

Appendice al Cap. III – La Teoria della divisibilità nell'anello degli interi relativi.

Su altri criteri di divisibilità

Nota di Bruno Bizzarri, Franco Eugeni e Daniela Tondini

Riassunto. Si presentano diversi criteri di divisibilità ottenuti per via diversa ed elementare rispetto alla teoria classica delle congruenze.

1. - Su tutti i testi scolastici di Scuola Media vengono riportati i criteri di divisibilità per i numeri 2,3,4,5,6,8,9,10,11! Si nota subito l'omissione del criterio di divisibilità per 7 e per i successivi valori 12,13, etc.

Esiste allora un criterio di divisibilità per 7? La risposta è sì, ma i criteri conosciuti per il 7, ed anche per altri numeri come il 12 e il 13, sono in generale difficili, sia da applicare che da ricordare.

a) Il più noto ed antico criterio consiste nel prendere un numero in rappresentazione decimale, scriverlo in ordine inverso come vettore-cifre e moltiplicarlo scalarmente, cioè facendo la somma dei prodotti cifra per cifra, per i numeri della sequenza 1,3,2,6,4,5 accorciata o ripetuta a seconda della lunghezza del vettore dato.

Esempio 1 : 219135 è divisibile per 7?

Considero il numero cifra per cifra scritto al rovescio (5,3,1,9,1,2) e lo moltiplico per (1,3,2,6,4,5) ottenendo $5 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 2 + 9 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 5 = 84 = 70 + 14 = 7 \times (10 + 2)$!

Esempio 2 : 2191 è divisibile per 7?

Considero il numero cifra per cifra scritto al rovescio (1,9,1,2) e lo moltiplico per (1,3,2,6,) ottenendo $1 \times 2 + 9 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 5 = 70 = 7 \times 10$!

Esempio 3 : 1753087 è divisibile per 7?

Considero il numero cifra per cifra scritto al rovescio (7,8,0, 3, 5,7,1) e lo moltiplico per (1,3,2,6,4,5,1) ottenendo $7 \times 1 + 8 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 6 + 5 \times 4 + 7 \times 5 + 1 \times 1 = 105 = 15 \times 7$!
Esempio 2 : 2191 è divisibile per 7?

b) Si può usare, sempre rovesciando il numero, la sequenza 1,3,2, -1, -3, -2 che è più riduttiva.

Esempio. Il numero 219135 è divisibile per 7 se e solo se lo è $(5,3,1,9,1,2) \times (1,3,2, -1, -3, -2) = 5+9+2-9-3-4 = 0$ divisibile per 7! Ancora il numero 2191 è divisibile per 7 se e solo se lo è $(1,9,1,2) \times (1,3,2, -1) = 1 + 27 + 2 - 2 = 28 = 4 \times 7$! Ancora il numero 1753087 è divisibile per 7 se e solo se lo è $(7,8,0, 3, 5,7,1) \times (1,3,2, -1, -3, -2, 1) = 0$ divisibile per 7!

c) Si prende l'ultima cifra, la si raddoppia, la si sottrae dal numero originario e così si va avanti :
Esempio. 2191 è divisibile per 7 se e solo se lo è $219 - 2 \times 1 = 217$, questi è divisibile per 7 se e solo se lo è $21 - 2 \times 7 = 7$ OK!

Questo criterio venne attribuito a David Sence (The Mathematical Gazette, 1956) ma fu in realtà trovato in precedenza dal russo Andrej Ziboski (cfr. E.Dickson, History of Theory of Numbers).

Presentiamo in questa nota un semplice criterio di divisibilità per 7, a nostro avviso sconosciuto, criterio di facile dimostrazione ed altrettanto facile generalizzazioni a casi più generali, come vedremo al paragrafo 3.

Tale criterio che si applica ad un numero di almeno tre cifre, essendo banale il caso di due cifre, si enuncia come segue :

Criterio di divisibilità per 7 . Un numero (in rappresentazione decimale) $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 7 se, e solo se, lo è il numero $C_1 C_0 + 2 \times C_n C_{n-1} \dots C_2$ ovvero la somma delle ultime due cifre a destra sommate al doppio del numero formato dalla parte residua.

