quad \text{ossia} \quad P(x) > H$$

Se invece a_0 è negativo, epperò è positivo $-a_0$, che è il primo coefficiente del polinomio $-P(x)-H$, si può fissare p in modo (5) che, per $x > p$, sia

$$-P(x)-H>0 \quad \text{ossia} \quad -P(x)>H.$$

7. Teorema. *Se si fa*

$$a=2^{(x^n)} \qquad b=2^{(x^{n-1})} \qquad c=2^{(x^{n-2})} \qquad \dots$$

dove n *è scelto in modo che* n — 1, n — 2, . . . *siano positivi, si può fissare un numero positivo* p *in modo che, per tutti i valori reali di* x *maggiori di* p, *abbia valore assoluto maggiore di* 1 *il rapporto di un monomio dato ad altro monomio inferiore ad esso alfabeticamente, che sia pure dato.*

Dimostrazione. Consideriamo i due monomi

$$M=\lambda\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \dots \qquad M_1=\lambda_1\, a^{\alpha_1}\, b^{\beta_1}\, c^{\gamma_1} \dots$$

Per i valori assegnati nel teorema è

$$\frac{M}{M_1}=\frac{\lambda}{\lambda_1}\cdot 2^{(\alpha-\alpha_1)x^n+(\beta-\beta_1)x^{n-1}+(\gamma-\gamma_1)x^{n-2}+\dots}$$

Si fissi il numero positivo H in modo che sia

$$2^H > \left|\frac{\lambda_1}{\lambda}\right| \qquad \text{epperò} \qquad \left|\frac{\lambda}{\lambda_1}\right|\cdot 2^H > 1\ ;$$

essendo M superiore ad M_1 è positiva la prima non nulla delle differenze

$$\alpha-\alpha_1 \qquad \beta-\beta_1 \qquad \gamma-\gamma_1 \qquad \dots$$

per cui si può fissare un numero positivo p in modo (6) che, per tutti i valori di x maggiori di p, sia

$$(\alpha-\alpha_1)\,x^n+(\beta-\beta_1)\,x^{n-1}+(\gamma-\gamma_1)\,x^{n-2}+\dots>H$$

epperò, con maggior ragione:

$$\left|\frac{M}{M_1}\right|>\left|\frac{\lambda}{\lambda_1}\right|\cdot 2^H>1\,.$$

8. Dall'ultimo numero segue immediatamente che: Se sono dati un monomio M ed un monomio M_1 alfabeticamente inferiore ad M ed un numero positivo H, e si fa

$$a=2^{(x^n)} \qquad b=2^{(x^{n-1})} \qquad c=2^{(x^{n-2})} \qquad \dots$$

dove il numero reale n sia fissato in modo che $n-1$, $n-2$, . . .

siano positivi, si può fissare un numero positivo p in modo che, per tutti i valori reali di x maggiori di p, sia maggiore di H il valore assoluto del rapporto di M ad M_1. Infatti, essendo il monomio M superiore alfabeticamente ad $H M_1$, si può fissare il numero positivo p in modo che, per $x > p$, sia

$$\left|\frac{M}{H M_1}\right| > 1 \qquad \text{epperò} \qquad \left|\frac{M}{M_1}\right| > H.$$

Teorema. *Se sono dati un polinomio a più lettere, e coefficienti reali, ed un numero positivo* H, *si possono far dipendere le lettere del polinomio da una nuova medesima lettera in modo che, per tutti i valori d'essa lettera superiori ad un certo numero positivo, il valore assoluto del polinomio sia maggiore di* H.

Dimostrazione. Si ordini il polinomio alfabeticamente e si faccia

$$a = 2^{(x^n)} \qquad b = 2^{(x^{n-1})} \qquad c = 2^{(x^{n-2})} \quad \dots$$

dove il numero reale n sia fissato in modo che $n-1$, $n-2$, ... siano positivi. Se i termini del polinomio sono $r+1$, epperò sono r quelli che seguono il primo, si determinino i numeri $p_1, p_2, \dots p_r$, in modo che, per $x > p_k$, il valore assoluto del rapporto del primo al $(k+1)^{mo}$ termine sia maggiore di $2r$. Indicando con p un numero maggiore di ciascuno dei numeri p_1, p_2, ..., p_r ed indicando con M, M_1, ..., M_r i termini del polinomio, ordinati alfabeticamente, sarà quindi, per $x > p$,

$$\left|\frac{M}{M_1}\right| > 2r \quad \left|\frac{M}{M_2}\right| > 2r \quad \dots \quad \left|\frac{M}{M_r}\right| > 2r$$

epperò

$$|M_1| + |M_2| + \dots + |M_r| < r\,\frac{|M|}{2r}$$

$$|M| - (|M_1| + |M_2| + \dots + |M_r|) > \frac{|M_1|}{2}.$$

Il valore assoluto del polinomio è quindi maggiore di $\frac{|M|}{2}$ per $x > p$. Il termine supremo del polinomio è alfabeticamente superiore a $2H$, che è un numero: potremo quindi fissare un numero p' in modo che, per $x > p'$, sia

$$\frac{|M|}{2H} > 1 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{|M|}{2} > H.$$

Il valore assoluto del polinomio sarà quindi maggiore di H per tutti i valori reali di x, che sono maggiori di p e di p'.

9. Dall'ultimo numero segue immediatamente che: *Due polinomi equivalenti, che siano ordinati alfabeticamente, debbono essere identici.* Infatti; se i due polinomi non fossero identici, la loro differenza o sarebbe un numero, non nullo, ed i due polinomi non avrebbero quindi mai valore uguale, oppure la loro differenza sarebbe un polinomio e prenderebbe valore non nullo per convenienti valori delle lettere (6, 8): per siffatti valori delle lettere avrebbero dunque valor diverso i due polinomi, i quali perciò non sarebbero equivalenti.

Siccome le potenze d'esponente intero di 2 sono numeri interi, ne segue ancora che si possono attribuire valori interi a tutte le lettere d'un polinomio in modo che il medesimo prenda valore non nullo. Dico che si possono anche attribuire valori interi ad alcune lettere soltanto d'un polinomio in modo che ne risulti un polinomio, non nullo. Infatti, considerando come già date numericamente le lettere da fissare, si ordini alfabeticamente il polinomio per le rimanenti lettere; si ottenga così il polinomio:

$$\ldots + c_h m_h + \ldots + c_k m_k + \ldots,$$

dove in $\ldots, c_h, \ldots c_k, \ldots$ si trovino solo le lettere da fissare ed in $\ldots, m_h, \ldots, m_k, \ldots$ si trovino soltanto le altre lettere. Per quanto precede si possono attribuire alle lettere, che sono nei coefficienti $.. c_h, .. c_k, ..$ tali valori numerici interi per cui risulti

$$c_h c_k \ldots \gtrless 0$$

Si otterrà così un polinomio nelle lettere non fissate, il quale conterrà sicuramente ancora termini coi fattori letterali $m_h, m_k, \ldots$

(*Continua*).