Ad esempio 2191 è divisibile per 7 se, solo se, lo è $91 + 2 \times 21 = 133$. Il numero 133 è divisibile per 7 se, solo se, lo è $2 \times 1 + 33 = 35 = 5 \times 7$!

Ancora 219135 è divisibile per 7 se e solo se lo è $2 \times 2191 + 35 = 4417$, questi è divisibile per 7 se e solo se lo è $2 \times 44 + 17 = 105$, questi è divisibile per 7 se e solo se lo è $2 \times 1 + 5 = 7$!

Nel paragrafo 2 richiameremo i classici criteri di divisibilità derivanti dal cosiddetto Criterio generale di divisibilità, che chiameremo I Criterio, e ne desumeremo le difficoltà consuete.

Nel paragrafo 3 proveremo il criterio di divisibilità per 7 e le sue generalizzazioni che conducono a quello che chiameremo II Criterio Generale di divisibilità.

Nel paragrafo 4 dedurremo diverse conseguenze, ed ulteriori criteri di divisibilità.

2.- E' ben noto che se $X = 0,1,2,\dots,9$ è la base per la numerazione decimale allora ogni naturale N si esprime in modo unico nella forma seguente:

$$N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0 = C_n 10^n + C_{n-1} 10^{n-1} + \dots + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0 .$$

Supponiamo ora che si vogliano individuare dei critiri a che un altro naurale m sia un divisore di N . Iniziamo allora a studiare il comportamento degli elementi della successione

$$1, 10, 10^2, \dots, 10^{n-1}, 10^n, \dots$$

allora che ciascuno di essi venga diviso per m . In particolare ci interessa valutare la successione dei resti della divisione degli elementi della successione per l'intero m . Denotiamo la successione dei resti e la successione delle cifre rispettivamente con :

$$\begin{aligned} (R) &= R_0 = 1, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n, \dots \\ (C) &= C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n, \dots \end{aligned}$$

Nella letteratura sussiste il seguente teorema che è oramai un classico.

Teorema 1. *La successione dei resti $R_0 = 1, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n, \dots$ modulo m degli elementi della successione $1, 10, 10^2, \dots, 10^{n-1}, 10^n, \dots$ è periodica. Precisamente la successione dei resti è periodica semplice se m è primo con 2 ovvero con 5, è periodico-composta (con un antiperiodo ed un periodo) se invece m è divisibile per 2 ovvero per 5.*

Esempi.

- Resti mod 2 : $(R) = 1, 0, 0, 0, \dots, 1, [0]$ antiperiodo = (1) periodo = (0)
- Resti mod 3 : $(R) = 1, 1, 1, 1, \dots, [1]$ periodo = (1)
- Resti mod 4 : $(R) = 1, 2, 0, 0, \dots, [0]$ antiperiodo = (1, 2) periodo = (0)
- Resti mod 5 : $(R) = 1, 0, 0, 0, \dots, 1, [0]$ antiperiodo = (1) periodo = (0)
- Resti mod 6 : $(R) = 1, 4, 4, 4, \dots, 4, [4]$ antiperiodo = (1) periodo = (4)
- Resti mod 7 : $(R) = 1, 3, 2, 6, 4, 5, \dots$ periodo = (1, 3, 2, 6, 4, 5)
 ovvero: $(R) = 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ utilizzando anche resti negativi (m-R).
- Resti mod 8 : $(R) = 1, 2, 4, 0, 0, 0, \dots$ antiperiodo = (1, 2, 4) periodo = (0)
 ovvero: $(R) = 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$ utilizzando anche resti negativi (m-R).
- Resti mod 9 : $(R) = 1, 1, 1, 1, \dots, [1]$ periodo = (1)
- Resti mod 10 : $(R) = 1, 0, 0, 0, \dots, 1, [0]$ antiperiodo = (1) periodo = (0)
- Resti mod 11 : $(R) = 1, 10, 1, 10, 1, 10, \dots$ periodo = (1, 10)
 ovvero: $(R) = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ utilizzando anche resti negativi (m-R)
- Resti mod 12 : $(R) = 1, 10, 4, 4, 4, 4, \dots$ antiperiodo = (1, 10) periodo = (4)
 ovvero: $(R) = 1, -2, 4, 4, 4, 4, \dots$ utilizzando anche resti negativi (m-R)
- Resti mod 13 : $(R) = 1, 10, 9, 12, 3, 4, \dots$ periodo = (1, 10, 9, 12, 3, 4)
 ovvero: $(R) = 1, -3, -4, -1, 3, 4, \dots$ utilizzando anche resti negativi (m-R).

Teorema 2. *La successione dei resti $R_0 = 1, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n, \dots$ modulo m degli elementi della successione $1, 10, 10^2, \dots, 10^{n-1}, 10^n, \dots$ ha antiperiodo a e periodo g dati da :*

$$a = \dots$$

$$g = g(N, m) = \dots$$

Teorema 3 (Primo criterio generale di divisibilità) . *Sia dato il naturale*

$$N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0 = C_n 10^n + C_{n-1} 10^{n-1} + \dots + C_2 10^2 + C_1 10 + C_0 .$$

N è divisibile per m se e solo se è divisibile per m l'intero

$$(C) X (R) = C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n .$$

Esempio 1. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 2 (ovvero per 5, ovvero per 10) se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$ cioè se e solo se lo è C_0 .

Esempio 2. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 3 (ovvero per 9) se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$ cioè se e solo se lo è la somma delle cifre.

Esempio 3. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 4 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, 2, 0, 0, 0, \dots$ cioè se e solo è divisibile per 4 il complesso delle ultime due cifre a destra, e questo lo è se lo è il numero $C_0 + 2C_1$.

Esempio 3. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 6 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, 4, 4, 4, \dots, 4, \dots$ cioè se e solo se lo è la somma dell'ultima cifra più 4 volte la somma delle rimanenti, cioè: $C_0 + 4(C_1 + C_2 + \dots + C_n)$.

Esempio 4. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 7 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, 3, 2, -1, -3, -2, \dots$

Esempio 5. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 8 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, 2, 4, 0, 0, 0, \dots$ cioè se e solo è divisibile per 8 il complesso delle ultime tre cifre a destra, e questo lo è se lo è il numero $C_0 + 2C_1 + 4C_2$.

Esempio 6. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 11 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, -1, 1, -1, \dots$ cioè se e solo se lo è la somma delle cifre pari meno la somma delle cifre dispari.

Esempio 7. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 12 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, -2, 4, 4, 4, 4, \dots$

Esempio 8. $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 13 se e solo se lo è

$$C_0 + C_1 R_1 + C_2 R_2 + \dots + C_{n-1} R_{n-1} + C_n R_n$$

con $(R) = 1, -3, -4, -1, 3, 4, \dots$

Gli esempi [1..6] sono i citati criteri in premessa ivi compreso il criterio di divisibilità per 7, gli esempi 7 e 8 esprimono i complicati criteri di divisibilità per 12 e per 13 derivanti dal primo criterio di divisibilità.

3. In questo paragrafo dimostriamo il criterio di divisibilità per 7 enunciato al paragrafo 1. In realtà proviamo un pò di più, precisamente proviamo che:

Teorema (Secondo criterio generale di divisibilità) . Sia dato un naturale N rappresentato, rispetto ad una base $X = 0, 1, \dots, X-1$, da

$$N = (C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0)_X = C_n X^n + C_{n-1} X^{n-1} + \dots + C_2 X^2 + C_1 X + C_0 .$$

N è divisibile per m se e solo se è divisibile per m l'intero

$$M = (X^r - km) (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} + (C_r C_{r-1} \dots C_2 C_1 C_0)_X$$

Dove k è un intero arbitrario e quindi, in particolare, k è il più grande intero tale $X^r - km > 0$, ovvero $k = \lfloor X^r/m \rfloor$.