F. Giudice.

ANCORA SULLA EQUIVALENZA DEI POLIGONI

In seguito alle osservazioni da me fatte (*) alla sua nota (**), il sig. Schur mi fece gentilmente conoscere le sue dimostrazioni, le quali non lasciano, a mio avviso, nulla a desiderare rispetto al rigore.

Le mie osservazioni erano dirette a combattere la teorica della equivalenza, quale si fa sui nostri libri di testo, indipendente cioè dalle proporzioni e dalla similitudine; ora, dalle premesse di quella nota, in cui l'autore si proponeva di evitare qualsiasi procedimento illimitato, m'ero persuaso che anch'egli intendesse battere la stessa via; poichè, nella teorica delle proporzioni, si può bensì celare il concetto di limite, coll'ommettere la definizione di rapporto e servendosi di dimostrazioni indirette, ma non si può evitare, secondo il mio modo di vedere, ciò che, nell'essenza, costituisce un procedimento illimitato (***).

Tuttavia, ove si rifletta che le proporzioni e la similitudine fanno necessariamente parte della geometria metrica elementare, il metodo del sig. Schur fondato su di esse, attualmente si presenta forse come il migliore. Credo pertanto di far cosa grata ai lettori del *Periodico* indicando brevemente, col permesso dell'autore, quella parte del metodo che mi sembra un necessario complemento alla nota citata.

Premesse le note proposizioni: *due poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro* e *due parallelogrammi di egual base e di eguale altezza sono equivalenti,* egli dimostra il teorema:

Se i lati di un rettangolo sono gli estremi e i lati di un altro rettangolo sono i medii di una stessa proporzione, i due rettangoli sono equivalenti.

Sieno $ABCD$, $EFGH$ i due rettangoli (disuguali); si potrà supporre $EF > AB$ e collocare il secondo in modo che E coincida

(*) *Periodico di mat.*, Vol. IX, pag. 21.
(**) Id. Vol. VIII, pag. 153.
(***) Il sig. Schur non consente in questo modo di vedere.

con A ed F cada nel lato BC. Per la similitudine dei triangoli ABF, AHD, l'angolo AHD sarà allora retto e perciò il lato HG passerà per D. Se I è il punto comune alle rette BC, HG, i due rettangoli saranno equivalenti al parallelogrammo $ADIF$ e, per conseguenza, fra loro.

È poi facile dimostrare che, chiamando *area* di un triangolo il rettangolo che ha un lato eguale all'unità di lunghezza e l'altro quarto proporzionale dopo questa unità, un lato del triangolo e la metà della corrispondente altezza, il triangolo è equivalente alla propria area, e questa è indipendente dalla scelta del lato del triangolo.

Due triangoli di area eguale risultano così equivalenti, ma non si può per ora stabilire che due triangoli equivalenti abbiano eguale area; questa proprietà sarà dimostrata più tardi per il caso generale dei poligoni, sull'appoggio del teorema fondamentale:

La somma algebrica delle aree dei triangoli, che hanno per basi i lati di un poligono e per vertice comune un punto del suo piano è indipendente dalla scelta di questo punto.

S'indicherà l'area di un triangolo ABC in generale con (ABC) e, considerando il caso più semplice, quando cioè il poligono sia un triangolo ABC, si prenderà prima il punto O sul lato BC; s'avrà allora (Eucl. lib. II, prop. 1ª): $(OAB)+(OCA)=(ABC)$. Se invece il punto O è interno al triangolo, si prolunghi AO sino ad incontrare BC in D e si otterrà similmente: $(OAB)+(OBD)=(ABD)$, $(ODC)+(OCA)=(ADC)$, $(OAB)+(OBC)+(OCA)=(OAB)+(OBD)+(ODC)+(OCA)=(ABD)+(ADC)=(ABC)$.

Se il punto esce dal triangolo attraversando uno o due lati, basterà cambiare il segno dei triangoli corrispondenti a questi; e, siccome con tale movimento s'inverte anche il senso del perimetro degli stessi triangoli, si adotterà la convenzione di Möbius, che cioè i triangoli parziali sieno positivi o negativi secondo che i loro perimetri sono dello stesso senso o di senso opposto a quello di ABC.

La dimostrazione del teorema generale può leggersi negli Elementi del Baltzer (Plan. § 9, 9), sostituendo ai triangoli le loro aree.

Questo teorema permette di stabilire la definizione: Si dirà *area* di un poligono la somma delle aree dei triangoli che hanno per basi i suoi lati e per vertice comune un punto qualunque del suo piano.

Nella nota dell'autore è poi chiaramente indicato come si possa dimostrare che, dividendo in qualsiasi modo un poligono mediante rette, la somma delle aree delle parti sia sempre eguale all'area del poligono, onde discende ancora che due poligoni equivalenti hanno area eguale.

Sassari, 2 maggio 1894.

G. Biasi.

DI ALCUNE APPLICAZIONI GEOMETRICHE
NELLO STUDIO ELEMENTARE DELLA MECCANICA.

Nota del Dott. Riccardo Malagoli.

(*Continuazione e fine: V. pag. 48*).

5. — Per avere una dimostrazione completa della proposizione assunta nel caso delle quattro componenti p, q, r, s, sarà sufficiente dimostrare che composte due forze qualunque fra le date, questa risultante composta in modo arbitrario colle restanti, si ha sempre $p+q+r+s$ applicata al punto O'.

Ora fra le forze date due possono scegliersi nei seguenti modi:

$$p+q, \quad p+r, \quad q+r, \quad p+s, \quad q+s, \quad r+s.$$

Al n° 4 si è visto che prendendo $p+q$ colle restanti, r, s, in modo qualunque; così pure $p+r$ colle q, s, in modo qualunque, o $q+r$ con p, s, in ordine qualsivoglia sempre si perviene alla $p+q+r+s$ applicata in O'.