Dimostrazione. Sia m un divisore di N , allora:

$$\begin{aligned} h m = N &= C_n X^n + C_{n-1} X^{n-1} + \dots + C_r X^r + C_{r-1} X^{r-1} + \dots + C_2 X^2 + C_1 X + C_0 = \\ &= X^r [C_n X^{n-r} + C_{n-1} X^{n-r-1} + \dots + C_r] + (C_{r-1} \dots C_2 C_1 C_0)_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h m - k m (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} &= (C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0)_X - k m (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} = \\ &= X^r (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} + (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} - k m (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} = \\ &= (X^r - km) (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} + (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} = M. \end{aligned}$$

Dunque m è un divisore di M .

Supponiamo ora che m divida M , allora:

$$M = sm = (X^r - km) (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} + (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r}$$

segue:

$$\begin{aligned} M + k m (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} &= sm + k m (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} = \\ &= X^r (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} + (C_n C_{n-1} \dots C_r)_{X^r} = N \end{aligned}$$

Il che prova l'asserto.

Conseguenze, Il teorema vale per una base qualsiasi, quindi anche per la base 10, per un indice qualsiasi $r \geq 2$, per un k qualsiasi, quindi anche per la suddetta parte intera.

4.- Nuovi Criteri

a) Criterio di divisibilità per 7. Per $X-1 = 9$, $m = 7$, $r = 2$ e $k = 14$ essendo $(10^2 - k 7) = 2 > 0$ si ha il teorema enunciato nel primo paragrafo.

b) Criterio di divisibilità per 13 . Per $X-1 = 9$, $m = 13$, $r = 2$ e $k = 7$ ho $(10^2 - k 13) = 9 > 0$; [per $k=8$ ho $(10^2 - k 13) = - 4$] . Si può enunciare nella forma:

Un numero (in rappresentazione decimale) $N = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1 C_0$ è divisibile per 13 se, e solo se, lo è il numero $C_1 C_0 + 9 \times C_n C_{n-1} \dots C_2$, ovvero la somma delle ultime due cifre a destra sommate al nove volte il numero formato dalla parte residua.

[ovvero se, e solo se, lo è il numero $C_1 C_0 - 4 \times C_n C_{n-1} \dots C_2$, ovvero il numero formato dalle ultime due cifre a destra sottratte di 4 nove volte il numero formato dalla parte residua.]

$$X-1=9; m=8; r=2; k=[X^2/m]=12; (X^2-km)=4; C_1 C_0 + 4 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=9; r=2; k=[X^2/m]=11; (X^2-km)=1; C_1 C_0 + C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=10; r=2; k=[X^2/m]=10; (X^2-km)=0; C_1 C_0$$

$$X-1=9; m=11; r=2; k=[X^2/m]=10; (X^2-km)=1; C_1 C_0 + C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=12; r=2; k=[X^2/m]=8; (X^2-km)=4; C_1 C_0 + 4 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=13; r=2; k=[X^2/m]=7; (X^2-km)=9, -4; C_1 C_0 - 4 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=14; r=2; k=[X^2/m]=7; (X^2-km)=2; C_1 C_0 + 2 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=15; r=2; k=[X^2/m]=7; (X^2-km)=2; C_1 C_0 + 2 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=16; r=2; k=[X^2/m]=7; (X^2-km)=4; C_1 C_0 + 4 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=17; r=2; k=[X^2/m]=5; (X^2-km)=15, -2; C_1 C_0 - 2 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=18; r=2; k=[X^2/m]=5; (X^2-km)=10, -8; C_1 C_0 - 8 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=19; r=2; k=[X^2/m]=5; (X^2-km)=5; C_1 C_0 + 5 C_n C_{n-1} \dots C_2$$

$$X-1=9; m=20; r=2; k=[X^2/m]=5; (X^2-km)=0; C_1 C_0$$

.... continuare ...

Bibliografia

F.Eugeni- M.A.Garzia,Cap.III. La divisibilità nell'anello degli interi relativi, in: www.afsu.it (vedi Settri/matematica/dai numeri naturali ai complessi).

A.Chiellini-R.Giannarelli, L'esame orale di Matematica, Veschi, Roma, 1954.