Se si considera poi il triangolo ADC, sui cui lati sono dati tre punti A'_1, B', C'' tali che i segmenti da essi determinati sui lati medesimi verificano il teorema I, sarà facile concludere che si ripeteranno le stesse conclusioni relative al triangolo ABC salvo a scambiare mutuamente B con D e q con s. Cosicchè si avrebbe come ultimo risultato che componendo $p+s$ colle restanti q, r, in ordine qualunque, come pure $r+s$ colle altre p, q in modo qualsivoglia, sempre si perviene a $p+q+r+s$ applicata in O'.

E finalmente se si considera il triangolo BCD sui cui lati sono dati tre punti A', B'', C' che li dividono in segmenti tali che regge il teorema I, si arriverà a concludere che anche la forza $q + s$ composta in qualunque modo con p, r dà sempre la solita risultante.

6. — Da ciò segue ancora che prese le quattro forze a tre a tre nei quattro modi possibili e composte fra loro, la retta che unisce ciascuno dei punti di applicazione di queste risultanti, col punto di applicazione delle restanti forze, passa per O'. Così ad esempio il punto comune alle rette DC', AB'' congiunto con C dà una retta passante per O'. E lo stesso ripetasi per gli altri triangoli possibili coi quattro punti A, B, C, D.

7. — Avendosi un'altra forza parallela alle date e di intensità t, prendendo le forze a tre a tre in tutti i modi possibili si riuscirà con delle considerazioni analoghe a quelle dei numeri precedenti, a vedere come il punto d'applicazione della risultante è indipendente dall'ordine seguito nella composizione.

8. — I risultati precedenti relativi alla composizione di quattro forze, ci permettono di dedurre alcune proprietà generali del quadrangolo che risultano dalla eliminazione dei coefficienti p, q, r, s, analoghe a quelle stabilite negli enunciati I e II.

Essendo dato un quadrangolo piano o gobbo $ABCD$, ai cui vertici si attribuiscono dei coefficienti p, q, r, s ordinatamente, tutti positivi ma arbitrarii, e sui cui lati $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, si prendono altrettanti punti A', B', C', D', E', F', tali che:

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{q}{p}; \qquad \frac{BB'}{B'C} = \frac{r}{q}; \qquad \frac{CC'}{C'D} = \frac{s}{r};$$
$$\frac{DD'}{D'A} = \frac{p}{s}; \qquad \frac{AE'}{E'C} = \frac{r}{p}; \qquad \frac{BF'}{F'D} = \frac{s}{q};$$

le rette $A'C'$, $B'D'$, $E'F'$ si tagliano in un punto O. E si hanno le relazioni:

$$\frac{A'O}{OC'} = \frac{r+s}{p+q}; \qquad \frac{B'O}{OD'} = \frac{p+s}{q+r}; \qquad \frac{E'O}{OF'} = \frac{q+s}{p+r}.$$

Inoltre nei quattro triangoli possibili ABC, ABD, ACD, BCD, le rette che uniscono i vertici ai punti segnati sui lati opposti si tagliano per ogni triangolo, nei punti che indicheremo con D_1, C_1, B_1, A_1, rispettivamente. Risulta altresì dimostrato che le rette DD_1, CC_1, BB_1, AA_1, si tagliano pure in O: e si hanno le relazioni:

$$\frac{OD}{OD_1} = \frac{p+q+r}{s}\,; \qquad \frac{OC}{OC_1} = \frac{p+q+s}{r}\,;$$
$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{p+r+s}{q}\,; \qquad \frac{OA}{OA_1} = \frac{q+r+s}{p}\,.$$

Ciò premesso pongasi come dianzi: $AA' = a_1$, $BB' = b_1$, $CC' = c_1$, $DD' = d_1$, $AE' = e_1$, $BF' = f_1$. Allora le prime sei formole possono scriversi:

$$a_1 p + (a_1 - a) q = 0,\ b_1 q + (b_1 - b) r = 0,\ c_1 r + (c_1 - c) s = 0,$$
$$d_1 s + (d_1 - d) p = 0,\ e_1 p + (e_1 - e) r = 0,\ f_1 q + (f_1 - f) s = 0.$$

Queste equazioni servivano per determinare le a_1, b_1, c_1, ... date arbitrariamente le p, q, r, s. Si vuole ora prendere come variabili le a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, cosicchè le p, q, r, s resteranno determinate risolvendo le equazioni precedenti rapporto ad esse.

Con facili calcoli si trova:

$$p = \frac{(a-a_1)(b-b_1)(c-c_1)}{a_1 b_1 c_1} s,\ q = \frac{(b-b_1)(c-c_1)}{b_1 c_1} s,\ r = \frac{c-c_1}{c_1} s,$$

mentre per la s risultano le seguenti:

$$\left[\frac{(a-a_1)(b-b_1)(c-c_1)(d_1-d)}{a_1 b_1 c_1} + d_1\right] s = 0,$$
$$\left[e_1 - e + e_1 \frac{(a-a_1)(b-b_1)}{a_1 b_1}\right] s = 0,\ \left[f_1 - f + f_1 \frac{(b-b_1)(c-c_1)}{b_1 c_1}\right] s = 0.$$

Dalle quali si deduce: 1° che una delle quantità p, q, r, s rimane arbitraria, come potevasi prevedere dacchè le formole nostre contengono solamente dei rapporti formati con queste quantità; 2° che il sistema sarebbe incompatibile ove non si verificasse:

$$(a-a_1)(b-b_1)(c-c_1)(d-d_1) = a_1 b_1 c_1 d_1,$$
$$(e-e_1) b_1 a_1 = e_1 (b-b_1)(a-a_1),\ (f-f_1) b_1 c_1 = f_1 (b-b_1)(c-c_1).$$

Dalle quali, ponendo: $a - a_1 = a_2$; $b - b_1 = b_2$; $c - c_1 = c_2$; $d - d_1 = d_2$; $e - e_1 = e_2$; $f - f_1 = f_2$, facilmente si ricavano le relazioni:

$$a_1 b_1 e_2 = a_2 b_2 e_1,\quad b_1 c_1 f_2 = b_2 c_2 f_1,\quad c_1 d_1 e_1 = c_2 d_2 e_2,\quad a_1 d_1 f_1 = a_2 d_2 f_2$$

che rappresentano su ciascuno dei quattro triangoli possibili nel quadrilatero la condizione necessaria e sufficiente perchè (teorema I) le rette che uniscono i vertici coi punti segnati sui lati opposti abbiano un punto comune.

Queste tre relazioni indipendenti fra le sei quantità a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, per un dato quadrilatero completo, ci fanno conoscere che tre di esse e tre sole sono arbitrarie cosicchè fissati ad arbitrio tre punti su tre lati del quadrangolo non formanti uno dei triangoli elementari, resta possibile ed unica la determinazione dei sei punti A', B', C', D', E', F' sui lati e degli altri A_1, B_1, C_1, D_1, nell'interno del quadrilatero.

9. — Anche i rapporti dei segmenti che O determina sulle rette che lo attraversano, si possono rendere indipendenti dalle quantità p, q, r, s.

Intanto per il primo rapporto $\frac{A'O}{OC'} = \frac{r+s}{p+q}$, dalle

$$a_1 p + (a_1 - a) q = 0 \,, \quad c_1 r + (c_1 - c) s = 0 \,,$$

si ha $\frac{r+s}{p+q} = \frac{a_1 c s}{a c_1 q}$ e dalla $f_1 q + (f_1 - f) s = 0$, si ottiene: $\frac{r+s}{p+q} = \frac{a_1 c f_1}{a c_1 f_2}$. Dunque $\frac{A'O}{OC'} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a_1 f_1}{f_2 c_1}$, od anche, rammentando che: $b_1 c_1 f_2 = b_2 c_2 f_1$ e $a_1 b_1 e_2 = a_2 b_2 e_1$

$$[1] \qquad \frac{A'O}{OC'} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a_2 e_1}{c_2 e_2} \,.$$

Analogamente si trova:

$$[2] \qquad \frac{B'O}{OD'} = \frac{p+s}{q+r} = \frac{d}{b} \cdot \frac{b_1 e_2}{e_1 d_1} = \frac{d}{b} \cdot \frac{b_2 f_1}{f_2 d_2} \,,$$

$$[3] \qquad \frac{E'O}{OF'} = \frac{q+s}{p+r} = \frac{f}{e} \cdot \frac{e_1 c_1}{c_2 f_1} = \frac{f}{e} \cdot \frac{e_2 a_1}{a_2 f_2} \,.$$

10. — Prendiamo ora uno degli altri rapporti, per esempio: $\frac{OD}{OD_1} = \frac{p+q+r}{s}$. Dalle:

$$a_1 p + (a_1 - a) q = 0 \,, \quad b_1 q + (b_1 - b) r = 0 \,,$$

si ricava:

$$\frac{p+q}{q} = \frac{a}{a_1} \,; \quad \frac{r}{q} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{ossia} \quad \frac{p+q+r}{q} = \frac{a}{a_1} + \frac{b_1}{b_2} \,,$$

e poichè $\frac{q}{s} = \frac{f_2}{f_1}$, risulta $\frac{p+q+r}{s} = \frac{f_2}{f_1}\left(\frac{a}{a_1} + \frac{b_1}{b_2}\right)$. Quindi:

$$[4] \qquad \frac{OD}{OD_1} = \frac{f_2}{f_1}\left(\frac{a}{a_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) = \frac{f_2}{f_1}\left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{b_1}{b_2}\right).$$

Interpretando ora questo risultato sulla figura si scorge facilmente che avremo:

$$[5] \qquad \frac{OC}{OC_1} = \frac{p+q+s}{r} = \frac{e_2}{e_1}\left(1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{d_2}{d_1}\right),$$

$$[6] \qquad \frac{OB}{OB_1} = \frac{p+r+s}{q} = \frac{f_1}{f_2}\left(1 + \frac{d_1}{d_2} + \frac{c_2}{c_1}\right),$$

$$[7] \qquad \frac{OA}{OA_1} = \frac{q+r+s}{p} = \frac{e_1}{e_2}\left(1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{c_1}{c_2}\right).$$

11. — Potremo così concludere che « Presi tre punti ad arbitrio « su tre lati (non formanti un triangolo elementare) di un quadran- « golo piano o gobbo A, B, C, D, si possono determinare in modo « unico altri tre punti ciascuno sui restanti lati colla condizione che « i segmenti risultanti (secondo le notazioni assunte) verifichino le « relazioni:

$$a_1b_1e_2 = a_2b_2e_1\,; \quad b_1c_1f_2 = b_2c_2f_1\,; \quad c_1d_1e_1 = c_2d_2e_2\,; \quad a_1d_1f_1 = a_2d_2f_2\,.$$

« Determinati poi nei quattro triangoli elementari i punti A_1, B_1, « C_1, D_1 ove si incrociano le rette che dai vertici proiettano i punti « così segnati sui lati, si ha che le sette rette AA_1, BB_1, CC_1, « DD_1, $A'C'$, $B'D'$, $E'F'$ passano per un medesimo punto O, il quale « determina sopra di esse dei segmenti i cui rapporti sono determi- « nati dalle formole [1], [2], [3], [4], [5], [6] e [7] ».

12. — Sarà utile qualche osservazione:

I. — Se le forze date non fossero tutte di egual direzione, che è quanto dire se p, q, r, s, non fossero tutti positivi, la composizione delle forze porterebbe a dei punti A', B'.... fuori dei lati, ma sulle loro rette. Si avrebbe così modo di generalizzare il risultato ottenuto estendendolo al caso in cui qualcuno dei tre punti arbitrarii non fosse interno al quadrangolo.

II. — Ove i tre punti arbitrarii si scelgano sulla metà dei corrispondenti lati, sarà:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{f_1}{f_2} = 1\,, \qquad p = q = r = s,$$

e i punti A_1, B_1, C_1, D_1 sono i punti d'incontro delle mediane dei triangoli elementari. Risulterà quindi:

« Le rette che uniscono i punti di mezzo delle tre coppie di lati « opposti in un quadrangolo piano oppur no, si intersecano in un « punto O, che divide ciascuna in parti uguali ».

E inoltre si avrà:

$$\frac{OD}{OD_1} = 3, \quad \frac{OC}{OC_1} = 3, \quad \frac{OB}{OB_1} = 3, \quad \frac{OA}{OA_1} = 3,$$

ciò che è ben naturale se il quadrangolo non è piano, giacchè O diventa il centro di massa del tetraedro.

Modena, dicembre 1893.

SOPRA UNA FORMOLA PER LA MISURA DEI VOLUMI

(Continuazione e fine, V. *pag. 15 e 52).*

3.° *Tronco di cono circolare retto a basi parallele* di raggi R_0, R_1, e d'altezza h.

Suppongasi $R_0 > R_1$ e s'indichi con R_x il raggio d'una sezione parallela alle basi ad una distanza x dalla base inferiore. È chiaro che si avrà:

$$h : R_0 - R_1 = x : R_0 - R_x, \quad \text{donde} \quad R_x = R_0 - \frac{R_0 - R_1}{h} x,$$

e perciò

$$B_x = \pi R_x^2 = \pi R_0^2 - \frac{2\pi R_0 (R_0 - R_1)}{h} x + \frac{\pi (R_0 - R_1)^2}{h^2} x^2,$$

$$M = \frac{\pi (R_0 + R_1)^2}{4};$$

ponendo poi mente che tutte le ipotesi per l'applicabilità della formula [1] sono evidentemente soddisfatte, il volume del solido di cui si tratta sarà dato da

$$V = \frac{h}{6}(B_0 + B_1 + 4M) = \frac{\pi h}{6}(R_0^2 + R_1^2 + (R_0 + R_1)^2) =$$
$$\frac{\pi h}{3}(R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1).$$

4.° *Segmento sferico a due basi* parallele di raggi r_0, r_1 e d'altezza h nell'ipotesi che le due basi giacciano dalla stessa parte del centro della sfera e sia $r_0 > r_1$.

S'immagini una sezione del segmento, di raggio r_x, alla distanza x dalla base inferiore r_0 e s'indichi con d la distanza di questa base dal centro della sfera di raggio R a cui appartiene il segmento. Si avrà intanto

$$R^2 = r_1^2 + (h+d)^2 = r_1^2 + h^2 + 2hd + d^2$$

e poichè $d^2 = R^2 - r_0^2$

$$R^2 = r_1^2 + h^2 + 2hd + R^2 - r_0^2, \quad \text{da cui} \quad 2d = \frac{r_0^2 - r_1^2 - h^2}{h}.$$

Risulta così

$$r_x^2 = R^2 - (x+d)^2 = R^2 - d^2 - 2dx - x^2 = R^2 - (R^2 - r_0^2) -$$
$$2dx - x^2 = r_0^2 - 2dx - x^2 = r_0^2 - \frac{r_0^2 - r_1^2 - h^2}{h} x - x^2,$$

cosicchè l'area πr_x^2 della sezione di cui si tratta è una funzione di 2° grado della x. In quanto alle ipotesi del n.° 1 esse, come nell'applicazione precedente, sono evidentemente soddisfatte e quindi potrà applicarsi la formola [1]. Per $x = h:2$ risulta

$$4M = 4\pi r_{h:2}^2 = \pi(2r_0^2 + 2r_1^2 + h^2)$$

e così il volume del segmento sferico a due basi verrà dato da

$$V = \frac{h}{6}(B_0 + B_1 + 4M) = \frac{h}{6}(\pi r_0^2 + \pi r_1^2 + 2\pi r_0^2 + 2\pi r_1^2 + \pi h^2)$$
$$= \frac{\pi h}{6}[3(r_0^2 + r_1^2) + h^2] \quad (^*).$$

(*) La limitazione posta più sopra che le due basi del segmento giacciano dalla stessa parte del centro della sfera si può togliere senza invocare nuovi principî, così da poter concludere che l'ultima formola ottenuta è generale.

Un metodo da seguire consiste nel dedurre dalla formola trovata il volume dell'emisfero, supponendo $r_0 = R$ ed $r_1 = 0$, quindi della sfera. Far vedere poi come sottraendo dal volume della sfera quello di un segmento sferico ad una base, minore dell'emisfero, parimenti deducibile dalla formola trovata col porre $r_1 = 0$, si ottenga un resto il quale assume la stessa forma dell'espressione che dà il volume del segmento minore dell'emisfero. Dopo ciò il volume di un qualunque segmento sferico di basi giacenti da bande opposte del centro della relativa sfera può venir determinato per sottrazione nel solito modo. — (Cfr. in proposito anche la q. 210).

NOTE.

a) Qualora la sezione del solido, con un piano parallelo alle basi, fosse una funzione razionale intera di grado m della distanza x del piano segante dalla base inferiore e sussistessero le due ipotesi poste da principio, si può ancora determinare, in modo elementare, il volume V del solido (*).

Posto infatti

[4] $$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

immaginati condotti gli $n - 1$ piani paralleli alle basi che dividono l'altezza h in n parti eguali, le aree delle singole sezioni, comprese le basi, saranno date da

$$f\left(\frac{0 \cdot h}{n}\right) = a_m$$

$$f\left(\frac{1 \cdot h}{n}\right) = a_0 \frac{1^m \cdot h^m}{n^m} + a_1 \frac{1^{m-1} \cdot h^{m-1}}{n^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{1 \cdot h}{n} + a_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f\left(\frac{[n-1] \cdot h}{n}\right) = a_0 \frac{[n-1]^m \cdot h^m}{n^m} + a_1 \frac{[n-1]^{m-1} \cdot h^{m-1}}{n^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{[n-1] \cdot h}{n} + a_m$$

$$f\left(\frac{n \cdot h}{n}\right) = a_0 \frac{n^m \cdot h^m}{n^m} + a_1 \frac{n^{m-1} \cdot h^{m-1}}{n^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{n \cdot h}{n} + a_m,$$

talchè i volumi dei prismi o cilindri aventi per base la base inferiore, le singole sezioni e la base superiore e per altezza la distanza fra due sezioni consecutive, si otterranno dai precedenti valori moltiplicando per $\frac{h}{n}$. Dopo ciò con un procedimento interamente analogo a quello dei n. 2 e 4, si giunge alla formola

$$\begin{aligned} V = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i \cdot h}{n}\right) \cdot \frac{h}{n} &= a_0 h^{m+1} \lim \frac{1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m}{n^{m+1}} \\ &+ a_1 h^m \frac{1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + (n-1)^{m-1}}{n^m} + \ldots\ldots \\ &+ a_{m-1} h^2 \frac{1 + 2 + \ldots + (n-1)}{n^2} + n\, a_m \frac{h}{n} \\ &= a_0 \frac{h^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{h^m}{m} + \ldots + a_{m-1} \frac{h^2}{2} + a_m h. \end{aligned}$$

b) Valendosi dei principî del *Calcolo integrale* la formola precedente si ricava immediatamente, osservando che nell'ipotesi di $f(x)$ della forma [4], si ha

$$V = \int_0^h f(x)\, dx = \left[a_0 \frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{x^m}{m} + \ldots + a_{m-1} \frac{x^2}{2} + a_m x \right]_0^h,$$

ossia

[5] $$V = a_0 \frac{h^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{h^m}{m} + \ldots + a_{m-1} \frac{h^2}{2} + a_m h.$$

(*) V. anche BALTZER. *Geo.* § 9, 9.

c) Alla domanda posta dal Sig. DE SAINT-GERMAIN, nella nota cit., se la formola

$$[1] \qquad V = \frac{h}{6}(B_0 + B_1 + 4\,M),$$

esprimente il volume d'un solido limitato da due basi in piani paralleli e da una superficie poliedrica o curva, tale che ogni sezione praticata in esso con un piano parallelo alle basi sia una funzione $f(x)$ di 2° o 3° grado della sua distanza x da una delle basi, sia applicabile anche al caso in cui questa funzione è razionale intera rispetto ad x di grado superiore al 3°, si può rispondere negativamente anche nel modo elementarissimo seguente.

Suppongasi $f(x)$ della forma [4], dove alcune delle a, ad eccezione però di a_0, possono esser nulle. Si avrà in ogni caso

$$B_0 = a_m\ , \qquad B_1 = a_0\,h^m + a_1\,h^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\,h + a_m$$

$$M = f\left(\frac{h}{2}\right) = a_0\,\frac{h^m}{2^m} + a_1\,\frac{h^{m-1}}{2^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}\,\frac{h}{2} + a_m,$$

mentre V sarà espresso dalla [5]. Fermandoci quindi ai termini di più alto grado che appariscono nella [1], dopo la sostituzione dei valori corrispondenti alle quantità che figurano nei due membri, dovrà esser soddisfatta la relazione

$$a_0\,\frac{h^{m+1}}{m+1} = \frac{h}{6}\left(a_0\,h^m + 4\,a_0\,\frac{h^m}{2^m}\right),$$

ossia

$$\frac{1}{m+1} = \frac{2^m + 4}{6.\,2^m}$$

o finalmente ponendo y in luogo di m e riducendo a forma intera

$$(5 - y)\,2^{y-2} = y + 1.$$

Ora per mezzo della sostituzione diretta si verifica subito che quest' equazione è soddisfatta pei valori 1, 2, 3 dell'incognita, mentre non lo è pei valori 4 e 5 di essa e non potrebbe esserlo per valori interi positivi di y maggiori di 5, poichè per tali valori il primo membro diviene negativo, mentre il secondo assume valore positivo.

E così resta provato senz' altro che la formola [1] non è valida che nei casi considerati al n. 2 e 4.

d) Le due ipotesi poste in principio di questa trattazione possono togliersi, senza venir meno al rigore e valendosi soltanto del concetto di limite, in base al seguente principio. « Se un solido terminato da una superficie qualsivoglia vien diviso da piani paralleli, arbitrari di giacitura e di numero, in strati di uguale altezza e nei singoli strati si costruiscono altrettanti prismi, formati dalle rette parallele che proiettano ciascuna sezione del solido sul piano della sezione successiva, la differenza fra la somma di questi ed il solido dato si annulla quando il numero dei piani paralleli diviene infinito » la cui dimostrazione può leggersi negli *Elementi di Matematica* del BALTZER, *Geo*: § 8,7. Salvo che una tale dimostrazione, e molto probabilmente quella qualsiasi che potesse sostituirsi ad essa, non è di tale natura da potersi introdurre nei *primi* elementi di geometria in quanto richiede la considerazione dei cilindri a base curvilinea qualunque e la trasformazione loro in prismi equivalenti.

e) Si può determinare molto facilmente, in base alle nozioni sulle sezioni coniche, valendosi della [1], il volume di un *segmento di ellissoide*, d'*iperboloide ad una e due falde* e di *paraboloide ellittica*, conservando le ipotesi del n. 1, la cui sussistenza nei singoli casi è facile a verificarsi, le sezioni fatte in questi solidi, con un piano parallelo alle basi del segmento, risultando funzioni di 2° grado della distanza del piano segante dalle basi (*).

f) Le ipotesi del n. 1 e le dimostrazioni ai n. 2, 4 sono in accordo colla teoria dell' equivalenza come è svolta in diversi pregevoli trattati che corrono per le nostre scuole secondarie. È facile invero riconoscere che chiamando *serie di prismi o cilindri esterni* e *di prismi o cilindri interni* le due serie di prismi o cilindri aventi per comune altezza $\frac{h}{n}$ e per basi la base inferiore e le singole sezioni dalla prima all' $(n-1)^{\text{esima}}$, e, le successive sezioni dalla prima all' $(n-1)^{\text{esima}}$ e la base superiore, tali prismi o cilindri formano due classi di variabili convergenti verso il solido, talchè valgono a definire il medesimo rispetto alla grandezza.

È dunque possibile, adottando i più recenti criterii sulla teoria dell'equivalenza, introdurre lo studio della formola [1] subito dopo la determinazione del volume del prisma e del cilindro in modo da potersene servire per ricavare il volume di tutti gli altri solidi considerati nei primi elementi della geometria, ossia piramide e tronco di piramide, cono e tronco di cono, segmento di sfera e sfera, non che quello di altri corpi men semplici, come è stato fatto al n. 6, facendo discendere siffatta deduzione non solo da uguale procedimento, ma ancora dalla stessa formola.

g) Quando poi si voglia adottare come definizione dell' equivalenza, come tuttora vien fatto in più d'una scuola, quella usitata da tutti sino a qualche anno fa, NULLA vieta di poter estendere anche ad un solido limitato da due basi in piani paralleli e da una superficie curva qualsivoglia, la dimostrazione del n. 3 per la validità della [1] nel caso che l'area d' ogni sezione parallela alle basi sia una funzione di 2° grado della distanza da queste basi. Soltanto allora è necessario determinare prima il volume della piramide, contrariamente a quanto avviene con la dimostrazione del n. 2. Egli è certo però che in questo caso si raggiunge una grande semplicità di trattazione, tanto più notabile in quanto i segmenti dei solidi più comuni, limitati da piani paralleli, danno come espressione dell'area $f(x)$ di ogni sezione parallela alle basi una funzione di 2° grado (**) della x (***).

A. LUGLI.

(*) Credo tuttavia inutile venire a questa determinazione che ogni insegnante può fare da se, mi basta averla accennata per mostrare quanto sia opportuno introdurre lo studio della [1] specialmente in quelle scuole che hanno indirizzo industriale.

(**) Il *Segmento di paraboloide iperbolica* porge esempio di un solido in cui l'area $f(x)$ di ogni sezione parallela alle basi del segmento opportunamente ricavato, è una funzione di 3° grado della x (V. BERTOLASI (F): *Sull' applicabilità delle formole di Wittstein e Kinkelin al calcolo dei volumi*; pag. 16).

(***) Le osservazioni esplicate in questa nota e nella precedente valgano a dar ragione della limitazione posta al n. 2 che la superficie laterale del solido considerato fosse poliedrica.

ERRATA CORRIGE: a p. 17, linea 6 si legga

$$6\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right) \text{ e } V=\frac{1}{6}(B_0+B_1+4\,M) \text{ in luogo di } b\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)$$

e $V=\frac{1}{b}(B_0+B_1+4\,M)$, a p. 19, l. 9 in luogo di: *Il volume di un solido...*, si legga: *Un solido...*

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ

IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA

alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione, V. pag. 27 e 55*).

GORIZIA: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. I. $x^2+x^2y^2+y^2=49$.
II. $x+xy+y=11$.

2. Dati il perimetro u ed i tre angoli α, β, γ di un triangolo, calcolare l'area del cerchio circoscritto. $u=24$ dm., $\alpha=45°\,23'\,44''$, $\beta=30°\,45'\,32''$.

3. In una sfera di volume v è inscritto un cono retto, che ha l'angolo al vertice α. Qual'è il volume e la superficie laterale di questo cono? $v=33,45$, $\alpha=40°\,35'46''$.

4. Si domanda l'equazione di quella retta che passa per il punto (8,3 cm.) e forma cogli assi un triangolo di 50 cm.^{2} di area.

GRAZ: *Scuola reale sup. prov.* — 1. Identico al 1. Sc. r. Budweis

2. Calcolare e costruire un triangolo isoscele dato il perimetro u e l'altezza h.

3. Ad una sfera di superficie s è inscritto un cono retto che ha un angolo al vertice $\alpha=34°\,18'\,36''$. Calcolare la superficie laterale e il volume del cono se $s=50$.

4. La distanza fra Parigi e Pietroburgo è di 2168 chilom.; la latitudine geografica di Parigi è $48°\,50'\,11{,}2''$ e quella di Pietroburgo $59°\,56'\,29{,}7''$. Che differenza di tempo segnano gli orologi dei due luoghi?

IGLAU: *Scuola reale sup. provinc.* — 1. I due raggi x ed y di un emisfero cavo sono eguali ai due raggi di un tronco di cono di altezza $h=9$. Se si immerge il primo corpo in un vaso cilindrico di raggio $\rho=10$ nel quale vi sia dell'acqua sino ad una certa altezza, essa si eleva di $u=1{,}26$, ed immergendovi il secondo corpo il livello dell'acqua si eleva di $v=1{,}89$. Quali sono i valori di x ed y?

2. Una rendita di 200 f. che scade dopo 6 anni e poi s'incassa per 5 volte successive, si deve convertire in un'altra che duri 10 anni cominciando di qui ad un anno (5 %). Qual'è il valore di quest'ultima?

3. Risolvere un triangolo sferico isoscele nel quale $a=b=75°$ e l'altezza su c è $h=56°$.

INNSBRUCK: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Per lo scavo di un pozzo artesiano di 500 m. di profondità, pagansi pel primo metro 3 f. 24 s., per ogni metro successivo 5 s. di più. Quanto si paga per l'ultimo metro, e quanto per tutto il pozzo?

2. La somma di due lati di un triangolo è $a + b = 19$, la somma dei quadrati $a^2 + b^2 = 185$, e l'angolo da essi compreso $\gamma = 67^\circ 34'$. Quali sono gli altri elementi ed il raggio del cerchio inscritto?

3. Dal punto $x_1 = 0$, $y_1 = 5$ si deve condurre nel primo quadrante una tangente all'ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$. Si trovino le coordinate del punto di contatto, le equazioni della tangente e della normale, e l'angolo che la tangente forma col raggio vettore.

Jägerndorf: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Quali sono i due numeri la cui somma è 26, se la somma delle loro terze potenze è 5642?

2. Risolvere un triangolo rettangolo che ha il perimetro $u = 48$ cm. ed un angolo acuto $\alpha = 54^\circ 18'$.

3. La sezione che passa per l'asse di un cono circolare retto ha l'area $s = 856$ e l'angolo al vertice $\alpha = 28^\circ 56' 14''$; si calcoli il volume e la superficie del cono.

4. Che linee rappresentano le equazioni $y^2 = 6x$ e $y = -3x + 12$, e sotto quale angolo si tagliano?

Klagenfurt: *i. r. Scuola reale superiore*:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 77, \quad y^2 - xz = 1, \quad 5x - 2z = 8.$

2. La sfera di raggio $r = 5{,}25$ m. ha sulla sua superficie un triangolo sferico coi lati $a = 104^\circ 16' 20''$, $b = 97^\circ 34' 10''$, $c = 79^\circ 45' 36''$. Qual'è il volume e la superficie della piramide sferica che corrisponde al triangolo sferico?

3. È data l'ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$ e la sottotangente $= \frac{9}{4}$. Si domanda l'equazione della tangente e le coordinate del punto di contatto.

Kremsier: *Scuola reale sup. provinc.* — 1. Determinare tutte le radici dell'equazione $x^7 - 64 = 0$, e farne la prova mediante moltiplicazione dei fattori radicali.

2. Un comune si obbliga di estinguere un capitale di 8372,30 f. in 15 anni con rate semestrali eguali. Quanto importa una di queste rate se si calcola il 5 % annuo d'interesse?

3. L'equazione d'una parabola è $y^2 = 8x$ e quella d'un circolo $4x^2 + 4y^2 = 81$; qual'è l'area della parte comune alle due sezioni coniche?

4. Calcolare la durata del giorno più lungo e del giorno più breve per Kremsier ($\varphi = 49^\circ 18'$). Derivare la formola generale.

Leitmeritz: *Scuola reale sup. comunale* — 1. Decomporre la frazione $\frac{101}{110}$ in due frazioni coi denominatori 5 e 22.

2. Un capitale di 8000 f. deve venire ammortizzato con una quota annua posticipata di 801,12 f. al 4 % d'interesse, quante sono le quote?

3. Dato il volume $v = 10\,m^3$ di un settore sferico e l'angolo al centro $\alpha = 90^\circ$, calcolare il raggio della sfera.

4. Condurre all'ellisse $100y^2 + 25x^2 = 2500$ tangenti parallele alla retta $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

LUBBIANA: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Un tale pone la sua sostanza di 22000 f. ad interesse composto (4 %) ed aumenta questo capitale ancora alla fine di ogni anno di 300 f.; dopo quanto tempo avrà egli una sostanza di 30000 f.?

2. Qual'è l'angolo al centro α della sezione passante per l'asse di un settore sferico se il suo volume è $v = 5031{,}9$ cm³ ed il raggio della sfera $r = 16$ cm.?

3. Dal punto (6,0) si devono guidare tangenti al cerchio $x^2 + y^2 = 9$. Determinare le coordinate dei punti di contatto e l'angolo formato dalle tangenti.

4. A che altezza ed a quale ora si trova il sole in Lubbiana nel primo verticale nel giorno più lungo (lat. $46^\circ\, 20'\, 56''$, $\varepsilon = 23^\circ\, 28'$).

MARBURG: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Si risolva il sistema di equazioni:

$$\log \sqrt{x^n y^m} = mn + 1, \quad \frac{\log (x^{\log x})}{\log (y^{\log y})} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

2. Gli angoli α, β, γ d'un triangolo formano una progressione aritmetica, il prodotto delle loro tangenti è $= 11\sqrt{3}$. Quanto importa ognuno?

3. Trovare l'equazione d'una retta che passando per l'origine delle coordinate sega le linee date dalle equazioni $y^2 + x^2 - 8x + 12 = 0$ ed $y^2 + x^2 + 6x - 7 = 0$ così che il prodotto delle corde è $= \frac{8}{5}$. Costruzione.

NEUTITSCHEIN: *Scuola reale sup. prov.* — 1. $x^3 + y^3 = 186 - 2xy\,(x + y)$, $x + y = 6$.

2. Si ha da decomporre la frazione $\frac{493}{360}$ in tre frazioni che hanno i denominatori 8, 9, 10 ed i numeratori sommano 15 unità meno della somma dei denominatori.

3. Sulla stessa base di raggio 512 dm. stanno due coni retti; il lato di uno fa colla base l'angolo $\alpha = 78^\circ\, 47'\, 50''$ e quello dell'altro $\beta = 19^\circ\, 33'\, 10''$. Determinare volume e superficie dello spazio compreso fra le due superficie convesse.

4. Nel circolo $y^2 = 10x - x^2$ sono condotte dall'origine delle doppie coordinate o corde in numero qualunque ed ognuna è prolungata di una lunghezza uguale a sè stessa. Su quale curva stanno i punti estremi?

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Risposta all' articolo del Prof. Biasi « Sull' equivalenza dei poligoni ». — Un altro critico, il sig. Biasi, continuando la polemica iniziata dal prof. Lazzeri, censura ancora una volta le proposizioni *E* ed *F*, che ho aggiunte al primo libro degli Elementi d'Euclide. Nondimeno persisto nel difenderle, sicuro, come sono, ch'esse hanno solido fondamento e che la verità loro, anche per le nuove censure, non è menomamente pregiudicata.

Mi propongo quindi il compito di far vedere che gli errori, che il Prof. Biasi mi attribuisce non esistono; anzi, dimostrerò che non è dalla mia parte che sta l'errore, perocchè il suo articolo « Sull'equivalenza dei poligoni » contiene alcune inesattezze e qualche sbaglio.

Sulla dimostrazione della proposizione E *(se due poligoni eguali hanno una parte comune, le parti non comuni sono equivalenti)* egli osserva che oltre al difetto di andare incontro ad infinite operazioni, la dimostrazione stessa contiene anche un'inesattezza là dove affermo, che per ognuna delle suddivisioni della parte comune γ si può ripetere quello che precedentemente avveravasi per la intera parte γ: poichè « mentre la parte γ era comune ai due poligoni primitivi α e β, le nuove parti γ' e γ'' sono comuni l'una ad α e γ, l'altra a β e γ ». Ora questo non è vero: perchè γ' appartiene ancora a β e γ'' appartiene ancora ad α. È ovvio infatti il comprendere che se γ' γ'' γ''' .... sono parti di γ, e questa è comune ad α e β, anche quelle sono comuni ad α e β; talchè si può ripetere, come dico nel libro, per ognuna di esse il seguente ragionamento. Considerando per esempio γ', essa, come parte di β, dovrà avere la sua corrispondente in α, fuori o dentro la parte comune (la qual cosa resulta dal processo nel libro stesso indicato); ammettiamo che sia fuori e si chiami α'. Invece, riguardata γ' come parte di α, allora essa dovrà avere la sua corrispondente in β, fuori o dentro la parte comune; poniamo che sia dentro e si chiami γ'_1. Allora γ'_1 potrà ancora considerarsi come parte di α, che dovrà avere la sua corrispondente in β, fuori o dentro la parte comune; ammettiamo ancora che sia dentro e si denoti con γ'_2. Questa parte pure dovrà considerarsi come parte di α, che avrà la sua corrispondente in β; e questa volta supponiamo che sia fuori la parte comune, e chiamiamola β'. Allora avendosi $\alpha' = \gamma'$, $\gamma' = \gamma'_1$, $\gamma'_1 = \gamma'_2$, $\gamma'_2 = \beta'$, ... sarà evidentemente $\alpha' = \beta'$. La stessa cosa accade per γ'', γ''',... laonde si avranno, in corrispondenza di ognuna di esse, fuori della parte comune, le parti α'', β'' fra loro uguali, α''' e β''' fra loro uguali e così via. In tal modo verrà a stabilirsi una corrispondenza univoca di parti rispettivamente uguali fra le parti non comuni dei poligoni dati α e β; e sarà così provata l'equivalenza di queste medesime parti. Si ha poi la conferma che il precedente ragionamento è giusto nel fatto che, quando α si sovrappone a β, ciascuna parte dell'uno dovendo coprire la sua corrispondente nell'altro, α si sovrapporrà a γ', γ' a γ'_1, γ'_1 a γ'_2 e infine γ'_2 a β'.

In tutto ciò non havvi dunque nulla d'inesatto, l'inesattezza sta invece nelle parole del Sig. Biasi sopra riferite: prima, perchè egli non considera che due sole parti γ' e γ'' in cui può essere divisa la parte comune γ, mentre il minimo numero di tali parti è tre. E poi perchè, affermando che γ' è comune ad α e γ, e l'altra γ'' è comune ad α e β, fa credere ch'egli ritenga γ' non più appartenente a β, e γ'' non più appartenente ad α.

Quanto al numero delle operazioni, dico che non può essere mai infinito. E ciò deduco in due modi: o determinando direttamente tal numero, o anche dalla seguente semplice considerazione. Quando il numero delle operazioni finisce, l'ultima delle particelle in cui è stata divisa la parte comune γ, si disegna,